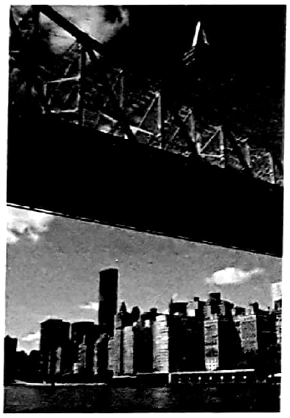
فهرست مطالب

سخن ناشر ه
مقدمهٔ مترجم ز
پیش‌درآمد ح
پیشگفتار ی

۱. مقدمه‌ای بر استاتیک ۱

۱.۱ مکانیک ۱
۲.۱ مفاهیم اساسی ۱
۳.۱ کمیت‌های عددی و برداری ۲
۴.۱ قوانین نیوتن ۳
۵.۱ یکاها ۴
۶.۱ قانون جاذبهٔ عمومی ۵
۷.۱ دقت، حدود و تقریب‌ها ۶
۸.۱ حل مسائل استاتیک ۶
۹.۱ مروری بر فصل ۸

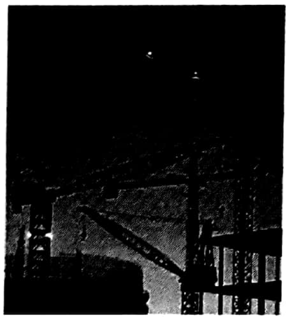


۲. سیستم‌های نیرو ۱۳

۱.۲ مقدمه ۱۳
۲.۲ نیرو ۱۳

قسمت (الف): سیستم‌های دوبعدی نیرو ۱۵
۳.۲ مؤلفه‌های عمود برهم ۱۵
۴.۲ گشتاور ۲۳
۵.۲ کوپل ۳۱
۶.۲ برآیندها ۳۵

قسمت (ب): سیستم‌های سه‌بعدی نیرو ۴۱
۷.۲ مؤلفه‌های عمود برهم ۴۱
۸.۲ گشتاور و کوپل ۴۶
۹.۲ برایندها ۵۵
۱۰.۲ مروری بر فصل ۶۲



Scanned by CamScanner

۱

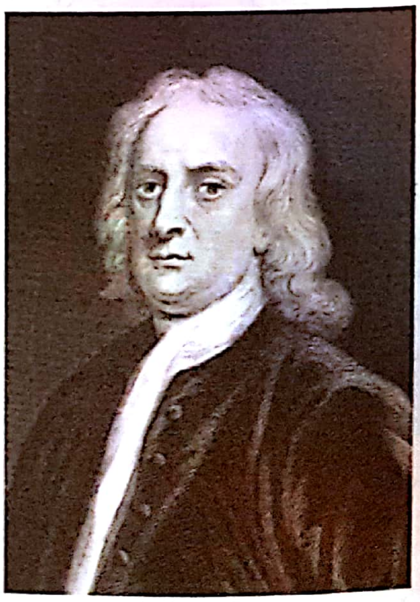
مقدمه‌ای بر استاتیک

۱.۱ مکانیک
۲.۱ مفاهیم اساسی
۳.۱ کمیت‌های عددی و برداری
۴.۱ قوانین نیوتن
۵.۱ یکاها
۶.۱ قانون جاذبهٔ عمومی
۷.۱ دقت، حدود و تقریب‌ها
۸.۱ حل مسائل استاتیک
۹.۱ مروری بر فصل

۱.۱ مکانیک

مکانیک شاخه‌ای از علم فیزیک است که در آن تأثیر نیروها بر اجسام مورد بررسی قرار می‌گیرد. هیچ‌یک از موضوعات دیگر به‌اندازهٔ مکانیک نقشی به این مهمی را در تحلیل‌های مهندسی ایفا نمی‌کند. با اینکه اصول مکانیک زیاد نیستند، اما کاربرد وسیعی در علوم مهندسی دارند. اصول مکانیک بر تحقیق و توسعه در دامنهٔ دانش ارتعاشات، پایداری و مقاومت ساختمان‌ها و ماشین‌ها، روبوتیک، طراحی راکت‌ها و فضاپیماها، کنترل اتوماتیک، بازده ماشین‌ها، جریان سیالات، ماشین‌ها و لوازم الکتریکی، رفتار مولکول‌ها، اتم‌ها و ذرات ریزاتمی متمرکزند. شناخت کامل این موضوع یک پیش‌نیاز ضروری برای فعالیت در این رشته‌ها و بسیاری از رشته‌های دیگر است.

مکانیک قدیمی‌ترین شاخه از علوم فیزیک است. شروع توسعهٔ این علم مترادف با سرآغاز مهندسی است. اولین نوشته‌های ثبت‌شده در مورد مکانیک متعلق به ارشمیدس (۲۸۷ـ۲۱۲ ق.م) بوده که مربوط به اصل اهرم و اصل شناوری اجسام غوطه‌ور می‌باشد. پیشرفت بیشتر در این علم



سر ایزاک نیوتن

با درک قوانین و فرمول‌بندی و ترکیب برداری نیروها، توسط استوینوس (۱۶۲۰ـ۱۵۴۸) حاصل شد و همچنین وی بیشتر اصول استاتیک را به‌صورت فرمول درآورد. اولین بررسی یک مسئلهٔ دینامیک به گالیله (۱۶۴۲ـ۱۵۶۴)، برای آزمایش‌های وی بر روی سقوط سنگ‌ها، نسبت داده شده است. فرموله‌کردن دقیق قوانین حرکت و جاذبهٔ گرانشی اولین‌بار توسط نیوتن (۱۷۲۷ـ۱۶۴۲) صورت گرفته و او همچنین ایدهٔ استفاده از بی‌نهایت کوچک را در تحلیل‌های ریاضیاتی بدعت گذاشت. علاوه بر آن اشخاصی مانند داوینچی، وارینون، اویلر، دالامبر، لاپلاس و دیگران به‌نوبهٔ خود نقش مهمی را در پیشرفت علم مکانیک ایفا نمودند.

در این کتاب ما هم با توسعهٔ اصول مکانیک و هم با کاربرد آنها سروکار خواهیم داشت. به‌طورکلی اصول مکانیک به‌وسیلهٔ ریاضیات بیان می‌شوند بنابراین ریاضیات نقش بسیار مهمی را در کاربرد این اصول برای حل مسائل علمی ایفا می‌کند.

علم مکانیک از دید منطقی به دو بخش تقسیم می‌شود: ***استاتیک*** که د ارتباط با تعادل اجسام تحت تأثیر نیروها بوده و ***دینامیک*** که دربارهٔ حرکت اجسام می‌باشد. کتاب *مکانیک مهندسی* نیز به دو جلد تقسیم شده است: جلد اول *استاتیک* و جلد دوم *دینامیک*.

۲.۱ مفاهیم اساسی

مفاهیم و تعاریف زیر برای یادگیری اصول مکانیک ضروری و فهم آنها پیش ا هر کاری لازم است:

فضا: ناحیه‌ای هندسی و اشغال‌شده توسط اجسام است که مکان آنها توسط خطوط و زوایای متناسب با یک سیستم مختصات، بیان می‌گردد. برای مسائل سه‌بعدی نیاز به سه مختصهٔ مجزا وجود دارد، در حالی‌که در تحلیل مسائل دوبعدی تنها دو مختصه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

زمان: عبارت است از اندازهٔ دو رویداد متوالی (پی‌درپی) و یک کمیت پایه‌ای در دینامیک. زمان به‌طور مستقیم دخالتی در تحلیل مسائل استاتیکی ندارد.

جرم: معیاری از مقدار اینرسی (لختی) یک جسم است که می‌توان آن مقاومت جسم در برابر تغییر سرعت تعریف کرد. همچنین جرم را می‌توا

Scanned by CamScanner

فهرست مطالب

سخن ناشر ه

مقدمهٔ مترجم ز

پیش درآمد ح

پیشگفتار ی

۱. مقدمه‌ای بر استاتیک ۱

۱.۱ مکانیک ۱

۲.۱ مفاهیم اساسی ۱

۳.۱ کمیت‌های عددی و برداری ۲

۴.۱ قوانین نیوتن ۳

۵.۱ یکاها ۴

۶.۱ قانون جاذبهٔ عمومی ۵

۷.۱ دقت، حدود و تقریب‌ها ۶

۸.۱ حل مسائل استاتیک ۶

۹.۱ مروری بر فصل ۸

۲. سیستم‌های نیرو ۱۳

۱.۲ مقدمه ۱۳

۲.۲ نیرو ۱۳

قسمت (الف): سیستم‌های دوبعدی نیرو ۱۵

۳.۲ مؤلفه‌های عمود برهم ۱۵

۴.۲ گشتاور ۲۳

۵.۲ کوپل ۳۱

۶.۲ برآیندها [illegible]

قسمت (ب): سیستم‌های سه‌بعدی نیرو [illegible]

۷.۲ مؤلفه‌های عمود برهم [illegible]

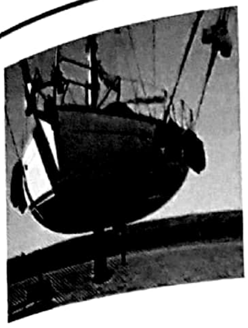
۸.۲ گشتاور و کوپل [illegible]

۹.۲ برایندها [illegible]

۱۰.۲ مروری بر فصل [illegible]

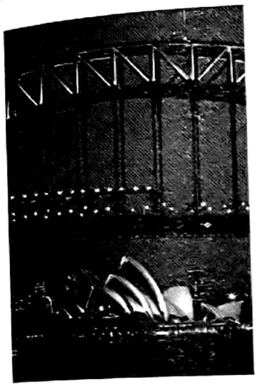
Scanned by CamScanner

۱.۳ مقدمه	۶۱
قسمت (الف): تعادل در دو بعد	۶۹
۲.۳ سیستم منفرد و نمودار جسم آزاد	۶۹
۳.۳ شرایط تعادل	۷۴
قسمت (ب): تعادل در سه بعد	۸۸
۴.۳ شرایط تعادل	۸۸
۵.۳ مروری بر فصل	۱۰۰



۴. سازه‌ها ۱۰۷

۱.۴ مقدمه	۱۰۷
۲.۴ خرپاهای مسطح	۱۰۷
۳.۴ روش مفصل‌ها	۱۰۹
۴.۴ روش مقاطع	۱۱۶
۵.۴ خرپاهای فضایی	۱۲۳
۶.۴ قاب‌ها و ماشین‌ها	۱۲۸
۷.۴ مروری بر فصل	۱۴۲



۵. نیروهای گسترده ۱۴۹

۱.۵ مقدمه	۱۴۹
قسمت (الف): مراکز جرم و مراکز هندسی	۱۵۰
۲.۵ مرکز جرم	۱۵۰
۳.۵ مراکز هندسی خطوط، سطوح و حجم‌ها	۱۵۱
۴.۵ اجسام و شکل‌های مرکب: تقریب‌ها	۱۶۳
۵.۵ قضیهٔ پاپوس	۱۶۹
قسمت (ب): مباحث ویژه	۱۷۵
۶.۵ تیرها ـ اثرات خارجی	۱۷۵
۷.۵ تیرها ـ اثرات داخلی	۱۷۹
۸.۵ کابل‌های انعطاف‌پذیر	۱۸۶
۹.۵ استاتیک سیالات	۱۹۵
۱۰.۵ مروری بر فصل	۲۰۶

Scanned by CamScanner

۶. اصطکاک ۲۱۳

۶.۱ مقدمه ۲۱۳

قسمت (الف): پدیدهٔ اصطکاک ۲۱۳

۶.۲ انواع اصطکاک ۲۱۳

۶.۳ اصطکاک خشک ۲۱۴

قسمت (ب): کاربرد اصطکاک در ماشین‌ها ۲۲۶

۶.۴ گوه‌ها ۲۲۶

۶.۵ پیچ‌ها ۲۲۷

۶.۶ یاتاقان‌های شعاعی ۲۳۳

۶.۷ یاتاقان‌های محوری، اصطکاک دیسک‌ها ۲۳۴

۶.۸ تسمه‌های انعطاف‌پذیر ۲۳۸

۶.۹ مقاومت غلتشی ۲۳۹

۶.۱۰ مروری بر فصل ۲۴۵

۷. کار مجازی ۲۵۳

۷.۱ مقدمه ۲۵۳

۷.۲ کار ۲۵۳

۷.۳ تعادل ۲۵۵

۷.۴ انرژی پتانسیل و پایداری ۲۶۶

۷.۵ مروری بر فصل ۲۷۶

پیوست‌ها

پیوست الف. گشتاورهای لختی ۲۸۱

الف.۱ مقدمه ۲۸۱

الف.۲ تعاریف ۲۸۲

الف.۳ سطوح مرکب ۲۹۱

الف. ۴ حاصلضرب‌های لختی و چرخش محورها ۲۹۷

پیوست ب. گشتاورهای لختی جرم ۳۰۶

پیوست ج. عناوین برگزیدهٔ ریاضی ۳۰۷

ج.۱ مقدمه ۳۰۷

ج.۲ هندسهٔ مسطحه ۳۰۷

ج.۳ هندسهٔ فضایی ۳۰۷

ج.۴ روابط جبری ۳۰۸

ج.۵ هندسهٔ تحلیلی ۳۰۸

ج.۶ مثلثات ۳۰۸

ج.۷ عملیات برداری ۳۰۹

ج.۸ سری‌ها ۳۱۰

ج.۹ مشتق‌ها ۳۱۰

ج.۱۰ انتگرال‌ها ۳۱۰

ج.۱۱ روش نیوتن برای حل معادلات دشوار ۳۱۱

ج.۱۲ [illegible] عددی ۳۱۲

پیوست د. جداول مفید ۳۱۴

پاسخ مسائل ۳۲۳

واژه‌نامهٔ فارسی ـ انگلیسی ۳۴۱

واژه‌نامهٔ انگلیسی ـ فارسی ۳۴۳

فهرست راهنما ۳۴۵

Scanned by CamScanner

۱

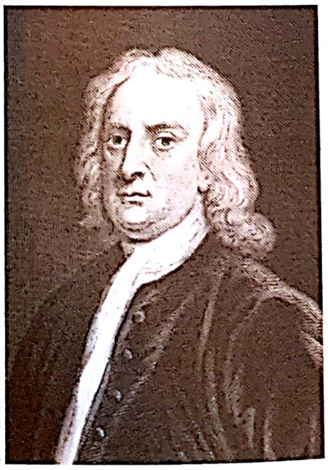
مقدمه‌ای بر استاتیک

۱.۱ مکانیک
۲.۱ مفاهیم اساسی
۳.۱ کمیت‌های عددی و برداری
۴.۱ قوانین نیوتن
۵.۱ یکاها
۶.۱ قانون جاذبهٔ عمومی
۷.۱ دقت، حدود و تقریب‌ها
۸.۱ حل مسائل استاتیک
۹.۱ مروری بر فصل

۱.۱ مکانیک

مکانیک شاخه‌ای از علم فیزیک است که در آن تأثیر نیروها بر اجسام مورد بررسی قرار می‌گیرد. هیچ‌یک از موضوعات دیگر به‌اندازهٔ مکانیک نقشی به این مهمی را در تحلیل‌های مهندسی ایفا نمی‌کند. با اینکه اصول مکانیک زیاد نیستند، اما کاربرد وسیعی در علوم مهندسی دارند. اصول مکانیک بر تحقیق و توسعه در دامنهٔ دانش ارتعاشات، پایداری و مقاومت ساختمان‌ها و ماشین‌ها، روبوتیک، طراحی راکت‌ها و فضاپیماها، کنترل اتوماتیک، بازده ماشین‌ها، جریان سیالات، ماشین‌ها و لوازم الکتریکی، رفتار مولکول‌ها، اتم‌ها و ذرات ریزاتمی متمرکزند. شناخت کامل این موضوع یک پیش‌نیاز ضروری برای فعالیت در این رشته‌ها و بسیاری از رشته‌های دیگر است.

مکانیک قدیمی‌ترین شاخه از علوم فیزیک است. شروع توسعهٔ این علم مترادف با سرآغاز مهندسی است. اولین نوشته‌های ثبت‌شده در مورد مکانیک متعلق به ارشمیدس (۲۸۷_۲۱۲ ق.م) بوده که مربوط به اصل اهرم و اصل شناوری اجسام غوطه‌ور می‌باشد. پیشرفت بیشتر در این علم



سر ایزاک نیوتن

با درک قوانین و فرمول‌بندی و ترکیب برداری نیروها، توسط استوینوس (۱۵۴۸_۱۶۲۰) حاصل شد و همچنین وی بیشتر اصول استاتیک را به‌صورت فرمول درآورد. اولین بررسی یک مسئلهٔ دینامیک به گالیله (۱۵۶۴_۱۶۴۲)، برای آزمایش‌های وی بر روی سقوط سنگ‌ها، نسبت داده شده است. فرموله‌کردن دقیق قوانین حرکت و جاذبهٔ گرانشی اولین‌بار توسط نیوتن (۱۶۴۲_۱۷۲۷) صورت گرفته و او همچنین ایدهٔ استفاده از بی‌نهایت کوچک را در تحلیل‌های ریاضیاتی بدعت گذاشت. علاوه بر آن اشخاصی مانند داوینچی، وارینون، اویلر، دالامبر، لاپلاس و دیگران به‌نوبهٔ خود نقش مهمی را در پیشرفت علم مکانیک ایفا نمودند.

در این کتاب ما هم با توسعهٔ اصول مکانیک و هم با کاربرد آنها سروکار خواهیم داشت. به‌طورکلی اصول مکانیک به‌وسیلهٔ ریاضیات بیان می‌شوند و بنابراین ریاضیات نقش بسیار مهمی را در کاربرد این اصول برای حل مسائل علمی ایفا می‌کند.

علم مکانیک از دید منطقی به دو بخش تقسیم می‌شود: ***استاتیک*** که در ارتباط با تعادل اجسام تحت تأثیر نیروها بوده و ***دینامیک*** که دربارهٔ حرکت اجسام می‌باشد. کتاب *مکانیک مهندسی* نیز به دو جلد تقسیم شده است: جلد اول *استاتیک* و جلد دوم *دینامیک*.

۲.۱ مفاهیم اساسی

مفاهیم و تعاریف زیر برای یادگیری اصول مکانیک ضروری و فهم آنها پیش از هر کاری لازم است:

فضا: ناحیه‌ای هندسی و اشغال‌شده توسط اجسام است که مکان آنها توسط خطوط و زوایای متناسب با یک سیستم مختصات، بیان می‌گردد. برای مسائل سه‌بعدی نیاز به سه مختصهٔ مجزا وجود دارد، در حالی‌که در تحلیل مسائل دوبعدی تنها دو مختصه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

زمان: عبارت است از اندازهٔ دو رویداد متوالی (پی‌درپی) و یک کمیت پایه‌ای در دینامیک. زمان به‌طور مستقیم دخالتی در تحلیل مسائل استاتیکی ندارد.

جرم: معیاری از مقدار اینرسی (لختی) یک جسم است که می‌توان آن را مقاومت جسم در برابر تغییر سرعت تعریف کرد. همچنین جرم را می‌توان

Scanned by CamScanner

به‌عنوان مقدار مواد تشکیل‌دهندهٔ یک جسم بیان کرد. جرم یک جسم تأثیر مستقیم در نیروی جاذبهٔ بین آن جسم و اجسام دیگر دارد. این نیرو در بسیاری از کاربردهای استاتیک ظاهر می‌شود.

نیرو: عبارت است از اثر یک جسم بر روی جسم دیگر. یک نیرو تمایل دارد که جسم را در راستای اثرش حرکت دهد. اثر یک نیرو با *مقدار* آن، *راستای اثر* آن، و *نقطه‌اثر* آن بر روی جسم مشخص می‌شود. بنابراین نیرو یک کمیت برداری است و خواص آن به‌طور مفصّل در فصل ۲ شرح داده خواهد شد.

ذره: جسمی است با ابعاد ناچیز (قابل صرف نظر). از نظر ریاضی، ذره جسمی است با ابعاد نزدیک به صفر به‌طوری‌که می‌توانیم آن را مانند یک جسم متمرکز در یک نقطه در نظر بگیریم. ما معمولاً ذره را به‌عنوان یک جزء دیفرانسیلی از یک جسم در نظر می‌گیریم. همچنین گاهی یک جسم را به‌صورت یک ذره در نظر می‌گیریم البته این عمل فقط وقتی صورت می‌گیرد که ابعاد جسم مستقل از محل اثر نیروهای وارد بر آن باشد.

جسم صلب: جسمی را می‌توان صلب در نظر گرفت که تغییر فاصلهٔ بین هر دو نقطه‌ای از آن جسم در شرایط موردنظر ناچیز باشد. به‌عنوان مثال یک جرثقیل بارگذاری‌شده را در نظر بگیرید. کشش کابلی که تیر تحتانی آن را نگه‌داشته، مستقل از تغییر شکل‌های کوچک در اجزای داخلی تیر است. به‌همین‌علت در محاسبهٔ نیروهای خارجی وارد بر تیر، می‌توان تیر را به‌عنوان یک جسم صلب در نظر گرفت. استاتیک در اصل به محاسبهٔ نیروهای خارجی وارد بر یک جسم صلب در حالت تعادل می‌پردازد؛ در حالی‌که محاسبهٔ تغییر شکل‌های داخل اجسام در حوزهٔ درس مکانیک اجسام تغییر شکل‌پذیر بوده که عموماً در ادامهٔ آموزش استاتیک خواهید آموخت.

۳.۱ کمیت‌های عددی و برداری

در مکانیک از دو نوع کمیت استفاده می‌کنیم: *عددی* و *برداری*. *کمیت‌های عددی* آنهایی هستند که تنها دارای مقدار هستند. مثال‌هایی از *کمیت‌های عددی* عبارت‌اند از: زمان، حجم، چگالی، تندی، انرژی و جرم. از طرف دیگر *کمیت‌های برداری* علاوه بر مقدار، دارای جهت نیز بوده و از قانون متوازی‌الاضلاع تبعیت می‌کنند که این قانون بعداً در همین بخش شرح داده خواهد شد. مثال‌هایی از کمیت‌های برداری عبارت‌اند از: جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو، اندازه‌حرکت و گشتاور. خوب است به این نکته اشاره شود که تندی یک کمیت عددی بوده و در حقیقت همان مقدار (اندازه) بردار سرعت را خواهد داشت. لذا سرعت به‌وسیلهٔ دو عامل تندی و جهت مشخص می‌شود.

بردارهایی که نشان‌دهندهٔ کمیت‌های فیزیکی هستند را می‌توان به سه گروه آزاد، لغزان و ثابت تقسیم نمود.

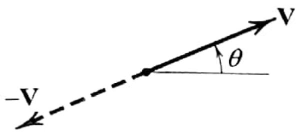
بردار آزاد: برداری است که اثر آن به‌شکل خط یکتایی در فضا محدود نمی‌شود و یا با خط واحدی در فضا همراه نیست. به‌عنوان مثال، اگر جسمی بدون دوران حرکت کند، حرکت یا جابه‌جایی هر نقطهٔ آن جسم را می‌توان یک بردار در نظر گرفت و این بردار جهت و مقدار جابه‌جایی تمام نقاط جسم را نیز توصیف می‌کند. از اینرو، جابه‌جایی چنین جسمی را با یک بردار آزاد می‌توان نشان داد.

بردار لغزان: برداری است که برای آن، یک خط اثر یکتا در فضا وجود دارد و کمیت در راستای آن اعمال می‌شود. هنگامی‌که یک نیروی خارجی بر یک جسم صلب اثر می‌کند، می‌توان این نیرو را در هر نقطهٔ واقع در امتداد خط اثر آن، بدون اینکه تغییری در اثر نیرو بر کل جسم ایجاد شود، وارد کرد[1] و از اینرو می‌توان آن را یک بردار لغزان فرض نمود.

بردار ثابت: برداری است که برای آن، یک نقطه‌اثر یکتا وجود دارد و از اینرو بردار موقعیت خاصی در فضا پیدا می‌کند. اثر یک نیرو بر یک جسم تغییر شکل‌پذیر یا غیر صلب، باید توسط یک بردار ثابت در نقطه‌اثر آن نیرو، مشخص شود. در این حالت، نیروها و تغییر شکل‌های داخلی جسم به نقطه‌اثر نیرو و مقدار و خط اثر آن بستگی دارد.

قراردادهایی برای معادلات و نمودارها

کمیت برداری **V** را مطابق شکل ۱.۱ با پاره‌خطی که در راستای بردار و پیکانی که جهت آن را مشخص می‌کند نشان می‌دهند. طول این خط جهت‌دار، با مقیاسی مناسب، مقدار $|\mathbf{V}|$ را نشان می‌دهد و با حروف ایتالیک نازک به‌صورت V نوشته می‌شود. به‌طور مثال می‌توانیم مقیاس را طوری انتخاب کنیم که یک بردار یک اینچی نشان‌دهندهٔ یک نیروی ۲۰ پوندی باشد.



شکل ۱.۱

در معادلات برداری و در بسیاری از شکل‌ها که فقط اندازهٔ بردارشان نشان داده‌شده است، نماد بردار به‌صورت ایتالیک و نازک خواهد بود. از نماد پررنگ فقط برای بردارهایی استفاده می‌شود که جهت بردار، قسمتی از نماد ریاضی آن باشد. هنگام نوشتن معادلات برداری، مطمئن شوید که بین مقادیر عددی و برداری تفاوت قائل شده‌اید. به‌هنگام نوشتن با دست می‌توانید برای نمایش یک بردار به‌جای پررنگ نوشتن آن، در زیر نماد آن یک خط رسم کرده، $\underline{V}$، یا یک فلش کوچک در بالای آن، $\vec{V}$، رسم کنید.

عملیات برداری

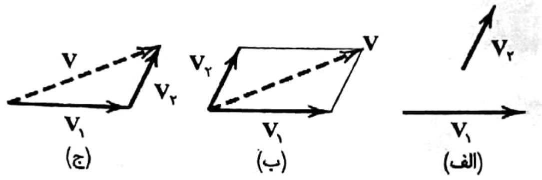
همان‌طورکه در شکل ۱.۱ نشان داده شده، جهت بردار **V** را می‌توان برحسب زاویهٔ θ نسبت به یک جهت مرجع و معلوم اندازه‌گیری کرد. بردار منفی **V** که آن را با $-\mathbf{V}$ نشان می‌دهند، برداری است که اندازهٔ آن برابر بردار **V** و جهتش مخالف جهت آن است.

لازم است بردارها از قانون ترکیب متوازی‌الاضلاع پیروی کنند این قانون بیان می‌کند که دو بردار $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ را، که به‌عنوان بردارهای آزاد در نظر گرفته شده‌اند [شکل ۲.۱ (الف)]، می‌توان با بردار **V** جایگزین کرد به‌شرطی‌که بردار **V** قطر متوازی‌الاضلاع حاصل از دو بردار $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ باشد [شکل ۲.۱ (ب)]. به این نوع ترکیب، *جمع برداری* می‌گویند و به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2$$

که در آن هنگامی‌که علامت جمع برای مقادیر برداری استفاده شود (با حروف سیاه)، به مفهوم *جمع برداری* است و نه جمع *عددی*. جمع عددی مقادیر دو بردار به روش معمول V_1+V_2 نوشته می‌شود. با توجه به شکل هندسی متوازی‌الاضلاع می‌توان نتیجه گرفت $V\neq V_1+V_2$.

بار دیگر دو بردار $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ را به‌عنوان بردارهای آزاد در نظر می‌گیریم. همان‌طورکه در شکل ۲.۱ (ج) مشاهده می‌کنید، می‌توان برای به‌دست آوردن حاصل جمع برداری **V**، با توجه به قاعدهٔ مثلث‌ها، آنها را به‌صورت نوک به دُم به‌حالت مثلثی قرار داد و با یکدیگر جمع نمود. همان‌طورکه در شکل می‌بینیم، ترتیب جمع دو بردار تأثیری در برایند آنها ندارد لذا $\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2=\mathbf{V}_2+\mathbf{V}_1$.



شکل ۲.۱

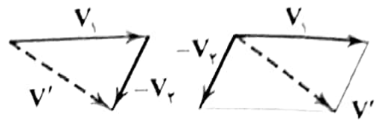
۱. این همان اصل انتقال‌پذیری است که در بخش ۲.۲ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

Scanned by CamScanner

مطابق شکل ۳.۱، تفاضل دو بردار $\mathbf{V}_۱ - \mathbf{V}_۲$ را می‌توان از جمع بردار $\mathbf{V}_۱$ با بردار $-\mathbf{V}_۲$ هم از روش متوازی‌الاضلاع و هم از روش مثلث به‌دست آورد. بردار تفاضل $\mathbf{V}'$ بین دو بردار را می‌توان با عبارت زیر بیان کرد

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_۱ - \mathbf{V}_۲$$

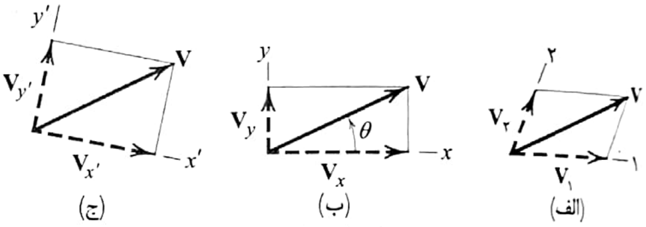
که علامت منفی *تفاضل دو بردار* را نشان می‌دهد.



شکل ۳.۱

به دو یا چند بردار، که مجموع آنها برابر یک بردار $\mathbf{V}$ معین شود، *مؤلفه‌های* آن بردار می‌گویند. لذا بردارهای $\mathbf{V}_۱$ و $\mathbf{V}_۲$ نشان داده شده در شکل ۴.۱ (الف)، مؤلفه‌های بردار $\mathbf{V}$ در جهت ۱ و ۲ می‌باشند. اصولاً راحت‌تر است که از مؤلفه‌هایی استفاده شود که بر یکدیگر عمود هستند، که به آنها *مؤلفه‌های عمودی* می‌گویند. بردارهای $\mathbf{V}_x$ و $\mathbf{V}_y$ در شکل ۴.۱ (ب) به‌ترتیب مؤلفه‌های عمودی بردار $\mathbf{V}$ می‌باشند. همچنین در شکل ۴.۱ (ج)، $\mathbf{V}_{x'}$ و $\mathbf{V}_{y'}$ مؤلفه‌های x' و y' از بردار $\mathbf{V}$ می‌باشند. هنگام استفاده از مؤلفه‌های عمودی، جهت بردار نسبت به مثلاً محور x را می‌توان به‌وسیلهٔ θ نشان داد که در آن

$$\theta = \tan^{-1}\frac{V_y}{V_x}$$



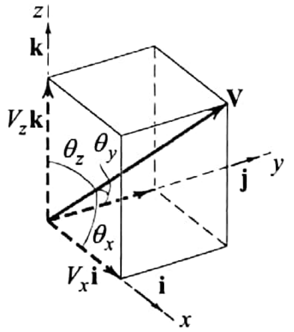
شکل ۴.۱

در ریاضی بردار $\mathbf{V}$ را می‌توان از ضرب اندازهٔ بردار V در یک بردار $\mathbf{n}$ به‌دست آورد که $\mathbf{n}$ برداری است که اندازهٔ آن برابر واحد و هم‌راستا با بردار $\mathbf{V}$ باشد. به بردار $\mathbf{n}$ *بردار یکه* می‌گویند. بنابراین

$$\mathbf{V} = V\mathbf{n}$$

بدین‌طریق هم اندازه و هم راستای بردار را می‌توان با استفاده از یک عبارت ریاضی بیان نمود در بسیاری از مسائل به‌ویژه در مسائل سه‌بعدی راحت‌تر است که مؤلفه‌های عمودی بردار $\mathbf{V}$ را، همان‌طورکه در شکل ۵.۱ نشان داده شده، برحسب بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ نشان داد که این بردارها، به‌ترتیب بردارهای یکه در جهت محورهای x، y و z می‌باشند. با توجه به آنکه بردار $\mathbf{V}$ جمع برداری مؤلفه‌های آن در راستاهای x، y و z می‌باشد، می‌توانیم بردار $\mathbf{V}$ را به‌صورت زیر نمایش دهیم

$$\mathbf{V} = V_x\,\mathbf{i} + V_y\,\mathbf{j} + V_z\,\mathbf{k}$$



شکل ۵.۱

حال از *کسینوس‌های هادی* l، m و n بردار $\mathbf{V}$ استفاده می‌کنیم که چنین بیان می‌شود

$$l = \cos\theta_x\,,\quad m = \cos\theta_y\,,\quad n = \cos\theta_z$$

حال می‌توان مؤلفه‌های بردار $\mathbf{V}$ را چنین نوشت

$$V_x = lV\,,\quad V_y = mV\,,\quad V_z = nV$$

و بر طبق قضیهٔ فیثاغورث

$$V^۲ = V_x^۲ + V_y^۲ + V_z^۲$$

توجه کنید که این رابطه نتیجه می‌دهد: $l^۲ + m^۲ + n^۲ = ۱$.

۴.۱ قوانین نیوتن

سر ایزاک نیوتن اولین شخصی بود که توانست قوانین حرکت یک ذره را بیان و درستی آن را نشان دهد.[۱] بیان امروزی این قوانین به‌صورت زیر است:

قانون اول: یک ذره در حال سکون باقی خواهد ماند و یا با سرعت *یکنواخت* (در یک خط راست و با تندی ثابت) به حرکت خود ادامه می‌دهد چنانچه هیچ نیروی خارجی به آن اعمال نشود.

قانون دوم: شتاب یک ذره متناسب با برایند نیروهای وارد بر آن بوده و جهت آن در جهت برایند نیروهای وارد بر آن است.

قانون سوم: نیروهای کنش و واکنش بین اجسام متعامل دارای اندازه‌ای برابر بوده و در راستای عکس یکدیگرند و هر دو بر *روی یک خط* قرار دارند.

درستی این قوانین به‌وسیلهٔ آزمایش‌های بی‌شمار و دقیق تأیید شده است. قانون دوم نیوتن پایه‌ای برای تحلیل‌های دینامیکی است. وقتی به یک ذره به جرم m نیرویی مانند $\mathbf{F}$ وارد می‌شود می‌توان چنین نوشت:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{۱.۱}$$

که در آن $\mathbf{F}$ برایند نیروهای وارد بر ذرهٔ m و $\mathbf{a}$ شتاب حاصل از آن است. این معادله، یک معادلهٔ برداری است به این دلیل که جهت بردار $\mathbf{F}$ باید با جهت $\mathbf{a}$ یکی بوده و مقدار $\mathbf{F}$ و $m\mathbf{a}$ با یکدیگر مساوی است.

قانون اول نیوتن بیان‌کنندهٔ اصل تعادل نیروهاست که پایهٔ حل مسائل استاتیک می‌باشد. این قانون عملاً نتیجه‌گیری قانون دوم است، زیرا هنگامی‌که نیرو صفر است، شتابی وجود ندارد و ذره یا ساکن است یا با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. قانون اول مفهوم تازه‌ای به توصیف حرکت اضافه نمی‌کند اما به‌دلیل آنکه بخشی از اظهارات کلاسیک نیوتن بوده، در اینجا ذکر شده است.

قانون سوم برای درک مفهوم نیرو ضروری است. این قانون بیان می‌کند که نیروها همیشه به‌صورت زوج‌هایی به‌وجود می‌آیند که مقدار آنها برابر و جهت آنها عکس یکدیگر است. مثلاً نیروی وارد شده به‌وسیلهٔ مداد بر یک میز تحریر (به سمت پایین) با نیرویی هم‌اندازهٔ آن ولی به سمت بالا (وارد بر مداد)، همراه است. این اصل برای تمام نیروها (ثابت یا متغیر) صادق و تا زمانی که نیروها وجود داشته باشند، برقرار است. عدم توجه دقیق به این اصل ساده دلیل اشتباهات مکرر مبتدیان است.

در تحلیل اجسام تحت اثر چند نیرو، باید به‌روشنی مشخص کرد که کدام زوج‌نیروی کنش‌ـواکنش موردنظر است. قبل از هر چیز لازم است جسم موردنظر را مجزا کرد، سپس یکی از زوج‌نیروهای اعمال‌شده بر جسم را در نظر گرفت.

---

۱. فرمول‌بندی اولیهٔ نیوتن را در کتاب *Principia* (1687) می‌توان یافت که توسط F. Cajori تصحیح و در سال ۱۹۳۴ در انتشارات دانشگاه کالیفرنیا به چاپ رسیده است.

Scanned by CamScanner

۵.۱ یکاها

در مکانیک چهار کمیت اساسی به‌کار می‌رود، که به آنها ***کمیت‌های ابعادی*** *گفته می‌شود. این چهار کمیت عبارت‌اند از: طول، جرم، نیرو و زمان. یکاهای به‌کار برده شده برای اندازه‌گیری این کمیت‌ها را نمی‌توان به‌طور مستقل از یکدیگر انتخاب کرد زیرا لازم است که با قانون دوم نیوتن (معادلهٔ ۲.۱) هم‌خوانی داشته باشند.* با آنکه تعداد سیستم یکاهای موجود متعددند، در این کتاب فقط دو سیستم متداول‌تر در علم و صنعت مورد استفاده قرار خواهند گرفت. چهار بعد اساسی و یکاهای آنها و همچنین نمادهایشان در هر دو سیستم در جدول زیر خلاصه شده‌اند.

کمیت	علامت اختصاری	یکای استاندارد SI		یکای استاندارد *U.S.*	
		علامت	یکا	علامت	یکا
جرم	M	kg	کیلوگرم	—	اِسلاگ
طول	L	m	متر	ft	فوت
زمان	T	s	ثانیه	sec	ثانیه
نیرو	F	N	نیوتن	lb	پوند

یکاهای SI

سیستم یکاهای بین‌المللی به‌صورت خلاصه SI (از زبان فرانسه)، سیستمی بین‌المللی است که در امریکا و همچنین سراسر دنیا پذیرفته شده است و این سیستم، تعبیر جدیدی از سیستم متریک می‌باشد. طبق توافق بین‌المللی یکاهای SI، به‌مرور زمان جایگزین یکاهای دیگر خواهند شد.

همان‌طورکه در جدول نشان داده شده، در سیستم SI یکاهای کیلوگرم (kg) برای جرم، متر (m) برای طول، ثانیه (s) برای زمان، به‌عنوان یکاهای پایه انتخاب شده، و با استفاده از معادلهٔ (۱.۱) از ترکیب سه‌یکای قبلی، نیوتن (N) برای نیرو برگزیده شده است. بنابراین نیرو (N) مساوی جرم (kg) ضربدر شتاب (m/s^2) است یا

$$N = kg \cdot m/s^2$$

پس یک نیوتن مقدار نیروی لازم برای دادن شتاب $1\,m/s^2$ به جرم ۱kg است.

جسمی به جرم m را در نظر بگیرید که آزادانه در نزدیکی سطح زمین رها می‌شود. تنها نیروی وارد بر آن، نیروی جاذبه بوده و این نیرو باعث می‌شود که جسم با شتاب g به‌سمت مرکز زمین به حرکت درآید. این نیروی گرانشی برابر وزن جسم W بوده و از معادلهٔ (۱.۱) به‌دست می‌آید

$$W\ (N) = m\,(kg) \times g\left(m/s^2\right)$$

یکاهای معمول در امریکا

یکاهای معمول در امریکا، یا سیستم یکاهای بریتانیا، که به آن سیستم فوت-پوند-ثانیه (FPS) نیز می‌گویند، سیستم متداول در صنعت و تجارت در کشورهای انگلیسی‌زبان می‌باشند. با وجود آنکه این سیستم به مرور زمان به‌وسیلهٔ یکاهای SI جایگزین خواهد شد، برای سال‌های زیادی مهندسان مجبور خواهند بود تا قابلیت استفاده از هر دو سیستم SI و FPS را داشته باشند و ضمناً هر دو سیستم به‌طور آزادانه در *مهندسی مکانیک* استفاده می‌شوند.

همان‌طورکه در جدول بالا نشان داده شد در سیستم .U.S یا همان FPS یکاهای فوت (ft) برای طول، ثانیه (sec) برای زمان، و پوند (lb) برای نیرو به‌عنوان یکاهای پایه در نظر گرفته می‌شوند و برای جرم، واحد اِسلاگ، که از معادلهٔ (۱.۱) به‌دست می‌آید، به‌کار می‌رود. پس نیرو برحسب پوند (lb) مساوی است با جرم (slug) ضربدر شتاب (ft/sec^2)

$$slug = \frac{lb/sec^2}{ft}$$

بنابراین ۱ اسلاگ مقدار جرمی است که تحت نیروی (۱lb)، شتابی معادل $1\,ft/sec^2$ در آن ایجاد می‌شود. اگر W نیروی جاذبهٔ گرانشی یا وزن بوده و g شتاب حاصل از گرانش باشد، با توجه به معادلهٔ (۱.۱) داریم

$$m\,(slug) = \frac{W\ (lb)}{g\left(ft/sec^2\right)}$$

دقت کنید که ثانیه در یکاهای SI با s نمایش داده شده، اما در سیستم FPS با sec نشان داده می‌شود.

در سیستم یکاهای .U.S، پوند در بعضی موارد به‌عنوان یکای جرم نیز به‌کار برده می‌شود که نمونهٔ آن تعیین خواص حرارتی مایعات و گازهاست. هنگامی‌که نیاز به تمایز قائل‌شدن میان دو یکا وجود دارد، یکای نیرو به‌صورت lbf و یکای جرم به‌صورت lbm نوشته می‌شود. در این کتاب، تقریباً در همه‌جا از پوند (lb) برای نشان دادن نیرو استفاده می‌کنیم. یکاهای متداول دیگر در دستگاه US، *کیلوپوند* (kip) معادل ۱۰۰۰lb و *تُن* معادل ۲۰۰۰lb، هستند.

یکاهای نیروی معمول دیگر در سیستم یکاهای بین‌المللی (SI) را یک سیستم *مطلق* می‌نامند، زیرا که در آن اندازهٔ کمیت اساسی جرم مستقل از محیط خارجی آن است. از طرف دیگر سیستم U.S. (FPS) یک سیستم *گرانشی* نامیده می‌شود. به این دلیل که کمیت اصلی نیروی پایه در آن به‌عنوان مقداری از گرانش جاذبه‌ای (وزن) در نظر گرفته می‌شود، که بر یک جرم استاندارد تحت شرایط معلوم (در سطح دریا و عرض ۴۵ درجهٔ جغرافیایی) وارد می‌شود. همچنین پوند استاندارد مقدار نیروی لازمی است که به یک پوند جرم شتابی برابر $32.1740\,ft/sec^2$ وارد می‌کند.

در یکاهای SI کیلوگرم همیشه به‌عنوان یکای جرم به‌کار می‌رود و هیچگاه بیانگر نیرو نیست. در سیستم گرانشی MKS (متر، کیلوگرم، ثانیه) که سال‌هاست در کشورهای غیرانگلیسی زبان مورد استفاده قرار می‌گیرد، کیلوگرم، مشابه پوند، هم به‌عنوان یکای نیرو و هم به‌عنوان یکای جرم به‌کار می‌رود.

استانداردهای اولیه

استانداردهای اولیه برای اندازه‌های جرم، طول و زمان با توافق بین‌المللی پایه‌گذاری‌شده که عبارت‌اند از:

جرم: کیلوگرم معادل جرمی از استوانه‌ای خاص از جنس پلاتین و ایریدیم است که در دفتر بین‌المللی اوزان و مقادیر در نزدیکی پاریس نگهداری می‌شود. یک نمونهٔ دقیق از این استوانه نیز در ایالات متحدهٔ آمریکا در انستیتوی ملی استانداردها و تکنولوژی نگهداری می‌شود و به‌عنوان استاندارد جرم برای ایالات متحده قرار گرفته است.

Scanned by CamScanner

طول: متر، که در قدیم به‌عنوان یک ده‌میلیونیم فاصلهٔ قطب تا خط استوا در راستای نصف‌النهار عبوری از پاریس بوده، امروز برابر یک شمش از جنس پلاتین-ایریدیم است که در دفتر بین‌المللی اوزان و مقادیر نگهداری می‌شود. مشکلات دسترسی به این شمش برای ساخت وسایل اندازه‌گیری دقیق، منجر به ایجاد یک استاندارد دقیق‌تر و قابل دسترس‌تر شد که مقدار آن معادل ۱۶۵۰۷۶۳٫۷۳ برابر طول موج یک تابش معین اتم کریپتون ۸۶ می‌باشد.

زمان: ثانیه در گذشته برابر ۱/۸۶۴۰۰ از میانگین طول زمان یک روز خورشیدی بود. نامنظمی‌ها در گردش زمین باعث ایجاد مشکلات در استفاده از این تعریف می‌شد، لذا یک استاندارد دقیق‌تر و تجدیدپذیرتر تعریف شد. ثانیه در حال حاضر به‌عنوان مدت‌زمان ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ برابر دورهٔ تناوبی نوع ویژه‌ای از تابش اتم سزیم ۱۳۳ تعریف می‌شود.

برای بیشتر کاربردهای مهندسی و برای اهداف ما از فراگیری درس مکانیک، این استانداردها به‌طور قابل توجهی خارج از نیاز ما هستند. مقدار استاندارد برای اندازه‌گیری شتاب گرانشی g برابر مقدار آن در سطح دریا و عرض جغرافیایی ۴۵ درجه است. در دو سیستم این مقادیر برابرند با

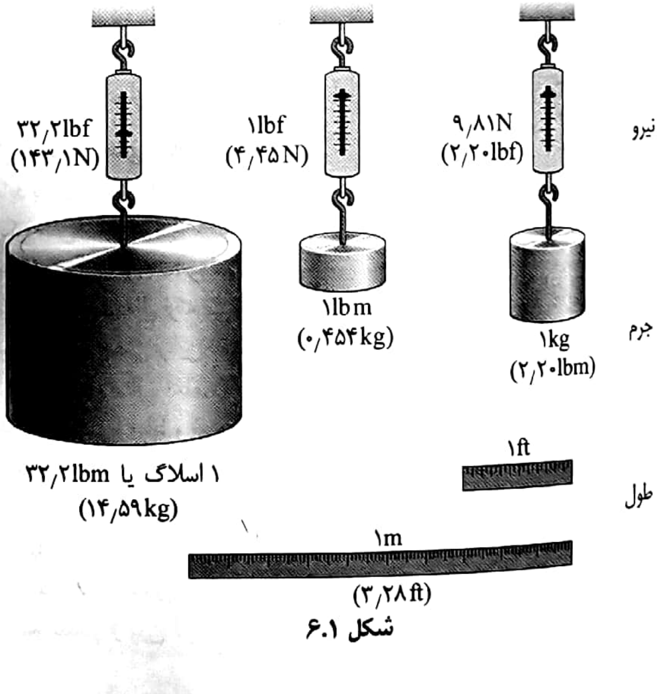
یکای SI	$g = ۹٫۸۰۶۶۵ \text{m/s}^۲$
یکای .U.S	$g = ۳۲٫۱۷۴۰ \text{ft/sec}^۲$

مقادیر تقریبی $۹٫۸۱\text{m/s}^۲$ و $۳۲٫۲\text{ft/sec}^۲$ به‌اندازهٔ کافی برای اکثر محاسبات مهندسی دقیق می‌باشند.

تبدیل یکاها

مشخصهٔ یکاهای SI همچنین ضرایب تبدیل بین یکاهای SI و .U.S در صفحات انتهایی کتاب نشان داده شده‌اند. علاوه بر آن، نمودارهایی از تبدیل تقریب برای بعضی از مقادیر به‌عنوان مرجع در این صفحات کشیده شده‌اند. با وجود اینکه این نمودارها برای فراهم آوردن دید مناسب برای نسبت‌های میان یکاهای SI و .U.S مفید می‌باشند، مهندسان به‌مرور زمان متوجه خواهند شد که لازم است دیدشان مستقیماً به‌صورت یکاهای SI باشد و از تبدیل‌کردن یکاهای .U.S اجتناب کنند. در استاتیک اساساً با یکای طول و نیرو سروکار داریم و همان‌طورکه قبلاً بیان شد، تنها هنگام محاسبهٔ وزن یک جسم از یکای جرم استفاده می‌نماییم.

شکل ۶.۱ نمونه‌هایی از یکاهای نیرو، جرم، و طول در دو سیستم یکاها را نشان می‌دهد و می‌تواند کمک خوبی برای به‌دست آوردن دید کلی برای مقادیر نسبی آنها باشد.



شکل ۶.۱

۶.۱ قانون جاذبهٔ عمومی

در استاتیک و همچنین در دینامیک اغلب نیاز به محاسبهٔ وزن جسم داریم که همان نیروی جاذبهٔ وارد بر جسم است و محاسبهٔ آن وابسته به *قانون جاذبهٔ عمومی* است که اولین‌بار توسط نیوتن به‌صورت فرمول در آمد و با معادلهٔ زیر بیان می‌شود

$$F = G\frac{m_۱ m_۲}{r^۲} \qquad (۲.۱)$$

که در آن:

F، نیروی جاذبهٔ متقابل میان دو ذره است.

G، یک ثابت جهانی است که به *ثابت جاذبه* معروف است.

$m_۱$ و $m_۲$ جرم دو ذره می‌باشند.

r فاصلهٔ میان مرکز دو ذره است.

همان‌طورکه در شکل ۷.۱ مشاهده می‌کنید، نیروهای متقابل F از قانون کنش و واکنش پیروی می‌کنند و به این دلیل که مقدار آنها با یکدیگر برابر بوده و جهت آنها عکس یکدیگر و در راستای خط واصل میان مراکز دو ذره است، از روش تجربی مقدار G برابر $(\text{kg}\cdot\text{s}^۲)/\text{m}^۳(۱۰^{-۱۱})۶٫۶۷۳$ به‌دست می‌آید.

جاذبهٔ گرانشی زمین

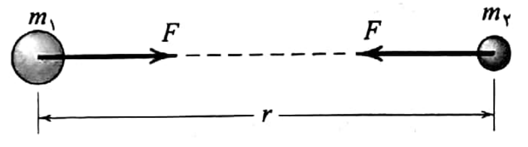
نیروهای گرانشی بین هر زوج‌جسم وجود دارند. بر روی سطح زمین تنها نیروی جاذبهٔ گرانشی قابل ملاحظه همان نیرویی است که به‌وسیلهٔ جاذبهٔ زمین وارد می‌شود. برای مثال هریک از دو ساچمهٔ آهنی به‌قطر ۱۰۰ میلی‌متر با نیروی ۳۷٫۱N به سمت زمین کشیده می‌شود که معادل وزن آن است. درصورتی‌که نیروی بین دو ساچمه در حالتی‌که چسبیده به یکدیگر باشند برابر ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۹۵۱N است. این مقدار نیرو در مقایسه با مقدار نیروی ۳۷٫۱ نیوتنی وارد از سمت زمین قابل صرف‌نظر کردن است. در نتیجه نیروی جاذبهٔ زمین تنها نیروی جاذبه‌ای است که لازم است برای کارهای مهندسی بر روی سطح زمین در نظربگیریم.

نیروی جاذبهٔ وارد شده از سوی زمین بر روی یک جسم (وزن آن) در هر صورت وجود خواهد داشت؛ چه جسم ساکن باشد و چه در حال حرکت. به‌دلیل آنکه این جاذبه از جنس نیروست، وزن جسم باید با یکای نیوتن (N) در سیستم SI و یا یکای پوند (lb) در سیستم .U.S بیان شود. متأسفانه در بسیاری از جاها، یکای جرم کیلوگرم، به‌عنوان یکای وزن در نظر گرفته می‌شود. این نوع استفاده باید در طی زمان از بین برود به این دلیل که در یکاهای SI یکای کیلوگرم، تنها و تنها برای جرم و یکای نیوتن تنها و تنها برای نیرو استفاده می‌شود.

برای یک جسم با جرم m که در نزدیکی سطح زمین قرار گرفته است، نیروی جاذبهٔ F وارد بر آن از معادلهٔ (۲.۱) به‌دست می‌آید. معمولاً مقدار این نیروی گرانشی یا همان وزن را با نماد W نشان می‌دهیم. به‌علت آنکه جسم با شتاب g سقوط خواهد کرد، از معادلهٔ (۱.۱) نتیجه خواهد شد

$$W = mg \qquad (۳.۱)$$

هنگامی‌که جرم m برحسب یکای کیلوگرم (kg) و شتاب برحسب متر بر مجذور ثانیه ($\text{m/s}^۲$) باشد، W برحسب یکای نیوتن (N) خواهد بود. در یکاهای .U.S هنگامی‌که جرم به اسلاگ و g به فوت بر مجذور ثانیه باشد، W به پوند (lb) خواهد بود. مقادیر استاندارد برای g برابر $۹٫۸۱\text{m/s}^۲$ و $۳۲٫۲\text{ft/sec}^۲$ می‌باشد که از دقت کافی برای محاسبات ما در استاتیک برخوردار است.



شکل ۷.۱

Scanned by CamScanner

توجه کنید که وزن واقعی (نیروی جاذبهٔ زمین) و وزن ظاهری (که با ترازوی فنری اندازه‌گیری می‌شود) اختلاف ناچیزی دارند. مقدار این اختلاف، که ناشی از چرخش زمین بوده، بسیار کوچک است و از آن صرف‌نظر می‌شود. این اثر در کتاب دینامیک بررسی خواهد شد.

نیروی گرانشی که زمین بر ماه وارد می‌کند (پیش‌زمینه) عامل کلیدی در حرکت ماه است.

۷.۱ دقت، حدود و تقریب‌ها

تعداد ارقام معنادار در پاسخ‌های عددی نباید از تعداد ارقامی که دقت داده‌ها را می‌رساند، بیشتر باشد. به‌عنوان مثال میله‌ای با سطح مقطع مربع‌شکل به‌ضلع ۲۴mm که به تقریب میلی‌متری اندازه‌گیری شده است را در نظر بگیرید، پس می‌دانیم که دو رقم معنادار دارد. از مجذور طول ضلع، مساحتی برابر $۵۷۶\,mm^2$ به‌دست می‌آید، که با توجه به قاعدهٔ بیان شده باید آن را به‌صورت $۵۸۰\,mm^2$ بنویسیم.

در محاسباتی که کمیت‌ها بزرگ است ولی اختلاف‌ها کوچک‌اند، برای به‌دست آوردن نتایج دقیق‌تر باید در داده‌ها دقت بیشتری کرد. مثلاً لازم است که اعداد ۴٫۲۵۰۳ و ۴٫۲۳۹۱ را که دارای ۵ رقم معنادارند و اختلاف آنها برابر ۰٫۰۱۱۲ است دارای ۳ رقم معنادار باشد. در اغلب محاسبات طولانی، نمی‌توان از ابتدا تعداد ارقام معنادار لازم برای رسیدن به پاسخ دقیق را مشخص کرد. در اغلب محاسبات مهندسی، سه رقم معنادار کافی است.

در این کتاب معمولاً پاسخ‌ها با سه‌رقم معنادار داده شده‌اند، مگر آنکه پاسخ با رقم ۱ شروع شود که در آن صورت پاسخ با ۴ رقم معنادار نشان داده می‌شود. برای محاسبات، تمام داده‌های این کتاب را دقیق در نظر بگیرید.

دیفرانسیل‌ها

مرتبهٔ کمیت‌های دیفرانسیلی، علت اکثر اشتباه‌های مشتق‌گیری از معادلات است. از مشتقات مرتبهٔ بالا عموماً هنگامی‌که در مقابل مشتق‌های مرتبهٔ پایین‌تر قرار می‌گیرند، در حد ریاضی آنها صرف‌نظر می‌شود. به‌عنوان مثال جزء حجمی ΔV از یک مخروط قائم‌الزاویه به‌ارتفاع h و شعاع r را می‌توان یک برش دایره‌ای فرض کرد که فاصلهٔ آن از رأس برابر x بوده و ضخامت آن Δx است. رابطهٔ حجمی برای این جزء برابر است با

$$\Delta V = \frac{\pi r^۲}{h^۲}\left[x^۲\Delta x + x(\Delta x)^۲ + \frac{۱}{۳}(\Delta x)^۳\right]$$

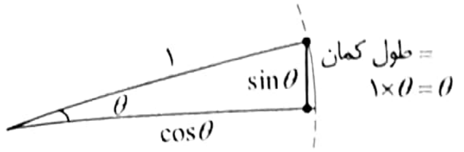
دقت کنید که در حدگیری به‌هنگام رسیدن از ΔV به dV و از Δx به dx، جمله‌های شامل $(\Delta x)^۲$ و $(\Delta x)^۳$ حذف می‌شوند و معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$dV = \frac{\pi r^۲}{h^۲}x^۲dx$$

با انتگرال‌گیری از رابطهٔ بالا حجم دقیق مخروط معین می‌شود.

تقریب برای زوایای کوچک

هنگام برخورد با زوایای کوچک معمولاً می‌توانیم از تقریب‌های ساده‌کننده استفاده کنیم. مثلث قائم‌الزاویه شکل ۸.۱ را در نظر بگیرید که در آن زاویهٔ θ (برحسب رادیان) نسبتاً کوچک است. اگر اندازهٔ وتر یک باشد، با توجه به شکل



شکل ۸.۱

می‌بینیم که طول قوس $۱\times\theta$ و $\sin\theta$ تقریباً با یکدیگر مساوی‌اند. بنابراین برای زوایای کوچک می‌توانیم بنویسیم

$$\sin\theta \cong \tan\theta \cong \theta \qquad \cos\theta \cong ۱$$

به این شرط که زوایا برحسب رادیان باشند. این تقریب‌ها را می‌توان با استفاده از جمله‌های اول بسط این سه تابع به‌دست آورد. یک مثال از این تقریب‌ها برای زاویهٔ ۱° عبارت‌است از

$$۱^\circ = ۰٫۰۱۷۴۵۳\,\text{rad} \qquad \tan ۱^\circ = ۰٫۰۱۷۴۵۵$$

$$\sin ۱^\circ = ۰٫۰۱۷۴۵۲ \qquad \cos ۱^\circ = ۰٫۹۹۹۸۴۸$$

اگر تقریب بهتری لازم باشد، می‌توان به‌جای جملهٔ اول، از دو جملهٔ اول بسط این توابع استفاده نمود

$$\sin\theta \cong \theta - \frac{\theta^۳}{۶}, \quad \tan\theta \cong \theta + \frac{\theta^۳}{۳}, \quad \cos\theta \cong ۱ - \frac{\theta^۲}{۲}$$

که در این روابط زوایا باید برحسب رادیان باشند (برای تبدیل درجه به رادیان، زاویه برحسب درجه را در $\pi/۱۸۰^\circ$ ضرب کنید). مقدار خطا در جایگزین کردن سینوس زاویهٔ ۱ درجه (۰٫۰۱۷۵rad) به‌وسیلهٔ مقدار زاویهٔ آن فقط ۰٫۰۰۵٪ است. برای زاویهٔ ۵ درجه (۰٫۰۸۷۳rad) این مقدار خطا ۰٫۱۳٪، و برای زاویهٔ ۱۰ درجه (۰٫۱۷۴۵rad) این مقدار خطا تنها برابر ۰٫۵۱٪ خواهد بود. با نزدیک شدن زاویهٔ θ به‌سمت صفر، روابط زیر در شرایط حدی برقرار خواهد شد

$$\sin d\theta = \tan d\theta = d\theta \qquad \cos d\theta = ۱$$

که زاویهٔ دیفرانسیل $d\theta$ باید برحسب رادیان باشد.

۸.۱ حل مسائل استاتیک

هدف از مطالعهٔ استاتیک به‌دست آوردن یک توصیف کمی از نیروهای وارد بر سازه‌های مهندسی در حالت تعادل است. ریاضیات روابط بین کمیت‌های گوناگون را بیان کرده و امکان پیش‌بینی نتایج از این روابط را فراهم می‌کند. مسائل استاتیک از دو دیدگاه بررسی می‌شوند. دیدگاه اول وضعیت فیزیکی موجود و دیدگاه دوم روابط ریاضی مربوطه را مدنظر قرار می‌دهد. در تحلیل تمام مسائل لازم است ارتباط بین این دو دیدگاه حفظ شود. یکی از مهم‌ترین اهداف دانشجو این است که بتواند به‌سادگی این ارتباط را برقرار کند.

ارائهٔ فرض‌های مناسب

باید بدانیم که فرمول‌بندی یک مسئلهٔ فیزیکی، نشان‌دهندهٔ یک توصیف ایده‌آل، یا یک *مدل* است که تنها به‌طور تقریبی با مسئلهٔ فیزیکی واقعی وفق دارد اما هرگز به‌طور کامل با آن منطبق نمی‌شود. هنگامی که برای یک مسئلهٔ مهندسی یک مدل ریاضی ایده‌آل ارائه می‌کنیم، همیشه با تقریب‌هایی در مدل‌هایمان مواجه خواهیم بود. بعضی از این تقریب‌ها ریاضی بوده و بعضی فیزیکی می‌باشند.

به‌عنوان مثال، اغلب لازم است که از فواصل، زوایا و یا نیروهای کوچک در مقابل فواصل، زوایا و نیروهای بزرگتر صرف‌نظر کنیم. نیرویی که در واقع به‌صورت گسترده بر روی سطح کوچکی از یک جسم وارد می‌شود، می‌تواند یک نیروی متمرکز فرض شود. درصورتی‌که ابعاد محدودهٔ اثر ما در مقابل ابعاد جسم کوچک باشد، نیرو را به‌عنوان یک نیروی متمرکز فرض می‌کنیم.

همچنین ممکن است از وزن یک کابل، درصورتی‌که نیروی کشش آن بسیار بیشتر از وزن آن باشد صرف‌نظر کنیم. با این وجود اگر بخواهیم خیز یا

شکم‌دادگی یک کابل معلق را تحت تأثیر نیروی وزن آن محاسبه کنیم، نمی‌توانیم از وزن کابل صرف‌نظر کنیم.

از اینرو فرضیات ما بستگی به اطلاعات موردنظر و دقت مطلوب دارد. لازم است که همیشه مراقب فرض‌هایی که در فرمول‌بندی به‌کار می‌بریم باشیم. توانایی درک و استفاده از فرضیات درست مراحل مختلف فرمول‌بندی و حل مسائل مهندسی، یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های یک مهندس موفق است. یکی از بزرگ‌ترین اهداف این کتاب، ایجاد فرصت‌های متعدد برای به‌دست آوردن این توانایی، به‌وسیلهٔ فرمول‌بندی و تحلیل مسائل مربوط به استاتیک می‌باشد.

استفاده از نمودارها

روش ترسیمی، ابزار تحلیلی مهمی است که از سه جنبه به ما کمک می‌کند.

۱. با استفاده از روش ترسیمی می‌توان یک سیستم فیزیکی را بر روی کاغذ به‌وسیلهٔ یک نمودار یا یک طرح نشان داد. نمایش هندسی یک مسئله به ما کمک می‌کند تا بتوانیم تعبیر فیزیکی آن را متوجه شویم؛ خصوصاً وقتی‌که احتیاج به تحلیل مسائل سه‌بعدی داریم.

۲. بیشتر اوقات به‌دست آوردن حل از روش ترسیمی به‌جای روش ریاضی آسان‌تر است. راه‌حل‌های ترسیمی هم یک راه عملی برای به‌دست آوردن جواب و هم کمکی برای فهم بهتر ما از فرایندها هستند. از آنجا که راه‌حل ترسیمی هم وضعیت فیزیکی و هم روابط ریاضی را نشان می‌دهد، می‌تواند به ما کمک کند که بین این دو دیدگاه به‌راحتی جابه‌جا شویم.

۳. جدول‌ها و نمودارها می‌توانند ابزار مناسبی برای نمایش نتایج به‌صورت قابل فهم باشند.

مفاهیم کلیدی

فرمول‌بندی و حل آنها

در استاتیک، همانند بقیهٔ مسائل مهندسی، لازم است که از روش‌های دقیق و منطقی برای فرمول‌بندی مسائل و به‌دست آوردن راه‌حلی برای آنها، استفاده کنیم. برای فرمول‌بندی و به‌دست آوردن راه‌حل هر مسئله به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

فرمول‌بندی مسئله:

الف) اطلاعات داده شده را تعیین کنید.

ب) نتایج مورد نیاز را تعیین کنید.

ج) فرضیات و تقریب‌های خود را تعیین کنید.

به‌دست آوردن راه‌حل:

الف) هر نموداری که برای فهم بهتر مسئله نیاز دارید را رسم کنید.

ب) اصول حاکم بر حل خودتان را تعیین کنید.

ج) محاسبات خود را انجام دهید.

د) مطمئن شوید که محاسبات شما با دقت اطلاعات داده شده سازگاری دارد.

هـ) مطمئن شوید که از یکاهای سازگار با یکدیگر در محاسبات خود استفاده کرده‌اید.

و) مطمئن شوید که جواب‌های شما از نظر مقدار، جهت، منطق و ... قابل قبول می‌باشند.

ز) نتایج را رسم کنید.

تمیز نوشتن و رعایت نظم در نوشتن حل مسئله به فرایند درک آن کمک می‌کند و به دیگران اجازه می‌دهد تا راه‌حل شما را متوجه شوند. رعایت نظم به شما کمک می‌کند تا قابلیت فرمول‌بندی و تحلیل شما در مسائل پیشرفت کند. مسائلی که در نگاه اول پیچیده به‌نظر می‌آیند به‌وسیلهٔ دید منطقی و رعایت نظم به مسائلی ساده تبدیل می‌شوند.

نمودار جسم آزاد

علم استاتیک بر پایهٔ چند مفهوم کلی بنا شده و عموماً شامل کاربرد این روابط بنیادی در حالت‌های گوناگون است. در این زمینه روش تحلیل بسیار مهم است. در حل یک مسئله، ضروری است که قوانین حاکم با دقت در نظر گرفته شده و این قوانین به‌درستی و با دقت استفاده شوند. در وارد کردن اصول مکانیک برای تحلیل نیروهای وارد بر یک جسم، لازم است جسم موردنظر را از سایر اجسام مجزا کنیم تا بتوانیم تمام نیروهای وارد بر انرژی درونی جسم را به‌دقت و به درستی در نظر بگیریم. این جداسازی هم باید به‌صورت ذهنی صورت گیرد و هم بر روی کاغذ نشان داده شود. به نمودار یک جسم مجزا که *تمامی* نیروهای خارجی وارد بر آن را نشان می‌دهد، *نمودار جسم آزاد* می‌گویند.

استفاده از نمودار جسم آزاد کلید فهم مکانیک است. دلیل آن این است که مجزا کردن یک جسم، ابزاری است که علت و معلول را از یکدیگر جداکرده و به‌وسیلهٔ آن توجه ما به استفاده‌های واقعی از اصول مکانیک جلب می‌شود. تکنیک کشیدن نمودار جسم آزاد در فصل سوم بررسی شده است.

مقادیر عددی و نمادها

در به‌کار بردن قوانین استاتیک، ممکن است از مقادیر عددی برای نشان دادن مقدارها استفاده کنیم، و یا ممکن است از نمادهای جبری استفاده نموده و جواب را به‌صورت یک فرمول به‌دست آوریم. هنگامی‌که از این مقادیر عددی استفاده می‌شود، اندازهٔ هر کمیت با یکای مربوط به آن در هر مرحله از حل مسئله معلوم است. این پیامد، هنگامی‌که نیاز به دانستن اندازهٔ هر عبارت داریم برای ما مفید است. البته راه‌حل نمادی نیز دارای برتری‌هایی نسبت به راه‌حل عددی می‌باشد. اول آنکه استفاده از نمادها به ما کمک می‌کنند تا ارتباط بین شرایط فیزیکی و تعاریف ریاضی مربوط به آن را بهتر متوجه شویم. با استفاده از راه‌حل نمادی می‌توانیم مکرراً برای مقادیر اولیهٔ متفاوت، چه از نظر مقدار و چه از نظر یکا، جواب‌های یک نوع مسئله را پیدا کنیم. سوم آنکه راه‌حل نمادی به ما این اجازه را می‌دهد که در هر مرحله، معادلاتمان را یک‌بار از نظر ابعادی تحلیل کنیم، که البته مقادیر عددی این اجازه را به ما نمی‌دهند. در هر عبارت که شرایط فیزیکی را نشان می‌دهد، لازم است که ابعاد تمامی جمله‌ها در دو طرف معادله، با یکدیگر یکی باشند. به این خصوصیت *همگنی ابعادی* می‌گویند.

لذا به‌طورکلی داشتن قابلیت استفاده از هر دو روش عددی و نمادین برای دانشجویان ضروری است.

روش‌های حل

مسائل استاتیک را می‌توان از یک یا چند روش حل کرد:

۱. **راه‌حل‌های ریاضی. اغلب مسائل را می‌توان با استفاده از نمادهای جبری یا مقادیر عددی، به‌طور دستی حل کرد. اکثر مسائل را می‌توانیم از این راه حل کنیم.**

۲. **راه‌حل ترسیمی. بعضی مسائل خاص را می‌توان از این روش به‌دست آورد.**

۳. **حل مسائل به‌کمک کامپیوتر. هنگامی‌که نیاز به حل تعداد زیادی معادله، یا نیاز به بررسی تغییرات یک پارامتر وجود دارد، و یا زمانی که یک معادلهٔ پیچیده باید حل شود؛ این روش بسیار مفید است.**

بسیاری از مسائل را می‌توان از طریق دو یا بیشتر این روش‌ها حل نمود. راه‌حل استفاده‌شده تاحدودی به سلیقهٔ مهندس و نوع مسئله بستگی دارد. توانایی انتخاب روش مناسب مهم‌ترین پیامد کسب تجربه در حل مسائل است. در این کتاب تعدادی مسئله وجود دارد که برای حل آنها باید از کامپیوتر استفاده کرد. این مسائل در پایان مسائل دوره‌ای آمده است و طوری طراحی شده‌اند که حل آنها با کامپیوتر دارای مزیت چشم‌گیری است.

Scanned by CamScanner

۹.۱ مروری بر فصل

در این فصل به معرفی مفاهیم، معانی و یکاهای استفاده شده در استاتیک پرداختیم و نمایی از فرایند فرمول‌بندی و حل مسائل را در استاتیک ارائه نمودیم. حال که این فصل به پایان رسیده باید بتوانید کارهای زیر را انجام دهید:

۱. بردارها را به‌صورت بردارهای یکه و مؤلفه‌های عمود برهم بیان کنید و بتوانید جمع و تفریق برداری را بر روی آنها اعمال نمایید.

۲. قوانین حرکت نیوتن را بیان کنید.

۳. در سیستم SI و .U.S با دقت لازم، محاسبات خود را انجام دهید.

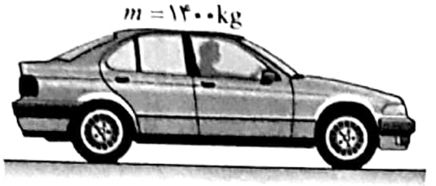
۴. قوانین جاذبه را بیان کرده و وزن یک جسم را محاسبه کنید.

۵. عبارت‌های دیفرانسیلی را ساده کرده و زوایای کوچک را تقریب بزنید.

۶. اصول استفاده شده در فرمول‌بندی و حل مسائل استاتیک را بیان کنید.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۱
وزن یک اتومبیل را که جرم آن برابر ۱۴۰۰kg است برحسب نیوتن به‌دست آورید. سپس جرم اتومبیل را به واحد اسلاگ تبدیل کرده و وزن آن را برحسب پوند به‌دست آورید.



حل: از رابطهٔ (۳.۱) داریم

$$W = mg = ۱۴۰۰(۹/۸۱) = ۱۳۷۳۰\text{N}$$ ❶ ج.

با توجه به جدول تبدیل ضرایب در صفحات انتهایی کتاب، می‌توانیم ببینیم که ۱ اسلاگ برابر ۱۴/۵۹۴kg می‌باشد. جرم ماشین به اسلاگ برابر است با

$$m = ۱۴۰۰\text{kg}\left[\frac{۱\text{slug}}{۱۴/۵۹۴\text{kg}}\right] = ۹۵/۹\text{slug}$$ ❷ ج.

در پایان، وزن آن به پوند برابر است با

$$W = mg = (۹۵/۹)(۳۲/۲) = ۳۰۹۰\text{lb}$$

یک راه دیگر برای رسیدن به جواب آخر این است که kg را به lbm تبدیل نماییم. بار دیگر با توجه به جدول صفحات انتهایی کتاب، خواهیم داشت

$$m = ۱۴۰۰\text{kg}\left[\frac{۱\text{lbm}}{۰/۴۵۳۵۹\text{kg}}\right] = ۳۰۹۰\text{lbm}$$ ❸ ج.

همان‌طورکه در بالا محاسبه شده، وزن برای جرم ۳۰۹۰lbm برابر ۳۰۹۰lb است. یادآور می‌شویم که ۱lbm مقدار جرمی است که در حالت استاندارد وزنی برابر ۱lb نیرو دارد. ما در این کتاب به‌ندرت به یکای جرم lbm در سیستم .U.S اشاره خواهیم کرد. اگر به‌جای دو یکا برای جرم فقط از یکای اسلاگ استفاده کنیم، کارمان به‌خصوص در دینامیک بسیار ساده‌تر و بهتر خواهد شد.

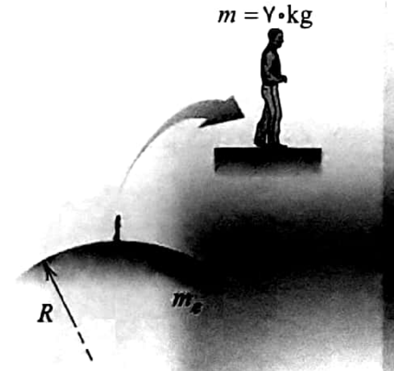
❸ دقت کنید که ما داریم از یک نتیجهٔ از پیش به‌دست آمده (۹۵/۹slug) استفاده می‌کنیم. باید مطمئن شویم هنگامی‌که یک عدد محاسبه‌شده در انجام محاسبات بعدی مورد نیاز است، مقدار آن در ماشین‌حساب نگه‌داشته شود تا وقتی که به آن نیاز داشتیم از آن استفاده کنیم (...۹۵/۹۲۹۸۳۴). نباید صرفاً عدد ۹۵/۹ را در ماشین‌حساب وارد کنیم و آن را در ۳۲/۲ ضرب کنیم. این عمل باعث از بین رفتن دقت عددی خواهد شد. بعضی از افراد ترجیح می‌دهند که به‌هنگام انجام این کار در حاشیهٔ راست صفحه و مستقیماً در کنار آن عدد، علامت کوچکی برای نتایج ذخیره‌شده قرار دهند.

راهنمایی‌های مفید

❶ ماشین حساب ما جواب ۱۳۷۳۴N را نشان می‌دهد. با استفاده از قوانین ارقام معنادار مطرح‌شده در این کتاب، جواب نهایی را به ۴ رقم معنادار یا ۱۳۷۳۰N گرد می‌کنیم. اگر عدد ما با هر عددی جز ۱ آغاز شده بود، باید به‌جای ۴ به ۳ رقم معنادار گرد می‌کردیم.

❷ در تبدیل یکاها بهتر است عدد را در $\frac{۱\text{slug}}{۱۴/۵۹۴\text{kg}}$ ضرب کنیم که مقدار آن معادل یک است. دقت کنید که پس از ضرب این کسر و ساده‌شدن یکاها با یکدیگر، یکای موردنظر شما باقی می‌ماند. همان‌طورکه در این مثال می‌بینید، یکاهای کیلوگرم با یکدیگر ساده شده و یکای slug که موردنظر ماست باقی می‌ماند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۱
با استفاده از قانون جاذبهٔ عمومی نیوتن، وزن یک شخص ۷۰ کیلوگرمی را که بر روی سطح زمین ایستاده محاسبه کنید. سپس محاسبات را با استفاده از $W = mg$ تکرار نموده و جواب‌ها را با یکدیگر مقایسه کنید. در صورت نیاز از جدول د.۲ در پیوست‌ها استفاده نمایید.



حل: دو نتیجه عبارت‌اند از

$$W = \frac{Gm_e m}{R^۲} = \frac{(۶/۶۷۳\times۱۰^{-۱۱})(۵/۹۷۶\times۱۰^{۲۴})(۷۰)}{[۶۳۷۱\times۱۰^۳]^۲} = ۶۸۸\text{N}$$ ❶ ج.

$$W = mg = ۷۰(۹/۸۱) = ۶۸۷\text{N}$$ ج.

این اختلاف در جواب‌ها به‌دلیل آن است که قانون جاذبهٔ عمومی نیوتن، چرخش زمین را در نظر نمی‌گیرد. از طرفی مقدار g که در معادلهٔ دوم استفاده شده است، چرخش زمین را در نظر می‌گیرد. دقت کنید که اگر در معادلهٔ دوم از مقدار دقیق $g = ۹/۸۰۶۶۵\ \text{m/s}^۲$ استفاده می‌کردیم (که در آن هم چرخش زمین را در نظر گرفته است)، این اختلاف بیشتر می‌شد (جواب ۶۸۶N به‌دست می‌آمد).

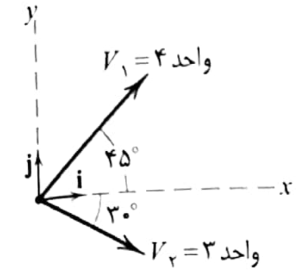
راهنمایی مفید

❶ فاصلهٔ مؤثر بین مرکز جرم دو جسم موردنظر برابر شعاع زمین است.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۱

برای بردارهای $\mathbf{V}_۱$ و $\mathbf{V}_۲$، که در شکل نشان داده شده‌اند: (الف) مقدار بردار S که برابر جمع برداری آنهاست را حساب کنید. (ب) زاویهٔ α بین $\mathbf{S}$ و جهت مثبت محور x را محاسبه کنید. (ج) بردار $\mathbf{S}$ را به‌صورت بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ نوشته و سپس بردار یکهٔ $\mathbf{n}$ را در راستای بردار مجموع $\mathbf{S}$ به‌دست آورید. (د) تفاضل برداری $\mathbf{D}=\mathbf{V}_۱-\mathbf{V}_۲$ را به‌دست آورید.



حل: (الف) برای جمع دو بردار $\mathbf{V}_۱$ و $\mathbf{V}_۲$ متوازی‌الاضلاع را همان‌طورکه در شکل (الف) نشان داده شده تشکیل می‌دهیم. با استفاده از قانون کسینوس‌ها داریم

$$S^۲=۳^۲+۴^۲-۲(۳)(۴)\cos ۱۰۵^\circ$$
$$S=۵/۵۹ \text{ واحد}$$ ج.

❶ (ب) با استفاده از قانون سینوس‌ها برای مثلث پایینی داریم

$$\frac{\sin ۱۰۵^\circ}{۵/۵۹}=\frac{\sin(\alpha+۳۰^\circ)}{۴}$$
$$\sin(\alpha+۳۰^\circ)=۰/۶۹۲$$
$$(\alpha+۳۰^\circ)=۴۳/۸^\circ$$ ج.
$$\alpha=۱۳/۷۶^\circ$$

(ج) با دانستن S و α، می‌توانیم بردار $\mathbf{S}$ را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{S}=S[\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\sin\alpha]$$
$$=۵/۵۹[\mathbf{i}\cos ۱۳/۷۶^\circ+\mathbf{j}\sin ۱۳/۷۶^\circ]$$
$$=۵/۴۳\mathbf{i}+۱/۳۲۸\mathbf{j} \text{ واحد}$$ ج.

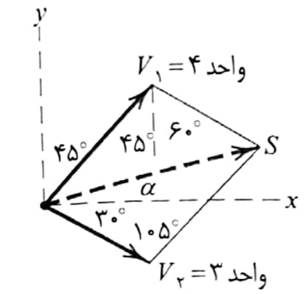
در نتیجه

❷
$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{S}}{S}=\frac{۵/۴۳\mathbf{i}+۱/۳۲۸\mathbf{j}}{۵/۵۹}$$
$$=۰/۹۷۱\mathbf{i}+۰/۲۳۸\mathbf{j}$$ ج.

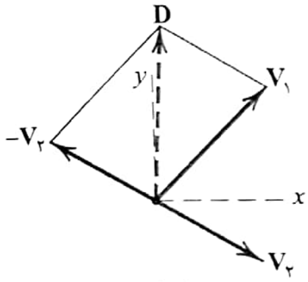
(د) تفاضل برداری $\mathbf{D}$ به‌صورت زیر است

$$\mathbf{D}=\mathbf{V}_۱-\mathbf{V}_۲$$
$$=۴(\mathbf{i}\cos ۴۵^\circ+\mathbf{j}\sin ۴۵^\circ)-۳(\mathbf{i}\cos ۳۰^\circ-\mathbf{j}\sin ۳۰^\circ)$$
$$=۰/۲۳۰\mathbf{i}+۴/۳۳\mathbf{j} \text{ واحد}$$ ج.

بردار $\mathbf{D}$ نشان داده شده در شکل (ب) همان $\mathbf{D}=\mathbf{V}_۱+(-\mathbf{V}_۲)$ است.



(الف)



(ب)

راهنمایی‌های مفید

❶ شما در مکانیک به‌دفعات با قوانین سینوس‌ها و کسینوس‌ها سروکار خواهید داشت. برای مرور این قوانین به بند ج.۶ از پیوست ج مراجعه کنید.

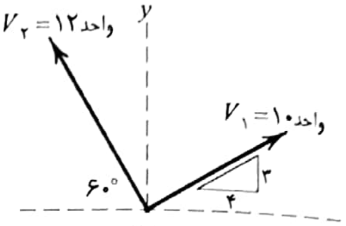
❷ بردار یکه، از تقسیم یک بردار بر مقدارش به‌دست می‌آید. دقت کنید که بردار یکه، بدون بعد است.

Scanned by CamScanner

مسائل

۱.۱ زاویهٔ ساخته‌شده بین بردار $\mathbf{V} = ۴۰\mathbf{i} - ۳۰\mathbf{j}$ در جهت مثبت محورهای x و y را به‌دست آورید. بردار یکهٔ $\mathbf{n}$ در راستای بردار $\mathbf{V}$ را بنویسید.

۲.۱ اندازهٔ جمع برداری $\mathbf{V} = \mathbf{V}_۱ + \mathbf{V}_۲$ و زاویهٔ θ_x، که همان زاویه‌ای است که با جهت مثبت محور xها می‌سازد، را به‌دست آورید. این کار را با هر دو روش ترسیمی و جبری انجام دهید.



شکل م ۲.۱

۳.۱ برای بردارهای مفروض $\mathbf{V}_۱$ و $\mathbf{V}_۲$ در مسئلهٔ (۲.۱)، اندازهٔ تفاضل برداری $\mathbf{V}' = \mathbf{V}_۲ - \mathbf{V}_۱$ و زاویهٔ θ_x، که همان زاویه‌ای است که $\mathbf{V}'$ با جهت مثبت محور xها می‌سازد، را به‌دست آورید. این کار را با هر دو روش ترسیمی و جبری انجام دهید.

۴.۱ نیرویی با بردار $\mathbf{F} = ۱۲۰\mathbf{i} - ۱۶۰\mathbf{j} + ۸۰\mathbf{k}\,\text{lb}$ نشان داده می‌شود. زوایای تشکیل‌شده به‌وسیلهٔ $\mathbf{F}$ را با محورهای مثبت x y و z به‌دست آورید.

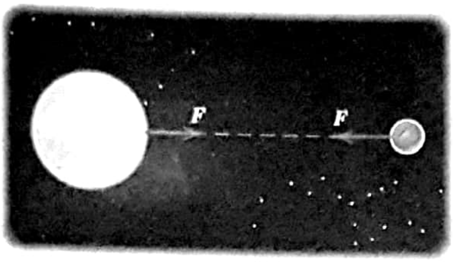
۵.۱ جرم یک اتومبیل ۳۰۰۰ پوندی به اسلاگ و کیلوگرم چقدر است؟

۶.۱ با استفاده از قانون جاذبه، وزن W (نیروی جاذبهٔ واردشده از زمین) یک مرد ۹۰ کیلوگرمی در سفینه‌ای که به‌فاصلهٔ ۲۵۰km از سطح زمین در حال چرخش به دور زمین است را محاسبه کنید. با استفاده از قانون جاذبه، وزن W (نیروی وارد شده از زمین) متعلق به این مرد را محاسبه کنید. W را هم برحسب پوند و هم برحسب نیوتن نشان دهید.

۷.۱ وزن خانمی ۱۳۰ پوند است. وزن او را به نیوتن به‌دست آورید. سپس جرم او را برحسب اسلاگ و کیلوگرم محاسبه نمایید. در آخر وزن خودتان را برحسب نیوتن به‌دست آورید.

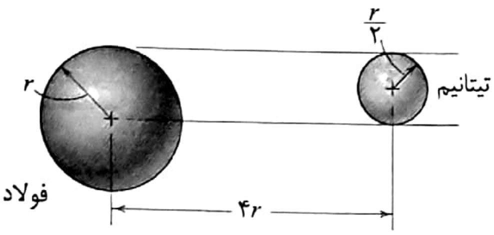
۸.۱ دو کمیت بدون بعد با مقادیر $A = ۶/۶۷$ و $B = ۱/۷۲۶$ را در نظر بگیرید. با استفاده از قوانین ارقام معنادار بیان‌شده در این فصل، چهار کمیت $(A + B)$، $(A - B)$، (AB) و (A/B) را محاسبه کنید.

۹.۱ مقدار نیروی وارد بر ماه از سوی زمین را محاسبه کنید. محاسبات را ابتدا به نیوتن انجام دهید و سپس پاسخ خود را به پوند تبدیل نمایید. برای مقادیر فیزیکی لازم به جدول د.۲ در پیوست د مراجعه کنید.



شکل م ۹.۱

۱۰.۱ دو کره از جنس فولاد و تیتانیم را به شکل زیر در نظر بگیرید. اگر $r = ۵۰\text{mm}$ باشد، مقدار نیروی جاذبه‌ای را که این دو به هم وارد می‌کنند، محاسبه کنید.



شکل م ۱۰.۱

۱۱.۱ مقدار درصد خطای n را برای وقتی که سینوس و تانژانت یک زاویه، با خود زاویه به رادیان جایگزین می‌شود، برای مقادیر °۵، °۱۰ و °۲۰ محاسبه کنید. تفاوت میان تانژانت و سینوس محاسبه شده را توضیح دهید.

Scanned by CamScanner

۲

سیستم‌های نیرو

۱.۲ مقدمه
۲.۲ نیرو
قسمت (الف): سیستم‌های دوبعدی نیرو
۳.۲ مؤلفه‌های عمود برهم
۴.۲ گشتاور
۵.۲ کوپل
۶.۲ برایندها
قسمت (ب): سیستم‌های سه‌بعدی نیرو
۷.۲ مؤلفه‌های عمود برهم
۸.۲ گشتاور و کوپل
۹.۲ برایندها
۱۰.۲ مروری بر فصل

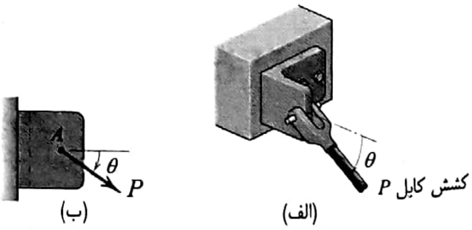
۱.۲ مقدمه

در این فصل و فصل‌های آینده، تأثیر نیروها بر روی سازه‌های مهندسی و سازوکارهای مختلف را بررسی خواهیم کرد. مطالب آموخته شده در این فصل در مطالعه‌ی استاتیک و همچنین موضوعات دیگر مانند آنالیز تنش‌ها، طراحی سازه‌ها و ماشین‌ها، و جریان سیالات به شما کمک خواهند کرد. این فصل پایه‌ای برای درک نه‌تنها استاتیک، بلکه تمامی موضوعات مکانیک بنا خواهد کرد و شما لازم است آن را به‌خوبی فراگیرید.

۲.۲ نیرو

قبل از توضیح در مورد سیستم‌های نیرو، لازم است در مورد ویژگی‌های یک نیرو به‌طور کامل بحث شود. در فصل یک، نیرو به‌عنوان تأثیر یک جسم بر روی یک جسم دیگر تعریف شد. در دینامیک خواهیم دید که نیرو به‌عنوان عملی است که باعث ایجاد شتاب در یک جسم می‌شود. نیرو یک *کمیت برداری* است، به این دلیل که اثر آن علاوه بر مقدار، به جهت آن هم بستگی دارد. لذا نیروها را می‌توان براساس قانون متوازی‌الاضلاع، با یکدیگر ترکیب نمود.

تأثیر کشش کابل بر روی دیوارکوب در شکل ۱.۲ (الف) از نمای جانبی در شکل ۱.۲ (ب)، به‌صورت بردار نیروی **P** با اندازهٔ P نشان داده شده است. تأثیر این عمل بر روی دیوارکوب بستگی به P، زاویهٔ θ و محل اعمال نیرو یعنی A دارد. تغییر هریک از این سه مؤلفه، اثر نیرو بر روی *دیوارکوب* را تغییر خواهد داد. مثلاً نیروی وارد بر یکی از پیچ‌های نگه‌دارندهٔ دیوارکوب، و یا نیروهای داخلی و تغییر شکل نیروهای داخلی و تغییر شکل در مواد تشکیل‌دهندهٔ دیوارکوب، تغییر خواهند یافت. لذا خصوصیات کامل یک نیرو را باید با *اندازه*، *جهت* و *نقطهٔ اثر* آن توصیف کرد. در نتیجه ما باید بردار نیرو را به‌عنوان یک بردار ثابت در نظر بگیریم.



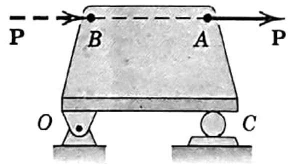
شکل ۱.۲

اثرات داخلی و خارجی

اثر یک نیرو بر روی جسم را می‌توان به دو دسته تفکیک کرد: *خارجی* و *داخلی*. برای دیوارکوب شکل ۱.۲، اثرات خارجی نیروی **P** بر روی دیوارکوب عبارت است از نیروهای واکنش (نشان‌داده نشده) که به‌وسیلهٔ تکیه‌گاه و پیچ‌ها بر دیوارکوب به‌خاطر وجود نیروی **P** وارد می‌شوند. نیروهای خارجی وارد بر یک جسم می‌توانند نیروهای *واردشونده* و یا نیروهای *واکنش* باشند. اثرات داخلی حاصل از **P** عبارت‌اند از نیروهای داخلی و تغییرشکل‌هایی که در سرتاسر مواد تشکیل‌دهندهٔ دیوارکوب پخش می‌شوند. روابط میان نیروهای داخلی و تغییرشکل‌های داخلی بستگی به جنس مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ جسم داشته و بررسی آنها مربوط به مباحث مقاومت مواد، کشسانی (الاستیسیته) و موسسانی (پلاستیسیته) می‌باشد.

اصل انتقال‌پذیری

هنگامی که با مکانیک یک جسم صلب سروکار داریم، از تغییرشکل‌های جسم صرف‌نظر کرده و فقط به اثرات خارجی نیروهای اعمال‌شده به‌وسیلهٔ نیروهای خارجی می‌پردازیم. در این موارد، تجربه به ما نشان می‌دهد که لازم نیست اثر یک نیروی وارد شده را به یک نقطه محدود کنیم. به‌عنوان مثال، هنگامی که نیروی **P** بر یک صفحهٔ صلب (شکل ۲.۲) وارد می‌شود، می‌توان آن را به هر نقطه‌ای مانند A یا B یا هر نقطهٔ دیگری در راستای خط اثر آن وارد کرد و این کار در اثرات خارجی نیروی **P** بر روی دیوارکوب تغییری ایجاد نمی‌کند. در این مورد، اثرات خارجی نیروهایی هستند که به‌وسیلهٔ تکیه‌گاه یاتاقانی در O و تکیه‌گاه غلتکی در C بر صفحه وارد می‌شوند.



شکل ۲.۲

Scanned by CamScanner

درنتیجه *اصل انتقال‌پذیری* را می‌توان به این صورت بیان کرد: یک نیرو را می‌توان به هر نقطه‌ای در راستای خط اثر آن اعمال کرد بدون آن‌که تغییری در اثر نیروی خارجی واردشده بر جسم *صلب* ایجاد شود. لذا هنگامی‌که فقط به اثرات خارجی حاصل از یک نیروی اعمال شده علاقه‌مندیم، می‌توانیم نیرو را به‌عنوان یک *بردار لغزنده* در نظر بگیریم و درنتیجه برای توصیف نیرو لازم است که فقط *اندازه*، *جهت* و *راستای* اثر آن را بیان کنیم و نیازی به بیان *نقطه‌اثر* آن نخواهیم داشت. با توجه به این‌که این کتاب عملاً فقط با مکانیک اجسام صلب سروکار دارد، اکثر نیروها را به‌عنوان بردارهایی لغزنده در نظر می‌گیریم.

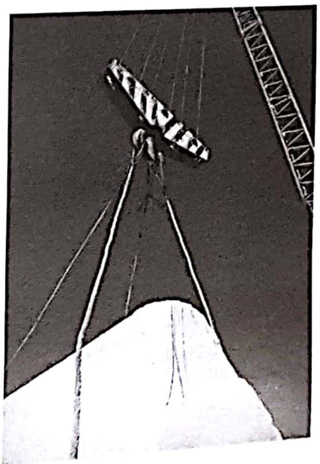
طبقه‌بندی نیروها

نیروها به دو نوع نیروهای حجمی و *تماسی* دسته‌بندی می‌شوند. نیروی تماسی، نیرویی است که با تماس مستقیم فیزیکی ایجاد می‌شود؛ به‌طور مثال نیرویی که به‌وسیلهٔ یک سطح تکیه‌گاه بر یک جسم وارد می‌شود. از سوی دیگر، نیروی حجمی نیرویی است که با قرارگرفتن جسم در میدان‌های نیرویی مثل گرانشی، الکتریکی و یا میدان مغناطیسی، به آن وارد می‌شود. یک نمونه از نیروی حجمی وزن خود شماست.

همچنین نیروها را می‌توان به دو دستهٔ متمرکز و گسترده نیز تقسیم کرد. هر نیروی تماسی در اصل بر یک سطح متناهی اعمال می‌شود و لذا یک نیروی گسترده است. با این حال اگر ابعاد سطح اثر نیرو در مقایسه با ابعاد جسم بسیارکوچک باشند، می‌توانیم آن نیرو را با دقت قابل قبولی به‌عنوان یک نیروی متمرکز در یک نقطه در نظر بگیریم. نیرو می‌تواند بر روی یک *سطح*، مثلاً در تماس مکانیکی؛ بر روی یک حجم، مثل اثر وزن بر روی جسم؛ و یا بر روی یک *خط* مانند وزن یک کابل آویزان؛ گسترده باشد.

وزن یک جسم در حقیقت نیروی جاذبهٔ گرانشی‌ای است که بر روی حجم آن پخش شده که می‌توان آن را به‌صورت نیروی متمرکز وارد بر مرکز گرانی آن جسم در نظر گرفت. محل مرکز گرانی یک جسم، درصورتی‌که جسم متقارن باشد، به‌راحتی قابل پیداکردن است. درصورتی‌که محل آن واضح نباشد، برای پیداکردن آن محاسباتی جدا لازم است که در فصل ۵ توضیح داده خواهد شد.

برای اندازه‌گیری نیرو می‌توانیم انرژی درونی را با استفاده از یک ترازو با نیروهای مشخص دیگر مقایسه کنیم و یا می‌توانیم از جابه‌جایی مقیاس‌بندی‌شدهٔ یک جسم کشسان استفاده نماییم. تمامی مقایسه‌ها و مقیاس‌بندی‌ها، مقیاس استاندارد خود را دارند. همان‌طورکه در بخش ۵.۱ توضیح داده شد، یکای استاندارد نیرو در سیستم SI نیوتن (N) بوده و در سیستم U.S. پوند (lb) می‌باشد.



نیروهای مربوط به تجهیزات بالابر را باید به‌دقت شناسایی، دسته‌بندی، و تحلیل کرد تا یک محیط کار امن و مناسب فراهم شود.

کنش و واکنش

طبق قانون سوم نیوتن، *اثر* یک نیرو همیشه با یک عکس‌العمل *مساوی و خلاف* جهت همراه است. لازم است که در یک زوج‌نیرو میان کنش و واکنش تمایز قائل شویم. برای این کار، باید ابتدا جسم موردنظر را از بقیه جداکرده و نیروهای *وارد بر* جسم (نه نیروهای واردشده *به‌وسیلهٔ* جسم) را تعیین کنیم. در تعیین نیروی موردنظر به‌سادگی می‌توان اشتباه نمود لذا لازم است که به‌دقت میان کنش و واکنش، تمایز قائل شویم.

نیروهای همرس

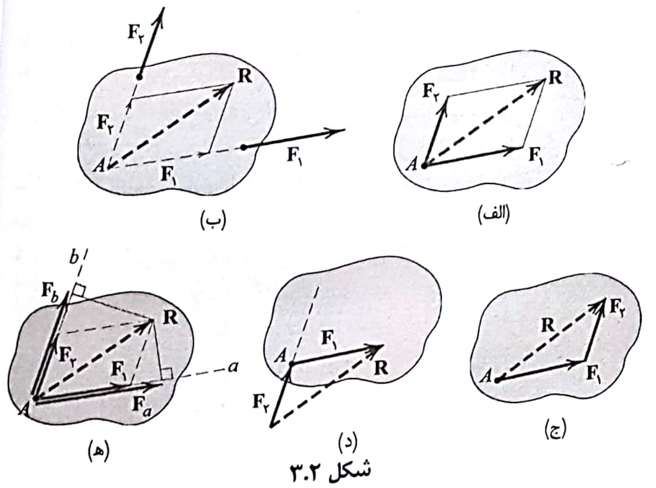
هنگامی‌که خط اثر دو یا چند نیرو در یک نقطه با یکدیگر همرس باشند، به آنها *نیروهای همرس* می‌گویند. نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ نشان داده شده در شکل ۳.۲ (الف)، دارای یک نقطه‌اثر مشترک بوده و در نقطهٔ A همرس می‌باشند. لذا می‌توان آنها را با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع، در صفحهٔ مشترکشان با یکدیگر جمع کرد و یا برایند $\mathbf{R}$ آنها را به‌دست آورد که در شکل ۳.۲ (الف) می‌بینید برایند دو بردار در همان صفحه‌ای قرار دارد که $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ در آن قرار دارند.

دو نیروی همرس را در نظر بگیرید که در همان صفحه قرار دارند اما در دو نقطهٔ متفاوت مانند شکل ۳.۲ (ب) اعمال می‌شوند. همان‌طورکه در شکل ۳.۲ (ب) نشان داده شده، با توجه به اصل انتقال‌پذیری، می‌توان آنها را در راستای خط اثرشان جابه‌جا کرد و بردار مجموع آنها یعنی $\mathbf{R}$ را در نقطهٔ تقاطع A به‌دست آورد. می‌توانیم $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ را با برایند $\mathbf{R}$ جایگزین کرده بدون آنکه تغییری در اثرات خارجی واردشده بر جسم ایجاد شود.

همچنین می‌توانیم از قاعدهٔ مثلث برای به‌دست آوردن $\mathbf{R}$ استفاده نماییم، اما همان‌طورکه در شکل ۳.۲ (ج) نشان داده شده، لازم است خط اثر یکی از نیروها را جابه‌جا کنیم. اگر دو نیرو را مطابق شکل ۳.۲ (د) با یکدیگر جمع کنیم، مقدار و جهت بردار $\mathbf{R}$ را به‌درستی به‌دست خواهیم آورد؛ اما خط اثر درست نیرو را از دست خواهیم داد زیرا $\mathbf{R}$ به‌دست آمده از این راه، از نقطهٔ A عبور نمی‌کند. لذا از چنین ترکیبی باید اجتناب ورزید.

جمع دو بردار در ریاضی را می‌توان به‌صورت یک معادلهٔ برداری نمایش داد

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$



شکل ۳.۲

مؤلفه‌های بردار

علاوه بر ترکیب نیروها برای به‌دست آوردن برایندشان، گاهی اوقات لازم است که یک نیرو را به *مؤلفه‌های برداری* در راستای مورد نیازمان تجزیه کنیم. جمع برداری مؤلفه‌ها باید برابر با بردار اولیه باشد. لذا نیروی $\mathbf{R}$ در شکل ۳.۲ (الف) را

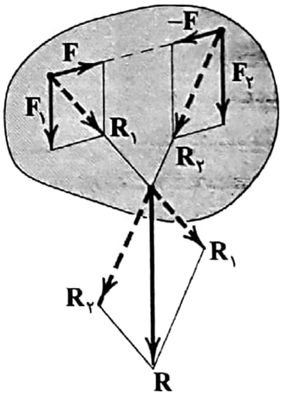
می‌توان به دو مؤلفهٔ برداری $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ در امتدادهای مشخص‌شده جایگزین کرد یا به بیان دیگر، آن را به این مؤلفه‌ها *تجزیه کرد*. این عمل مطابق شکل، با تکمیل متوازی‌الاضلاع برای تعیین اندازهٔ بردارهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ انجام می‌شود.

رابطهٔ بین یک نیرو و مؤلفه‌های برداری آن در راستای محورهای معین را نباید با رابطهٔ بین نیرو و تصویرهای عمودی[1] آن بر روی همان محورها اشتباه گرفت. شکل ۳.۲ (ه) تصویرهای عمودی F_a و F_b از نیروی $\mathbf{R}$ در راستای محورهای a و b را نشان می‌دهد که با مؤلفه‌های برداری $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ از شکل ۳.۲ (الف) موازی‌اند. شکل ۳.۲ (ه) نشان می‌دهد که مؤلفه‌های یک بردار لزوماً با تصویر آن بردار در راستای همان محورها مساوی نیستند. علاوه بر آن جمع برداری F_a و F_b برابر با بردار $\mathbf{R}$ نیست، زیرا برای به‌دست آوردن جمع برداری باید از قانون متوازی‌الاضلاع استفاده شود. مؤلفه‌ها و تصویرهای بردار $\mathbf{R}$ فقط وقتی برابرند که محورهای a و b بر یکدیگر عمود باشند.

شکل خاصی از جمع برداری

برای به‌دست آوردن بردار برایند برای حالتی که نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ مانند شکل ۴.۲ با یکدیگر موازی‌اند، لازم است که از حالت خاصی از جمع برداری استفاده کنیم. برای این کار ابتدا دو بردار نیروی مساوی، خلاف جهت و هم‌راستای $-\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}$ را با اندازهٔ دلخواه به شکل اضافه می‌کنیم که روی هم هیچ اثر خارجی روی جسم ندارند. سپس $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}$ را با یکدیگر جمع کرده و $\mathbf{R}_1$ را به‌دست می‌آوریم و سپس آن‌را با $\mathbf{R}_2$ که حاصل جمع بردارهای $\mathbf{F}_2$ و $-\mathbf{F}$ است، جمع می‌کنیم که نتیجهٔ آن بردار برایند $\mathbf{R}$ می‌شود و این بردار از نظر اندازه، جهت و خط اثر صحیح می‌باشد. این روش همچنین برای ترکیب ترسیمی دو نیرو برای حالت‌هایی که نقطهٔ تقاطع دو بردار در مکانی دورافتاده است، بسیار مفید می‌باشد.

اصولاً بهتر است پیش از فراگیری آنالیز سه‌بعدی سیستم‌های نیرو، توانایی لازم در آنالیز نیروها در دو بعد را به‌دست آوریم. لذا باقی‌ماندهٔ فصل ۲ به دو قسمت تقسیم شده است.



شکل ۴.۲

قسمت (الف): سیستم‌های دوبعدی نیرو

۳.۲ مؤلفه‌های عمود برهم

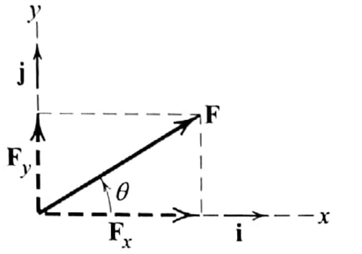
رایج‌ترین تجزیهٔ بردار نیرو در دو بعد، تجزیه به مؤلفه‌های عمودی است. با توجه به قانون متوازی‌الاضلاع نیروی $\mathbf{F}$ در شکل ۵.۲ را می‌توان به‌صورت

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y \qquad (۱.۲)$$

نوشت که در آن $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$ دو مؤلفه‌ی برداری $\mathbf{F}$ در راستای x و y می‌باشند. هریک از این مؤلفه‌ها را می‌توان به‌صورت ضرب یک عدد در بردار یکهٔ آنها نوشت. با توجه به بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ در شکل ۵.۲، $\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i}$ و $\mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j}$ خواهد بود و لذا می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \qquad (۲.۲)$$

که در آن مقادیر عددی F_x و F_y *مؤلفه‌های عددی* بردار $\mathbf{F}$ در راستای x و y می‌باشند.



شکل ۵.۲

بسته به اینکه نیروی $\mathbf{F}$ در کدام ربع محور باشد، مؤلفه‌های عددی می‌توانند مثبت یا منفی باشند. برای بردار نیروی نشان داده شده در شکل ۵.۲، مؤلفه‌های عددی x و y هر دو مثبت می‌باشند و رابطهٔ آنها با اندازه و جهت بردار $\mathbf{F}$ به‌صورت زیر می‌باشد

$$F_x = F\cos\theta \qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$
$$F_y = F\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x} \qquad (۳.۲)$$

قراردادها برای نشان دادن مؤلفه‌های برداری

ما در این کتاب اندازهٔ یک بردار را با حروف ایتالیک نشان می‌دهیم؛ به این صورت که به‌جای $|\mathbf{F}|$ از F استفاده می‌کنیم که مقدار آن همیشه *نامنفی* است. با این حال، مؤلفه‌های عددی، که آنها را نیز با حروف ایتالیک نشان می‌دهیم، علامت‌دار خواهند بود. برای دیدن مثال‌هایی که در آنها از مؤلفه‌های عددی مثبت و منفی استفاده شده، به مسائل نمونهٔ ۱.۲ و ۳.۲ مراجعه نمایید.

هنگامی‌که در یک نمودار هم نیرو و هم مؤلفه‌های برداری آن هم‌زمان ظاهر می‌شوند، همان‌طورکه در شکل ۵.۲ می‌بینید، بهتر است که مؤلفه‌های برداری نیرو را به‌صورت خط‌چین و همچنین نیرو را با خط تیره نمایش دهیم. با استفاده از این قراردادها، می‌توان فهمید که در نمودار، نیرو و مؤلفه‌های آن نمایش داده شده‌اند و نه سه نیروی مجزا.

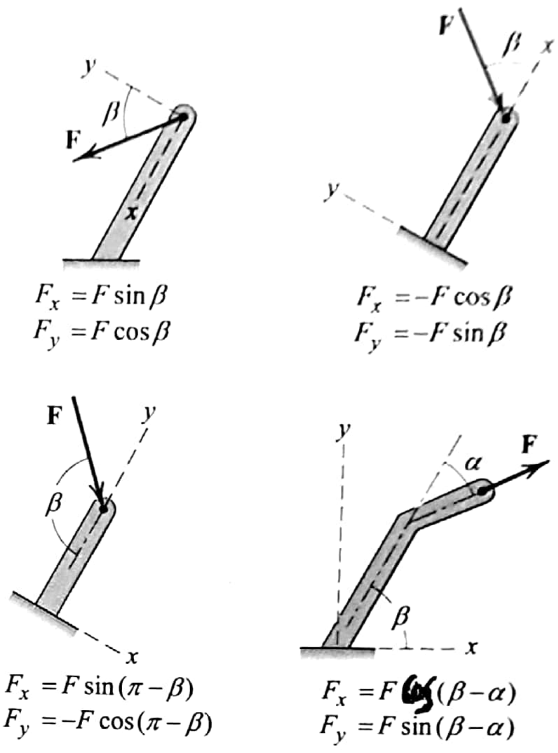
در مسائل واقعی، محورهای مرجع مشخص نمی‌شوند لذا انتخاب جای آنها به دلخواه شماست. انتخاب منطقی معمولاً بستگی به هندسهٔ مسئله دارد. به‌عنوان مثال هنگامی‌که ابعاد اصلی یک جسم در جهات افقی و عمودی داده شده‌اند، بهتر است که جهت‌های محورهای مرجع را در این دو راستا انتخاب کنید.

تعیین مؤلفه‌های یک نیرو

ابعاد لزوماً همیشه به‌صورت افقی و عمودی داده نمی‌شوند، زوایا نسبت به محور x لزوماً همیشه به‌صورت پادساعتگرد اندازه‌گیری نمی‌شوند و مبدأ مختصات لزوماً همیشه بر روی خط اثر نیرو قرار ندارد. پس لازم است که توانایی آن را داشته باشیم که با هر وضعیتی از محورهای مرجع و هر سیستم اندازه‌گیری زوایا، بتوانیم مؤلفه‌های بردار را به‌درستی تعیین کنیم. شکل ۶.۲ نمونه‌هایی از تجزیهٔ برداری در دو بعد نشان می‌دهد.

---
۱. تصویرهای عمود برهم را تصاویر *راست‌گوشه* نیز می‌نامند. ـ م.

Scanned by CamScanner



شکل ۶.۲

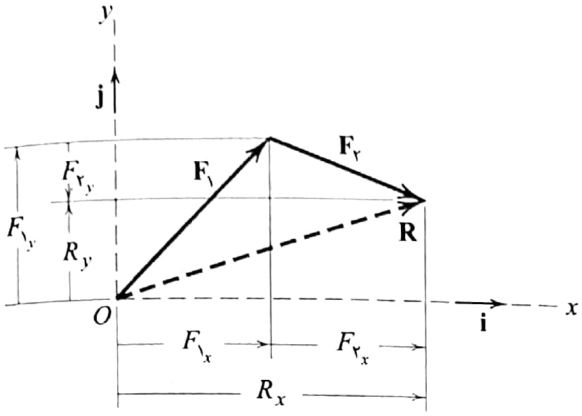
به‌خاطر سپردن رابطهٔ (۳.۲) به هیچ عنوان جایگزینی برای فهم قانون متوازی‌الاضلاع و درست تصویر کردن یک بردار بر روی محورها، نمی‌شود. یک شکل با ترسیم منظم به ما کمک می‌کند تا هندسهٔ مسئله برایمان روشن شود و اشتباه نکنیم.

مؤلفه‌های عمودی روش خوبی برای یافتن حاصل جمع یا بردار برایند $\mathbf{R}$ برای دو نیروی متقاطع می‌باشد. دو نیروی $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ را در نظر بگیرید که در نقطهٔ O با یکدیگر متقاطع‌اند. شکل ۷.۲ نشان می‌دهد که خط اثر نیروی $\mathbf{F}_2$ بر طبق قاعدهٔ مثلث در شکل ۳.۲، از نقطهٔ O به ابتدای بردار $\mathbf{F}_1$ جابه‌جا شده است. برای جمع کردن بردارهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (F_{1_x}\mathbf{i} + F_{1_y}\mathbf{j}) + (F_{2_x}\mathbf{i} + F_{2_y}\mathbf{j})$$

یا

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} = (F_{1_x} + F_{2_x})\mathbf{i} + (F_{1_y} + F_{2_y})\mathbf{j}$$

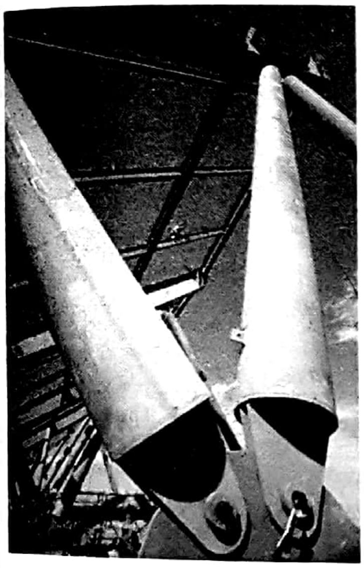


شکل ۷.۲

که از آن نتیجه می‌شود

$$R_x = F_{1_x} + F_{2_x} = \Sigma F_x$$
$$R_y = F_{1_y} + F_{2_y} = \Sigma F_y \qquad (۴.۲)$$

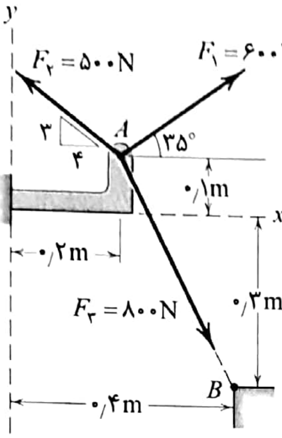
عبارت ΣF_x به‌معنی "حاصل جمع جبری مؤلفه‌های عددی در راستای x" می‌باشد. برای مثال نشان‌داده‌شده در شکل ۷.۲، دقت کنید که مؤلفهٔ عددی F_{2_y} منفی خواهد بود.



عضوهای سازه‌ای در پس زمینهٔ این عکس، به دیوارکوب‌های اتصال دو انتهای خود نیروی متمرکز وارد می‌کنند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۲

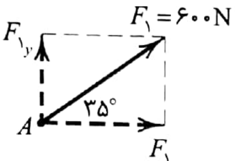
نیروهای $\mathbf{F}_۱$، $\mathbf{F}_۲$ و $\mathbf{F}_۳$ که هر سه بر نقطهٔ A از دیوارکوب اعمال می‌شوند، به سه روش روبه‌رو تعریف شده‌اند. برای هریک از این سه نیرو، مؤلفه‌های عددی را در راستای x و y تعیین کنید.



حل: با توجه به شکل (الف) مؤلفه‌های عددی $\mathbf{F}_۱$ عبارت‌اند از

$$F_{۱_x} = ۶۰۰\cos ۳۵° = ۴۹۱\text{N}$$ ج.

$$F_{۱_y} = ۶۰۰\sin ۳۵° = ۳۴۴\text{N}$$ ج.

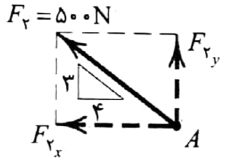


(الف)

با توجه به شکل (ب)، مؤلفه‌های عددی $\mathbf{F}_۲$ به‌صورت زیر خواهند بود

$$F_{۲_x} = -۵۰۰(\frac{۴}{۵}) = -۴۰۰\text{N}$$ ج.

$$F_{۲_y} = ۵۰۰(\frac{۳}{۵}) = ۳۰۰\text{N}$$ ج.



(ب)

دقت کنید که زاویهٔ بین $\mathbf{F}_۲$ و محور xها محاسبه نشده است. سینوس و کسینوس این زاویه به‌وسیلهٔ مثلث ۳ـ۴ـ۵ به‌راحتی قابل محاسبه‌اند. ضمناً توجه کنید که مؤلفهٔ عددی x از نیروی $\mathbf{F}_۲$ منفی است.

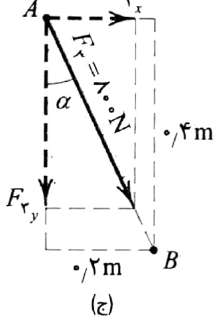
مؤلفهٔ عددی $\mathbf{F}_۳$ را می‌توان با به‌دست آوردن زاویهٔ α در شکل (ج) محاسبه کرد

$$\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{۰٫۲}{۰٫۴}\right] = ۲۶٫۶°$$

پس

❶ $$F_{۳_x} = F_۳ \sin\alpha = ۸۰۰\sin ۲۶٫۶° = ۳۵۸\text{N}$$ ج.

$$F_{۳_y} = -F_۳ \cos\alpha = -۸۰۰\cos ۲۶٫۶° = -۷۱۶\text{N}$$ ج.



(ج)

همچنین مؤلفه‌های عددی $\mathbf{F}_۳$ را می‌توان با نوشتن $\mathbf{F}_۳$ به‌صورت اندازهٔ آن ضرب‌در بردار یکهٔ $\mathbf{n}_{AB}$ در راستای خط AB به‌دست آورد. پس

❷
$$\mathbf{F}_۳ = F_۳\mathbf{n}_{AB}$$
$$= F_۳\frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}} = ۸۰۰\left[\frac{۰٫۲\mathbf{i} - ۰٫۴\mathbf{j}}{\sqrt{(۰٫۲)^۲ + (-۰٫۴)^۲}}\right]$$
$$= ۸۰۰[۰٫۴۴۷\mathbf{i} - ۰٫۸۹۴\mathbf{j}] = ۳۵۸\mathbf{i} - ۷۱۶\mathbf{j}\text{N}$$

مؤلفه‌های عددی خواسته شده به این صورت خواهند بود

$$F_{۳_x} = ۳۵۸\text{N}$$ ج.

$$F_{۳_y} = -۷۱۶\text{N}$$ ج.

که با نتایج قبلی سازگار است.

راهنمایی‌های مفید

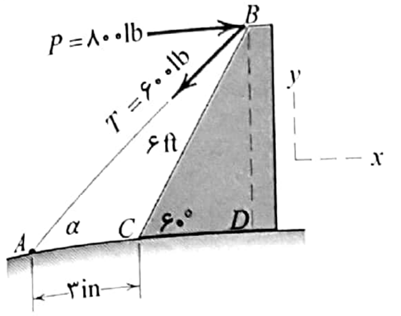
❶ شما باید به‌جای استفادهٔ کورکورانه از فرمول‌های $F_x = F\cos\theta$ و $F_y = F\sin\theta$، به هندسهٔ هر مسئله نیز دقت کنید.

❷ یک بردار یکه را می‌توان با تقسیم هر برداری، مثلاً بردار $\overrightarrow{AB}$، بر اندازهٔ آن به‌دست آورد. در اینجا ما برای نشان دادن برداری که از A تا B کشیده شده از یک فلش بالاسری استفاده کرده و برای نشان دادن فاصلهٔ میان آنها، از یک خط بالاسری استفاده می‌کنیم.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۲

دو نیروی **P** و **T** را که بر سازهٔ ثابت واقع شده در نقطهٔ B وارد می‌شوند، به‌صورت تک بردار برایند **R** به‌دست آورید.

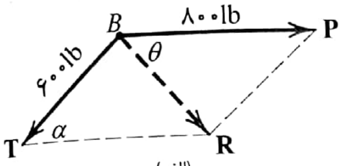


❶ ***حل ترسیمی:*** متوازی‌الاضلاع ساخته شده برای جمع برداری نیروهای **T** و **P** در شکل (الف) نشان داده شده است. مقیاس استفاده شده در اینجا برای ۱in = ۸۰۰lb است؛ مقیاس ۱in = ۲۰۰lb برای کاغذ با اندازهٔ معمولی مناسب‌تر است و دقت بیشتری خواهد داشت. دقت کنید که لازم است تا زاویهٔ α پیش از تشکیل‌دادن متوازی‌الاضلاع، محاسبه شود. با توجه به شکل داریم

$$\tan\alpha=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{۶\sin ۶۰°}{۳+۶\cos ۶۰°}=۰/۸۶۶ \qquad \alpha=۴۰/۹°$$

اندازه‌گیری طول R و جهت θ از نیروی برایند **R** نتایج تقریبی زیر را دربردارد

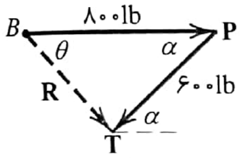
$$R=۵۲۵\text{lb} \qquad \theta=۴۹°$$
ج.



(الف)

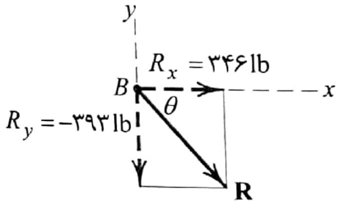
راهنمایی‌های مفید

❶ به تغییر مکان **P** برای امکان استفاده از جمع متوازی‌الاضلاع در B دقت کنید.



(ب)

❷ به تغییر مکان **F** برای نگه‌داشتن خط اثر درست برایند **R** دقت کنید.



(ج)

❷ ***حل هندسی:*** مثلث ساخته شده برای جمع بردارهای **T** و **P** در شکل (ب) نشان داده شده است. زاویهٔ α همانند بالا محاسبه می‌شود. با توجه به قانون کسینوس‌ها داریم

$$R^۲=(۶۰۰)^۲+(۸۰۰)^۲-۲(۶۰۰)(۸۰۰)\cos ۴۰/۹°=۲۷۴۳۰۰$$
$$R=۵۲۴\text{lb}$$
ج.

با استفاده از قانون سینوس‌ها می‌توانیم زاویهٔ θ را که **R** می‌سازد به‌دست آوریم. پس

$$\frac{۶۰۰}{\sin\theta}=\frac{۵۲۴}{\sin ۴۰/۹°} \qquad \sin\theta=۰/۷۵۰$$

$$\theta=۴۸/۶°$$
ج.

حل جبری: با استفاده از سیستم مختصات x-y بر روی شکل داده شده، می‌توانیم بنویسیم

$$R_x=\Sigma F_x=۸۰۰-۶۰۰\cos ۴۰/۹°=۳۴۶\text{lb}$$
$$R_y=\Sigma F_y=-۶۰۰\sin ۴۰/۹°=-۳۹۳\text{lb}$$

اندازه و جهت نیروی برایند **R** که در شکل (ج) نشان داده شده‌اند، برابر خواهند بود با

$$R=\sqrt{R_x^۲+R_y^۲}=\sqrt{(۳۴۶)^۲+(-۳۹۳)^۲}$$
$$=۵۲۴\text{lb}$$
ج.

$$\theta=\tan^{-۱}\frac{|R_y|}{|R_x|}$$
$$=\tan^{-۱}\frac{۳۹۳}{۳۴۶}=۴۸/۶°$$
ج.

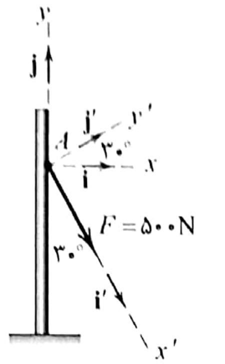
بردار برایند **R** را می‌توان به‌صورت برداری نوشت

$$\mathbf{R}=R_x\mathbf{i}+R_y\mathbf{j}$$
$$=۳۴۶\mathbf{i}-۳۹۳\mathbf{j}\ \text{lb}$$
ج.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۲

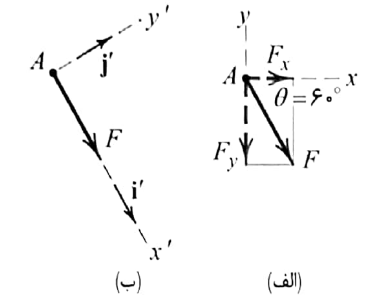
نیروی ۵۰۰ نیوتنی $\mathbf{F}$ بر ستون عمودی مطابق شکل وارد می‌شود. (الف) $\mathbf{F}$ را برحسب بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ نوشته و مؤلفه‌های برداری و عددی آن را مشخص کنید. (ب) مؤلفه‌های عددی نیروی $\mathbf{F}$ را در راستای x' و y' مشخص نمایید. (ج) مؤلفه‌های عددی $\mathbf{F}$ را در راستای محورهای x و y' مشخص کنید.



حل: (الف) با توجه به شکل (الف)، $\mathbf{F}$ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{F}=(F\cos\theta)\mathbf{i}-(F\sin\theta)\mathbf{j}$$
$$=(۵۰۰\cos ۶۰^\circ)\mathbf{i}-(۵۰۰\sin ۶۰^\circ)\mathbf{j}$$
$$=(۲۵۰\mathbf{i}-۴۳۳\mathbf{j})\,\text{N}$$

مؤلفه‌های عددی عبارت‌اند از $F_x=۲۵۰\text{N}$ و $F_y=-۴۳۳\text{N}$. مؤلفه‌های برداری برابر با $\mathbf{F}_x=۲۵۰\mathbf{i}\,\text{N}$ و $\mathbf{F}_y=-۴۳۳\mathbf{j}\,\text{N}$ می‌باشند.

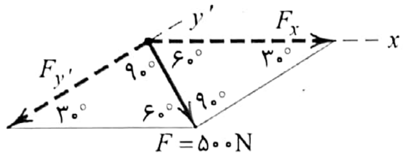


(ب) (الف)

(ب) با توجه به شکل (ب)، $\mathbf{F}$ را می‌توانیم به‌صورت $\mathbf{F}=۵۰۰\mathbf{i}'\text{N}$ بنویسیم، لذا مؤلفه‌های خواسته‌شده عبارت خواهند بود از

$$F_{x'}=۵۰۰\text{N} \qquad F_{y'}=۰$$

(ج) مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ در راستاهای x و y'، غیر عمودی خواهند بود و باید آنها را با استفاده از ساختن متوازی‌الاضلاع همانند شکل (ج) به‌دست آورد. اندازهٔ بردارها را می‌توان به کمک قانون سینوس‌ها به‌دست آورد. پس



(ج)

$$\frac{|F_x|}{\sin ۹۰^\circ}=\frac{۵۰۰}{\sin ۳۰^\circ} \qquad |F_x|=۱۰۰۰\text{N}$$

$$\frac{|F_{y'}|}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{۵۰۰}{\sin ۳۰^\circ} \qquad |F_{y'}|=۸۶۶\text{N}$$

و همان‌طورکه خواسته شده مؤلفه‌های عددی عبارت خواهند بود از

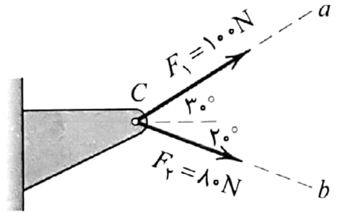
$$F_x=۱۰۰۰\text{N} \qquad F_{y'}=-۸۶۶\text{N}$$

راهنمایی مفید

❶ F_x و $F_{y'}$ را به‌طور ترسیمی به‌دست آورده و جواب خود را با مقادیر محاسبه‌شده، مقایسه نمایید.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴.۲

نیروهای $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ مطابق شکل بر یک دیوارکوب وارد می‌شوند. بردار برایند $\mathbf{R}$ و تصویر آن F_b را در راستای محور b به‌دست آورید.

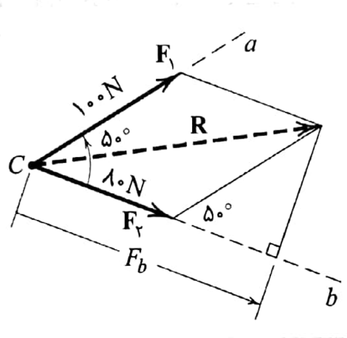


حل: جمع متوازی‌الاضلاعی $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ مطابق شکل بر دیوارکوب وارد می‌شوند. با استفاده از قانون کسینوس‌ها داریم

$$R^۲=(۸۰)^۲+(۱۰۰)^۲-۲(۸۰)(۱۰۰)\cos ۱۳۰^\circ \qquad R=۱۶۳{,}۴\text{N}$$

شکل همچنین تصویر قائم یعنی $\mathbf{F}_b$ برایند $\mathbf{R}$ را در راستای محور b نشان می‌دهد. طول آن برابر است با

$$F_b=۸۰+۱۰۰\cos ۵۰^\circ=۱۴۴{,}۳\text{N}$$

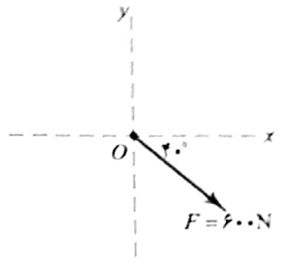


دقت کنید که مؤلفه‌های یک بردار عموماً با تصویرهای آن بردار بر روی محورها برابر نیستند. اگر محور a با محور b متعامد می‌بود، تصویرها و مؤلفه‌های $\mathbf{R}$ بر روی دو محور با یکدیگر مساوی می‌شد.

Scanned by CamScanner

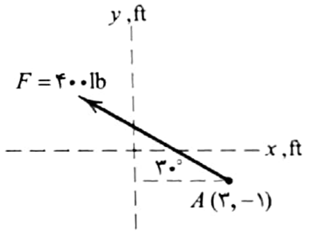
مسائل مقدماتی

۱.۲ اندازهٔ بردار **F** برابر ۶۰۰N است. **F** را به‌صورت برداری برحسب بردارهای یکهٔ **i** و **j** به‌دست آورید. سپس مؤلفه‌های عددی x و y نیروی **F** را محاسبه کنید.



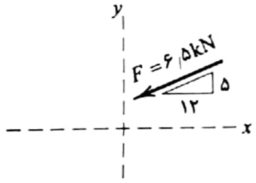
شکل م ۱.۲

۲.۲ اندازهٔ نیروی **F** برابر ۴۰۰lb می‌باشد. **F** را به‌صورت برداری برحسب بردارهای یکهٔ **i** و **j** به‌دست آورید. سپس مؤلفه‌های عددی و برداری **F** را محاسبه کنید.



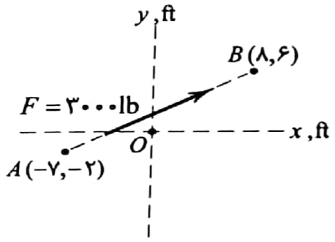
شکل م ۲.۲

۳.۲ نیروی **F** به مقدار ۶٫۵kN مانند شکل تعریف شده است. **F** را برحسب بردارهای یکهٔ **i** و **j** به‌دست آورید.



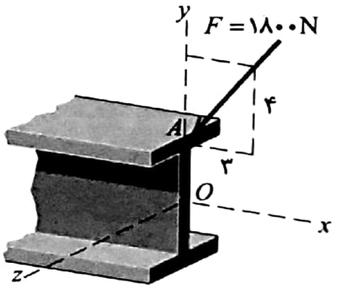
شکل م ۳.۲

۴.۲ خط اثر یک نیروی ۳۰۰۰lb مانند شکل از نقاط A و B عبور می‌کند. مؤلفه‌های عددی **F** در راستای x و y را به‌دست آورید.



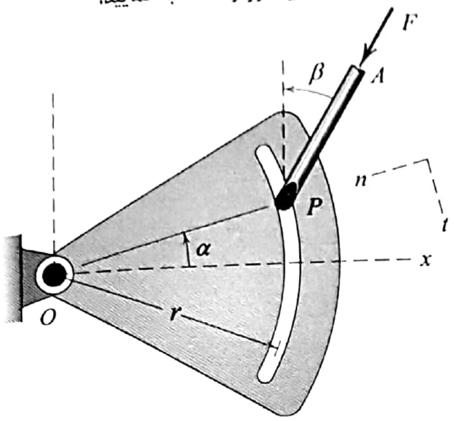
شکل م ۴.۲

۵.۲ نیروی **F** با مقدار ۱۸۰۰N بر انتهای تیر I ـ شکل زیر وارد می‌شود. **F** را برحسب بردارهای یکهٔ **i** و **j** به‌دست آورید.



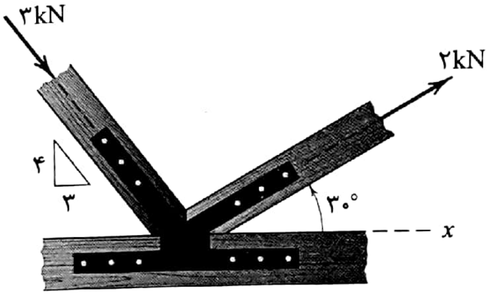
شکل م ۵.۲

۶.۲ اهرم کنترل AP نیروی **F** را به‌صورت نشان‌داده‌شده بر روی قطاع اعمال می‌کند. مؤلفه‌های x-y و n-t این نیرو را محاسبه نمایید.



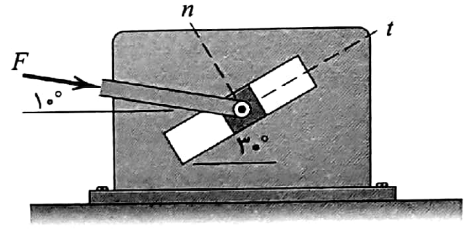
شکل م ۶.۲

۷.۲ دو عضو از سازهٔ زیر، که یکی تحت کشش و دیگری تحت فشار می‌باشند، نیروهای نشان‌داده‌شده را بر مفصل O وارد می‌کنند. اندازهٔ **R** بردار برایند دو نیرو و همچنین زاویه‌ای را که **R** در جهت مثبت محور xها می‌سازد تعیین کنید.



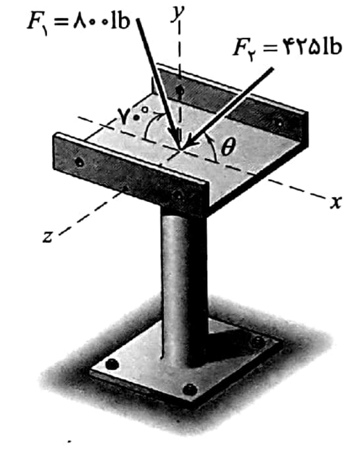
شکل م ۷.۲

۸.۲ مؤلفهٔ t از نیروی **F** برابر ۷۵ نیوتن می‌باشد. مؤلفهٔ n و اندازهٔ **F** را تعیین کنید.



شکل م. ۸.۲

۹.۲ دو نیرو مانند شکل بر سازهٔ دیوارکوب وارد می‌آیند. زاویهٔ θ را طوری تعیین کنید که بردار برایند عمودی شود. سپس اندازهٔ بردار برایند R را تعیین کنید.

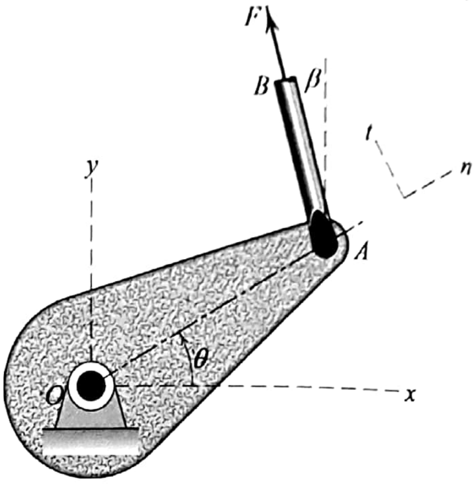


شکل م ۹.۲

Scanned by CamScanner

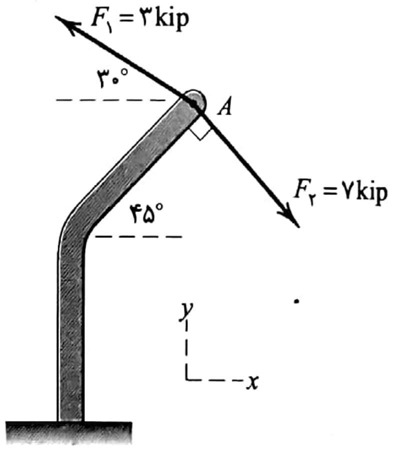
مسائل برگزیده

۱۰.۲ مؤلفه‌های n و t از نیروی $\mathbf{F}$ را که به‌وسیلهٔ اهرم AB بر میل‌لنگ OA اعمال می‌شود تعیین کنید. رابطهٔ کلی به‌دست آمده را برای مقدار $F = ۱۰۰N$ و (الف) $\theta = ۳۰°$، $\beta = ۱۰°$ و (ب) $\theta = ۱۵°$ و $\beta = ۲۵°$، مقدارگذاری کنید.



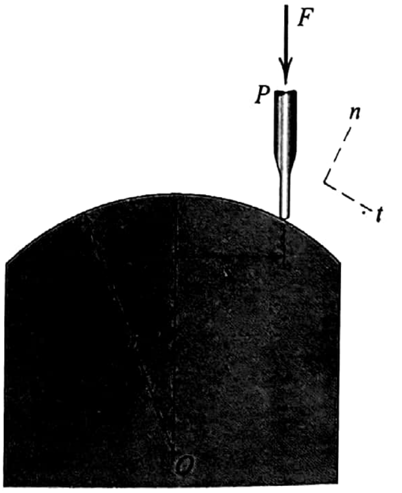
شکل م ۱۰.۲

۱۱.۲ دو نیروی نشان‌داده‌شده در شکل بر نقطهٔ A از میلهٔ خمیده وارد می‌شوند. مقدار برایند $\mathbf{R}$ را برای دو نیرو به‌دست آورید.



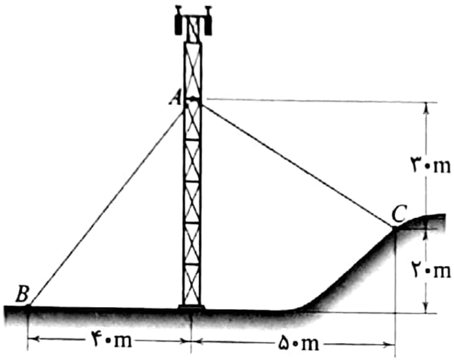
شکل م ۱۱.۲

۱۲.۲ سنجشگر کوچک P به‌آرامی به سطح دایره‌ای با نیروی عمودی $\mathbf{F}$ فشار وارد می‌کند. مؤلفه‌های n و t این نیرو را به‌صورت تابعی از موقعیت افقی s به‌دست آورید.



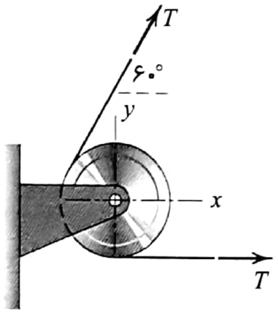
شکل م ۱۲.۲

۱۳.۲ کابل‌های AB و AC به بالای یک برج فرستنده متصل شده‌اند. کشش در کابل AB برابر ۸kN می‌باشد. مقدار کشش لازم T در کابل AC را طوری محاسبه کنید که برایند دو کشش کابل به‌صورت نیرویی رو به پایین در نقطهٔ A باشد. همچنین اندازهٔ R این نیروی روبه‌پایین را تعیین کنید.



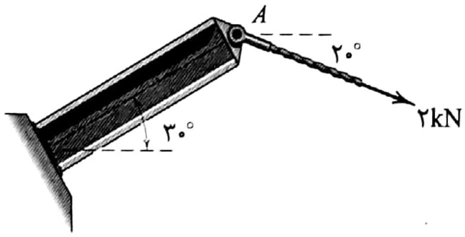
شکل م ۱۳.۲

۱۴.۲ اگر کشش‌های برابر T در کابل قرقره برابر ۴۰۰N باشد، توصیف برداری نیروی $\mathbf{R}$ واردشده بر قرقره به‌وسیلهٔ کشش در کابل‌ها را به‌دست آورید. همچنین اندازهٔ $\mathbf{R}$ را تعیین نمایید.



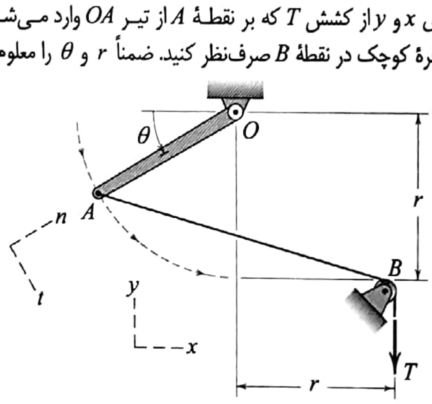
شکل م ۱۴.۲

۱۵.۲ برای برقراری محدودیت‌های طراحی، لازم است که تأثیر کشش ۲kN در کابل بر تنش برشی، کشش و خمش تیر ثابت I ـ شکل معین شود. برای رسیدن به این هدف، این نیرو را با دو نیروی برابر در A یعنی F_t به‌صورت موازی و F_n به‌صورت عمود بر تیر جایگزین نمایید. نیروهای F_t و F_n را تعیین کنید.



شکل م ۱۵.۲

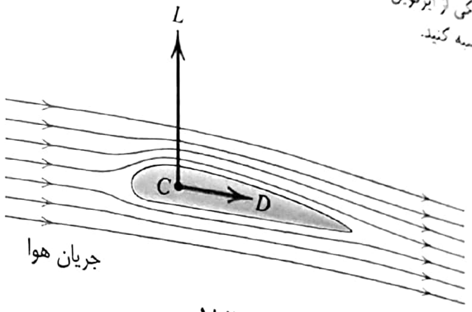
۱۶.۲ مؤلفه‌های x و y از کشش T که بر نقطهٔ A از تیر OA وارد می‌شود را به‌دست آورید. از تأثیر قرقرهٔ کوچک در نقطهٔ B صرف‌نظر کنید. ضمناً r و θ را معلوم فرض نمایید.



شکل م ۱۶.۲

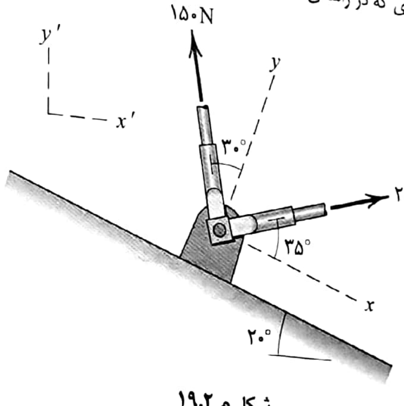
۱۷.۲ با توجه به سازوکار تعریف شده در مسئلهٔ قبل، رابطهٔ کلی برای مؤلفه‌های n و t متعلق به کشش T وارد شده بر نقطهٔ A را به‌دست آورید. سپس روابط به‌دست آمده را به‌ازای $T = ۱۰۰N$ و $\theta = ۳۵°$ ارزیابی کنید.

۱۸.۲ نسبت نیروی بالابرندهٔ L به نیروی مقاوم در مقابل حرکت D برای یک ورق هوابر ساده (ایرفویل) معمولاً $L/D = ۱۰$ است. اگر نیروی بالابرنده روی مقطع کوچکی از ایرفویل ۵۰lb باشد، مقدار برایند نیروی **R** و زاویهٔ θ را نسبت به افق محاسبه کنید.



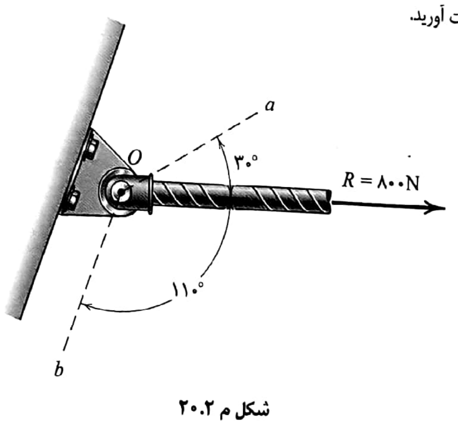
شکل م ۱۸.۲

۱۹.۲ برایند **R** دو نیروی واردشده به دیوارکوب را محاسبه نمایید. **R** را برحسب بردارهای یکه‌ای که در راستای محورهای x و y نشان‌داده‌شده، به‌دست آورید.



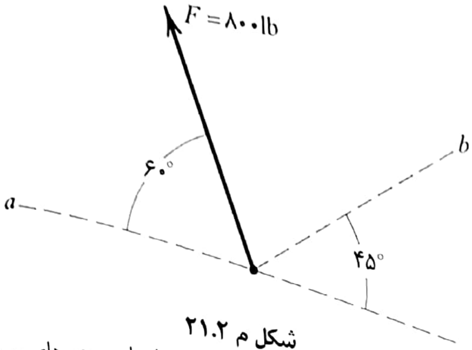
شکل م ۱۹.۲

۲۰.۲ مؤلفه‌های عددی R_a و R_b از نیروی **R** در راستای محورهای غیرقائم a و b را به‌دست آورید. همچنین تصویر عمودی P_a، نیروی **R** بر روی محور a را به‌دست آورید.



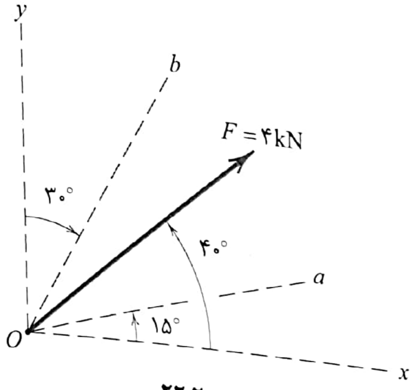
شکل م ۲۰.۲

۲۱.۲ مؤلفه‌های نیروی ۸۰۰ پوندی **F** در راستای محورهای مورب a و b را به‌دست آورید. همچنین تصویر **F** بر روی محورهای a و b را تعیین کنید.



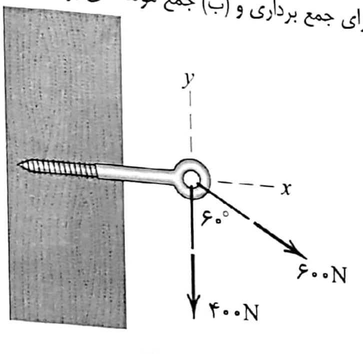
شکل م ۲۱.۲

۲۲.۲ مؤلفه‌های F_a و F_b از نیروی ۴kN را در راستای محورهای مورب a و b به‌دست آورید. همچنین تصاویر P_a و P_b برای **F** را بر روی محورهای a و b تعیین کنید.



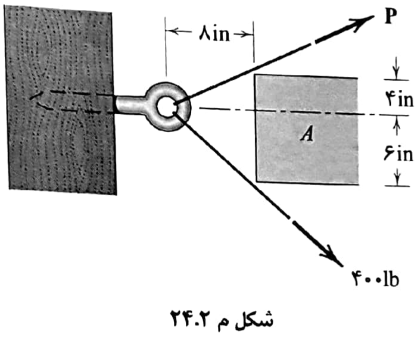
شکل م ۲۲.۲

۲۳.۲ بردار برایند **R** برای دو نیروی نشان‌داده‌شده با (الف) استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع برای جمع برداری و (ب) جمع مؤلفه‌های برداری را به‌دست آورید.



شکل م ۲۳.۲

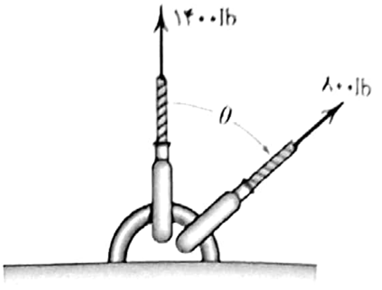
۲۴.۲ می‌خواهیم میخی را با واردکردن نیرو در راستای افق از چوب خارج کنیم. جسم A مانع از دسترسی مستقیم به میخ، می‌شود لذا دو نیرو، یکی به‌مقدار ۴۰۰lb و دیگری **P**، مانند شکل به کابل‌ها وارد می‌کنیم. مقدار **P** را طوری محاسبه کنید که بردار برایند **T** در راستای میخ باشد. همچنین T را به‌دست آورید.



شکل م ۲۴.۲

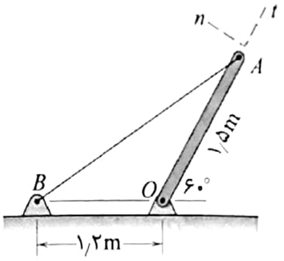
Scanned by CamScanner

۲۵.۲ نیروی ۸۰۰ پوندی با چه زاویه‌ای وارد شود تا برایند **R** دو نیرو، اندازه‌ای برابر ۲۰۰۰lb داشته باشد؟ همچنین برای این حالت زاویهٔ ϕ تشکیل‌شده بین بردار **R** برایند و راستای عمودی را محاسبه کنید.



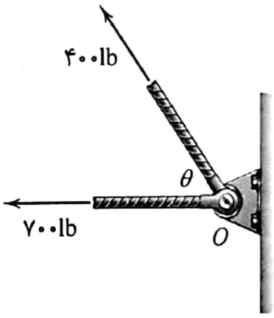
شکل م ۲۵.۲

۲۶.۲ کابل AB از چرخش ساعتگرد میلهٔ OA حول محور O جلوگیری می‌کند. اگر کشش کابل برابر ۷۵۰N باشد، مؤلفه‌های n و t نیروی واردشده بر نقطهٔ A بر روی میله را محاسبه کنید.



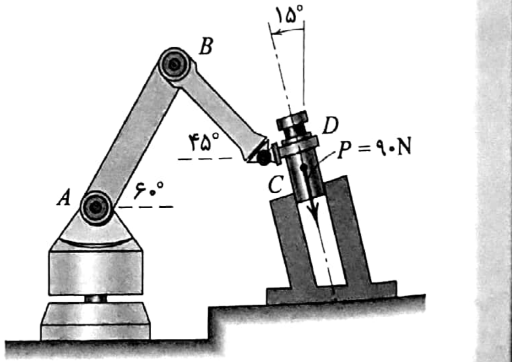
شکل م ۲۶.۲

۲۷.۲ نیروی ۴۰۰lb با چه زاویه‌ای وارد شود تا بردار برایند **R** دو نیرو، مقداری برابر ۱۰۰۰lb داشته باشد. برای این حالت مقدار زاویهٔ β بین **R** و راستای افقی چقدر خواهد بود؟



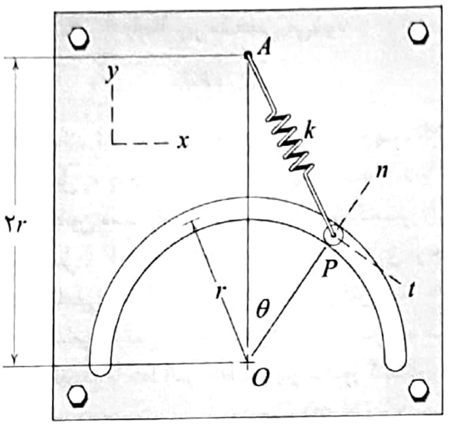
شکل م ۲۷.۲

۲۸.۲ در طراحی یک روبات، برای واردکردن یک قطعهٔ استوانه‌ای شکل به یک سوراخ با قطر تقریباً مشابه، لازم است که بازوی روبات، نیروی P برابر ۹۰N را موازی با محور سوراخ به‌صورت نشان‌داده‌شده وارد کند. مؤلفه‌های نیرویی را که قطعه بر روبات وارد می‌کند، (الف) در راستای دو محور موازی و عمود بر بازوی AB و (ب) دو محور موازی و عمود بر بازوی BC تعیین کنید.



شکل م ۲۸.۲

۲۹.۲ ◄ طول آزاد فنر برابر r می‌باشد. هنگامی‌که پین P در وضعیت دلخواه θ است، مؤلفه‌های x و y از نیرویی که فنر بر پین وارد می‌کند را تعیین کنید. سپس رابطهٔ به‌دست آمده را برای $r = ۴۰۰mm$ و $k = ۱٫۴kN/m$ و $\theta = ۴۰°$ ارزیابی کنید. (دقت کنید که نیروی فنر از رابطهٔ $F = k\delta$ محاسبه می‌شود که δ برابر مقدار تغییر طول از حالت آزاد است.)



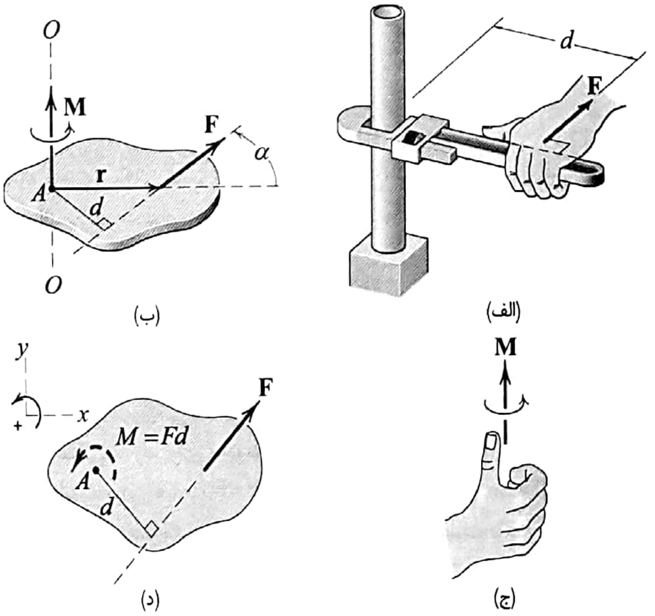
شکل م ۲۹.۲

۳۰.۲ ◄ با مراجعه به مسئلهٔ ۲۹.۲ هنگامی‌که پین P در وضعیت $\theta = ۲۰°$ قرار دارد، مؤلفه‌های n و t از نیروی F که فنری با ثابت $k = ۱٫۴kN/m$ به پین وارد می‌کند را تعیین کنید. مقدار فاصلهٔ $r = ۴۰۰mm$ است.

۴.۲ گشتاور

به‌طورکلی، علاوه بر آنکه نیرو تمایل دارد جسم را در جهت واردشدنش جابه‌جا کند، مایل است جسم را حول یک محور به چرخش درآورد. این محور می‌تواند هر خطی مستقل از خط اثر نیروی اولیه باشد. این تمایل برای چرخاندن را، *گشتاور* **M** نیرو می‌نامند. همچنین از گشتاور با نام *گشتاور نیرو* نیز یاد می‌شود.

به‌عنوان یک نمونهٔ آشنا برای مفهوم گشتاور، آچار لولهٔ نشان‌داده‌شده در شکل ۸.۲ (الف) را در نظر بگیرید. یک اثر نیروی وارد شدهٔ عمود بر دستهٔ آچار، تمایل آن برای چرخاندن لوله حول محور عمودی آن است. مقدار این تمایل بستگی به اندازهٔ نیروی F وارد شده و طول مؤثر d دستهٔ آچار، دارد. تجربه نشان می‌دهد که وارد کردن نیرو در راستای غیر عمود بر دستهٔ آچار، تأثیر بسیار کمتری نسبت به عمود وارد کردن نیرو به آن دارد.



شکل ۸.۲

Scanned by CamScanner

گشتاور حول یک نقطه

شکل ۸.۲ (ب) جسمی دوبعدی را نشان می‌دهد که نیروی **F** به سطح آن وارد می‌آید. اندازهٔ گشتاور، یا همان تمایل نیرو برای چرخاندن جسم، حول محور O-O که بر سطح جسم عمود است، با اندازهٔ نیرو و بازوی گشتاور متناسب است. بازوی گشتاور همان مقدار فاصلهٔ عمودی از محور تا خط اثر نیرو می‌باشد. لذا اندازهٔ گشتاور از رابطهٔ زیر مشخص می‌شود

$$M = Fd \tag{۵.۲}$$

این گشتاور، برداری مانند **M** و عمود بر سطح جسم است. جهت **M** بستگی به جهتی دارد که **F** تمایل به چرخاندن جسم در آن جهت داشته باشد. با توجه به شکل ۸.۲ (ج) با استفاده از قانون دست راست می‌توان جهت گشتاور را تعیین نمود. به‌طور کلی، گشتاور حاصل از **F** حول O-O را به‌صورت برداری در جهت انگشت شست نشان می‌دهیم به‌طوری که انگشتان دیگر در جهت چرخش جسم حلقه می‌شوند.

گشتاور **M** از تمامی قوانین ترکیب بردارها تبعیت کرده و می‌توان آن‌را به‌صورت یک بردار لغزنده با خط اثر منطبق بر محور گشتاور فرض کرد. یکاهای اصلی گشتاور در سیستم SI، نیوتن متر (N·m) و در سیستم .U.S، پوند ـ فوت (lb·ft) می‌باشد.

هنگام برخورد با نیروهایی که در یک صفحه قرار دارند، عموماً گشتاور را حول یک نقطه در نظر می‌گیریم. این بدان معنی است که محور گشتاور، خطی عمود بر صفحه و گذرنده از آن است. لذا گشتاور نیروی **F** حول نقطهٔ A در شکل ۸.۲ (د) مقداری برابر $M = Fd$ دارد و جهت آن پادساعتگرد است.

جهت‌های گشتاور را می‌توان با استفاده از یک قرارداد برای علامت آنها بیان کرد، مثلاً علامت مثبت (+) برای پادساعتگرد و علامت منفی (-) برای ساعتگرد و یا برعکس. ثبات علامت در هنگام حل مسئله امری ضروری است. برای قرارداد علامت استفاده شده در شکل ۸.۲ (د)، گشتاور نیروی **F** حول نقطهٔ A (یا حول محور z گذرنده از نقطهٔ A) مثبت می‌باشد. بردار انحنادار استفاده شده در شکل، روشی قراردادی برای نشان دادن گشتاور در تحلیل‌های دوبعدی می‌باشد.

ضرب خارجی بردارها

در بعضی از مسائل دوبعدی و همچنین در بسیاری از مسائل سه‌بعدی، راحت‌تر است که برای محاسبهٔ گشتاورها از روش برداری استفاده نمود. گشتاور نیروی **F** حول نقطهٔ A، که در شکل ۸.۲ (ب) می‌بینید را می‌توان با ضرب خارجی به‌صورت زیر نشان داد

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{۶.۲}$$

که **r** برداری مکانی است که از نقطهٔ مرجع گشتاور یعنی A آغاز شده و می‌تواند به هر نقطه‌ای روی خط اثر **F** ختم شود. اندازهٔ این عبارت به‌روش زیر به‌دست می‌آید[1]

$$M = Fr\sin\alpha = Fd \tag{۷.۲}$$

که با معادلهٔ (۵.۲) برای به‌دست آوردن اندازهٔ گشتاور سازگاری دارد. دقت کنید که بازوی گشتاور یعنی $d = r\sin\alpha$، به نقطه‌ای از خط اثر **F** که **r** بر آن ختم شده، بستگی ندارد. برای به‌دست آوردن جهت و علامت **M** می‌توانیم از قانون دست راست برای عبارت $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ استفاده کنیم؛ به‌این‌صورت که اگر انگشتان دست راست، جهت مثبت **r** را به جهت مثبت **F**، به سمت داخل جارو کنند، انگشت شست جهت مثبت **M** را نشان خواهد داد.

۱. برای کسب اطلاعات تکمیلی دربارهٔ ضرب خارجی به پیوست ج.۷ مراجعه کنید.

در نوشتن $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ لازم است که ترتیب را حفظ نماییم زیرا اگر عبارت به‌صورت $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ نوشته شود، جهت بردار حاصل در خلاف جهت بردار صحیح می‌باشد. همانند روش عددی، گشتاور **M** را می‌توان به‌عنوان گشتاور حول نقطهٔ A و یا گشتاور حول خط O-O دانست که این خط از نقطهٔ A عبور کرده و بر صفحهٔ حاوی بردارهای **r** و **F** عمود است. هنگامی‌که نیاز به محاسبهٔ گشتاور یک بردار حول یک نقطه داریم، استفاده از ضرب خارجی برداری یا ضرب عددی بستگی به هندسهٔ مسئله دارد. اگر فاصلهٔ عمودی میان خط اثر نیرو و نقطهٔ مرجع گشتاور در دسترس و یا به‌راحتی قابل محاسبه باشد، استفاده از ضرب عددی آسان‌تر خواهد بود اما اگر **F** و **r** بر یکدیگر عمود نباشند ولی به‌آسانی قابل نمایش به‌صورت برداری باشند، ضرب خارجی ترجیح داده خواهد شد.

در قسمت (ب) این فصل، خواهیم دید که چگونه نوشتن گشتاور یک نیرو به‌صورت برداری، می‌تواند برای حل مسائل سه‌بعدی مفید باشد.

قضیهٔ وارینون

یکی از مهم‌ترین پایه‌های علم مکانیک، *قضیهٔ وارینون* است. طبق این قضیه، گشتاور یک نیرو حول هر نقطه، معادل مجموع گشتاورهای مؤلفه‌های آن نیرو حول همان نقطه می‌باشد.

برای اثبات این قضیه نیروی **R** وارد بر صفحهٔ جسم نشان‌داده‌شده در شکل ۹.۲ (الف) را مشاهده کنید. نیروی **P** و **Q** نشان‌دهندهٔ دو مؤلفهٔ عمودی **R** می‌باشند. گشتاور **R** حول O برابر است با

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

با توجه به اینکه $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$ می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{P} + \mathbf{Q})$$

با استفاده از قانون توزیع‌پذیری برای ضرب خارجی می‌توان نوشت

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \mathbf{Q} \tag{۸.۲}$$

که نشان می‌دهد گشتاور **R** حول O برابر است با جمع گشتاورهای مؤلفه‌های **P** و **Q** آن حول نقطهٔ O که این قضیه را اثبات می‌کند.

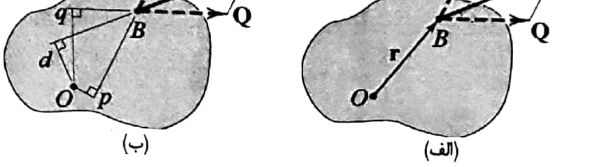
قضیهٔ وارینون محدود به دو مؤلفه نمی‌شود، بلکه می‌توان آن‌را برای سه یا چند مؤلفه نیز به‌کار برد. لذا می‌توانستیم از هر تعداد مؤلفهٔ **R** در اثبات این قضیه استفاده کنیم.[1]

شکل ۹.۲ (ب)، مزایای قضیهٔ وارینون را به ما نشان می‌دهد. گشتاور **R** حول نقطهٔ O برابر Rd است. اما اگر تعیین d، از تعیین p و q سخت‌تر باشد، می‌توانیم **R** را به دو مؤلفهٔ **P** و **Q** تجزیه نموده و گشتاور را به‌صورت زیر محاسبه کنیم

$$M_O = Rd = -pP + qQ$$

که در آن گشتاور در جهت عقربه‌های ساعت را، مثبت فرض می‌کنیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۵.۲ به ما نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم از قضیهٔ وارینون برای محاسبهٔ گشتاورها استفاده نماییم.



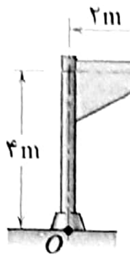
شکل ۹.۲

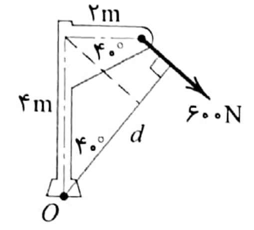
۱. همان‌طورکه در ابتدا گفته شد، قضیهٔ وارینون به مؤلفه‌های متقاطع یک نیرو محدود می‌شد؛ همچنین منبع زیر را ببینید

The Science of Mechanics, Ernst Mach, originally published in 1883.

مسئلهٔ نمونهٔ ۵.۲

اندازهٔ گشتاور نیروی ۶۰۰ نیوتنی را حول نقطهٔ O به پنج طریق محاسبه کنید.





حل: (۱) بازوی گشتاور نیروی ۶۰۰ نیوتنی برابر است با

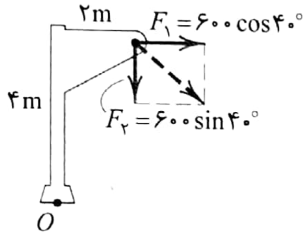
$$d = ۴\cos ۴۰° + ۲\sin ۴۰° = ۴/۳۵\,\text{m}$$

❶ با توجه به $M = Fd$ گشتاور ساعتگرد است و اندازهٔ آن برابر است با

$$M_O = ۶۰۰(۴/۳۵) = ۲۶۱۰\,\text{N·m}$$

ج.

(۲) نیرو را در نقطهٔ A به‌وسیلهٔ مؤلفه‌های قائم آن جایگزین نمایید



$$F_۱ = ۶۰۰\cos ۴۰° = ۴۶۰\,\text{N}$$

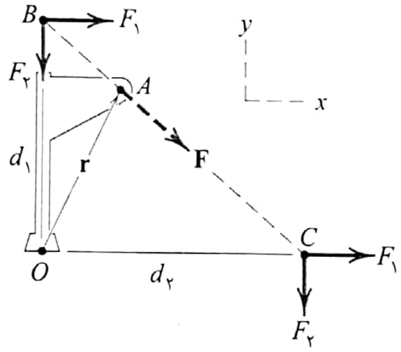
$$F_۲ = ۶۰۰\sin ۴۰° = ۳۸۶\,\text{N}$$

طبق قضیهٔ وارینون، گشتاور برابر خواهد بود با

$$M_O = ۴۶۰(۴) + ۳۸۶(۲) = ۲۶۱۰\,\text{N·m}$$

❷ ج.

(۳) با استفاده از اصل انتقال‌پذیری، نیروی ۶۰۰ نیوتنی را در راستای خط اثر آن به نقطهٔ B منتقل کنید که باعث می‌شود تا گشتاور مؤلفهٔ $F_۲$ حول نقطهٔ O برابر صفر شود. بازوی گشتاور $F_۱$ برابر خواهد بود با



$$d_۱ = ۴ + ۲\tan ۴۰° = ۵/۶۸\,\text{m}$$

و گشتاور

$$M_O = ۴۶۰(۵/۶۸) = ۲۶۱۰\,\text{N·m}$$

ج.

❸ (۴) انتقال‌دادن نیرو به نقطهٔ C گشتاور حاصل از مؤلفهٔ $F_۱$ را از بین خواهد برد. لذا بازوی گشتاور $F_۲$ برابر خواهد شد با

$$d_۲ = ۲ + ۴\cot ۴۰° = ۶/۷۷\,\text{m}$$

و گشتاور

$$M_O = ۳۸۶(۶/۷۷) = ۲۶۱۰\,\text{N·m}$$

ج.

(۵) با نوشتن نیرو برحسب بردارهای یکه، و استفاده از ضرب خارجی برای محاسبهٔ گشتاور، داریم

❹

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = (۲\mathbf{i} + ۴\mathbf{j})\times ۶۰۰(\mathbf{i}\cos ۴۰° - \mathbf{j}\sin ۴۰°)$$

$$= -۲۶۱۰\,\mathbf{k}\ \text{N·m}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که بردار در جهت منفی محور z می‌باشد. اندازهٔ بردار برابر است با

$$M_O = ۲۶۱۰\,\text{N·m}$$

ج.

راهنمایی‌های مفید

❶ درصورتی‌که شکل مسئله را به‌درستی ترسیم نمایید، هندسهٔ مسئله نباید مشکلی برای حل آن ایجاد کند.

❷ این روش عموماً کوتاه‌ترین راه‌حل است.

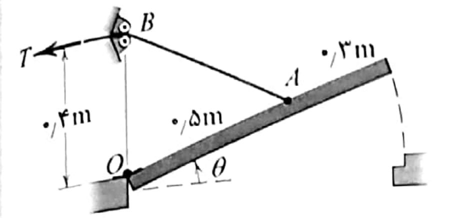
❸ اینکه نقاط B و C بر روی جسم قرار ندارند، دلیل بر اشتباه بودن راه‌حل ما نمی‌باشد زیرا محاسبهٔ ریاضی گشتاور ملزم به قرار داشتن نیرو بر روی جسم نیست.

❹ انتخاب‌های دیگر برای بردار مکان $\mathbf{r}$ به‌صورت $\mathbf{r} = d_۱\mathbf{j} = ۵/۶۸\mathbf{j}\,\text{m}$ و $\mathbf{r} = d_۲\mathbf{i} = ۶/۷۷\mathbf{i}\,\text{m}$ می‌باشد.

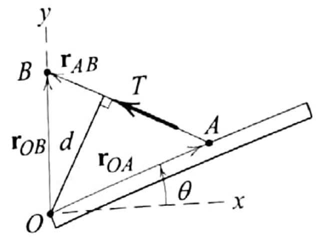
Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۶.۲

دریچهٔ سقفی OA بهوسیلهٔ کابل AB بلند می‌شود، و این عمل با کمک دو قرقرهٔ بدون اصطکاک در نقطهٔ B صورت می‌گیرد. کشش در تمام نقاط کابل برابر T است و این کشش با وارد شدن در نقطهٔ A گشتاور M_O را حول لولای O ایجاد می‌کند. نمودار مقدار M_O/T را به‌صورت تابعی از زاویهٔ بالا آمدن دریچه یعنی θ در بازهٔ $0 \le \theta \le 90°$ رسم کنید و مقادیر مینیمم و ماکزیمم را در آن مشخص نمایید. مفهوم فیزیکی این نسبت چیست؟



حل: حل مسئله را با کشیدن شکلی که وارد شدن نیروی $\mathbf{T}$ بر دریچه را نشان می‌دهد شروع می‌نماییم که در آن زاویهٔ θ دلخواه در نظر گرفته شده است. دقت کنید که راستای $\mathbf{T}$، با تغییر زاویهٔ θ، تغییر می‌کند. برای حل این مشکل، بردار یکهٔ $\mathbf{n}_{AB}$ را در راستای $\mathbf{T}$ به این‌صورت می‌نویسیم



❶
$$\mathbf{n}_{AB}=\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}}=\frac{\mathbf{r}_{OB}-\mathbf{r}_{OA}}{r_{AB}}$$

با استفاده از مختصات x-y در شکل، می‌توانیم بنویسیم

❷
$$\mathbf{r}_{OB}=0.4\mathbf{j}\,\text{m} \quad \text{و} \quad \mathbf{r}_{OB}=0.5(\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j})\text{m}$$

که

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AB}&=\mathbf{r}_{OB}-\mathbf{r}_{OA}=0.4\mathbf{j}-(0.5)(\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j})\\&=-0.5\cos\theta\mathbf{i}+(0.4-0.5\sin\theta)\mathbf{j}\text{m}\\r_{AB}&=\sqrt{(0.5\cos\theta)^2+(0.4-0.5\sin\theta)^2}\\&=\sqrt{0.41-0.4\sin\theta}\,\text{m}\end{aligned}$$

بردار یکهٔ موردنظر برابر است با

$$\mathbf{n}_{AB}=\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}}=\frac{-0.5\cos\theta\mathbf{i}+(0.4-0.5\sin\theta)\mathbf{j}}{\sqrt{0.41-0.4\sin\theta}}$$

بردار کشش را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{T}=T\mathbf{n}_{AB}=T\left[\frac{-0.5\cos\theta\mathbf{i}+(0.4-0.5\sin\theta)\mathbf{j}}{\sqrt{0.41-0.4\sin\theta}}\right]$$

❸ گشتاور $\mathbf{T}$ حول نقطهٔ O، به‌صورت یک بردار، برابر است با $\mathbf{M}_O=\mathbf{r}_{OB}\times\mathbf{T}$، که در آن $\mathbf{r}_{OB}=0.4\mathbf{j}\,\text{m}$، یا

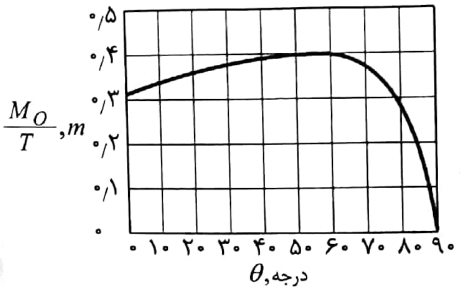
$$\mathbf{M}_O=0.4\mathbf{j}\times T\left[\frac{-0.5\cos\theta\mathbf{i}+(0.4-0.5\sin\theta)\mathbf{j}}{\sqrt{0.41-0.4\sin\theta}}\right]=\frac{0.2T\cos\theta}{\sqrt{0.41-0.4\sin\theta}}\mathbf{k}$$

اندازهٔ $\mathbf{M}_O$ برابر است با

$$M_O=\frac{0.2T\cos\theta}{\sqrt{0.41-0.4\sin\theta}}$$

و نسبت خواسته‌شده به‌صورت زیر است

$$\frac{M_O}{T}=\frac{0.2\cos\theta}{\sqrt{0.41-0.4\sin\theta}}$$



که به‌صورت نمودار در حاشیهٔ صفحه رسم شده است. عبارت M_O/T همان بازوی گشتاور d (برحسب متر) است که از نقطهٔ O آغاز شده و بر خط اثر $\mathbf{T}$ ختم می‌شود. ماکزیمم مقدار آن برابر ۰/۴ است که در زاویهٔ $\theta=53.1°$ اتفاق می‌افتد (که در آن $\mathbf{T}$ افقی است) و مینیمم مقدار آن ۰ بوده که در $\theta=90°$ صورت می‌گیرد (که در آن $\mathbf{T}$ عمودی است). این عبارت حتی با تغییر T درست خواهد بود.

این مسئلهٔ نمونه، گشتاورها را در فضای دوبعدی در نظر می‌گیرد و همچنین مزایای حل یک مسئله با موقعیت‌های دلخواه را نشان می‌دهد که به همین دلیل می‌توان در آن رفتار در محدوده‌ای از موقعیت‌های مختلف را بررسی نمود.

راهنمایی‌های مفید

❶ به یاد بیاورید که برای به‌دست آوردن بردار یکهٔ متناظر با یک بردار می‌توان آن بردار را بر اندازهٔ آن تقسیم نمود.

❷ خاطرنشان می‌کنیم که هر بردار را می‌توان با ضرب نمودن اندازهٔ آن در بردار یکهٔ هم‌جهت با آن به‌دست آورد.

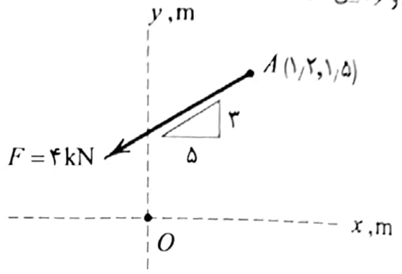
❸ در عبارت $\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$، بردار مکان $\mathbf{r}$ از مرکز گشتاور آغاز شده و به هر نقطه‌ای در خط اثر $\mathbf{F}$ ختم می‌شود. در اینجا استفاده از $\mathbf{r}_{OB}$ آسان‌تر از استفاده از $\mathbf{r}_{OA}$ می‌باشد.

Scanned by CamScanner

مسائل

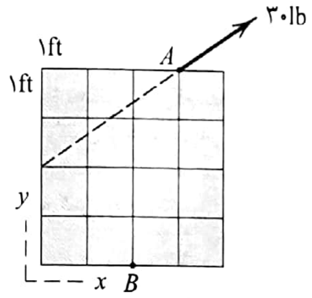
مسائل مقدماتی

۳۱.۲ نیروی **F** به‌مقدار ۴kN بر نقطهٔ *A* وارد می‌شود. گشتاور **F** حول نقطهٔ *O* را محاسبه نمایید و آن را هم به‌صورت عددی و هم به‌صورت برداری بنویسید. نقاطی را بر روی محورهای *x* و *y* تعیین کنید که گشتاور **F** حول آنها برابر صفر باشد.



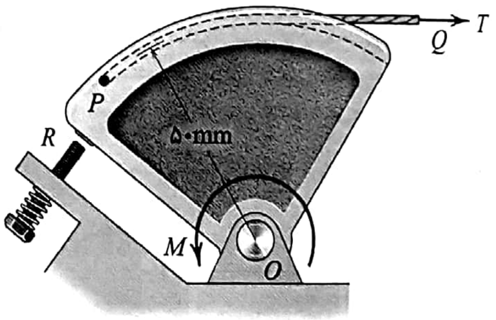
شکل م ۳۱.۲

۳۲.۲ صفحهٔ مستطیلی از مربع‌هایی به‌ضلع ۱ft تشکیل شده است. یک نیروی ۳۰ پوندی مطابق شکل به نقطهٔ *A* وارد می‌شود. گشتاور M_B این نیرو حول نقطهٔ *B* را با حداقل دو راه مختلف به‌دست آورید.



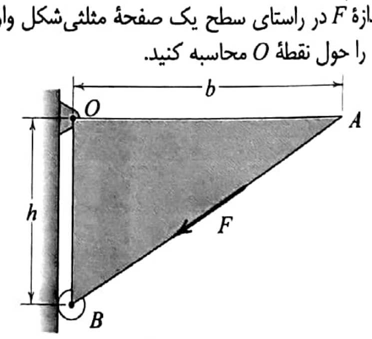
شکل م ۳۲.۲

۳۳.۲ مقطع دریچهٔ کنترل نشان‌داده‌شده در شکل می‌تواند آزادانه حول *O* بچرخد. اگر فنر پیچشی داخلی، گشتاور بازگشتی $M = 1/8 \text{N·m}$ را به مقطع در موقعیت نشان‌داده‌شده وارد کند، مقدار کشش *T* را طوری محاسبه کنید که برایند گشتاورها حول نقطهٔ *O* برابر صفر باشد. دقت کنید هنگامی‌که *T* برابر صفر است، مقطع بر روی پیچ تنظیم در نقطهٔ *R* ساکن است.



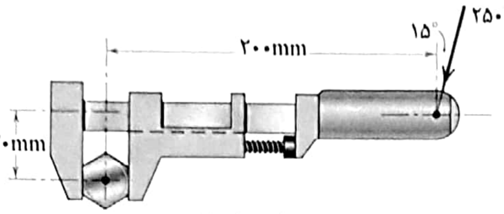
شکل م ۳۳.۲

۳۴.۲ نیرویی با اندازهٔ *F* در راستای سطح یک صفحهٔ مثلثی‌شکل وارد می‌شود. مقدار گشتاور حاصل از **F** را حول نقطهٔ *O* محاسبه کنید.



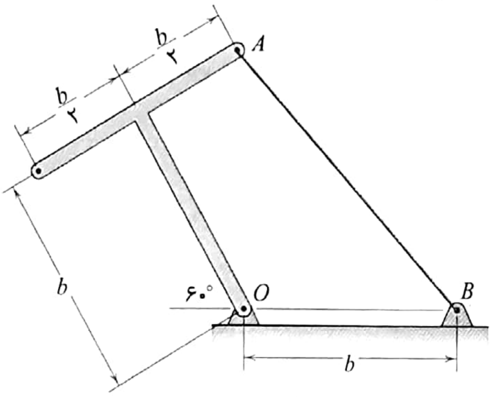
شکل م ۳۴.۲

۳۵.۲ گشتاور حاصل از وارد آمدن نیروی ۲۵۰N بر دستهٔ آچار نشان‌داده‌شده را حول پیچ محاسبه کنید.



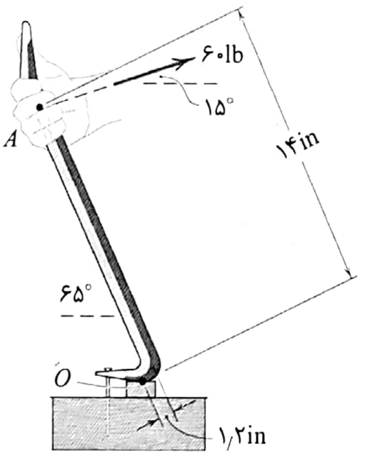
شکل م ۳۵.۲

۳۶.۲ کشش در کابل *AB* برابر ۱۰۰N است. گشتاور حاصل از این کشش حول نقطهٔ *O* را برای حالتی که این کشش بر نقطهٔ *A* بر روی میلهٔ T شکل وارد می‌شود محاسبه کنید. اندازهٔ *b* برابر ۶۰۰mm است.



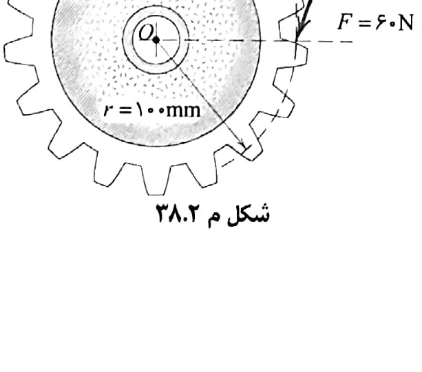
شکل م ۳۶.۲

۳۷.۲ اهرمی مانند شکل برای خارج‌کردن یک میخ استفاده می‌شود. مقدار گشتاور حاصل از نیروی ۶۰lb را حول نقطهٔ *O* محاسبه کنید. نقطهٔ *O* همان نقطهٔ تماس میان اهرم و تکیه‌گاه می‌باشد.



شکل م ۳۷.۲

۳۸.۲ نیروی **F** معادل ۶۰N بر دنده وارد می‌شود. گشتاور حاصل از **F** حول *O* را به‌دست آورید.

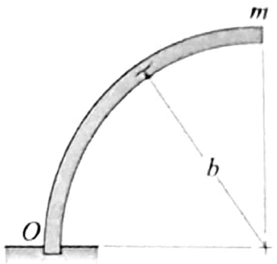


شکل م ۳۸.۲

Scanned by CamScanner

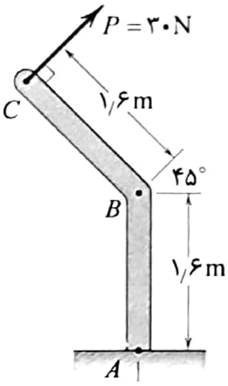
مسائل برگزیده

۳۹.۲ عضو ربع دایره‌ای باریک با جرم m بر روی تکیه‌گاه O قرار گرفته است. گشتاور وزن آن حول نقطهٔ O را تعیین کنید. برای تعیین مرکز جسم، می‌توانید از جدول د.۳ استفاده نمایید.



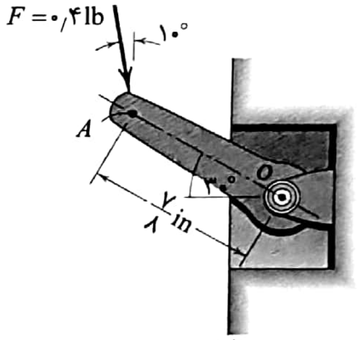
شکل م ۳۹.۲

۴۰.۲ نیروی **P** به‌مقدار ۳۰N به‌صورت عمودی بر قسمت BC از میلهٔ خمیده وارد می‌شود. گشتاور حاصل از **P** حول نقاط A و B را تعیین کنید.



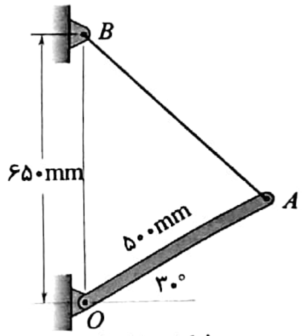
شکل م ۴۰.۲

۴۱.۲ گشتاور نیروی ۰٫۴lb را حول لولای O برای کلید دیواری نشان‌داده‌شده محاسبه نمایید.



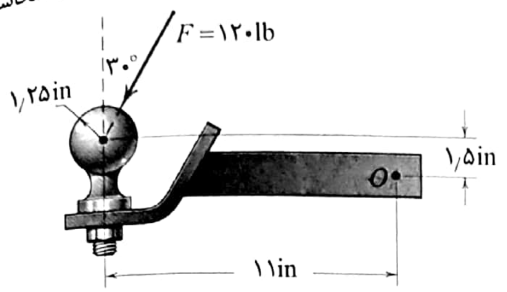
شکل م ۴۱.۲

۴۲.۲ کابل AB دارای کششی معادل ۴۰۰N است. گشتاور این کشش حول نقطهٔ O را برای حالتی که این نیروی کشش بر نقطهٔ A، روی میلهٔ باریک نشان‌داده‌شده در شکل وارد می‌شود، به‌دست آورید.



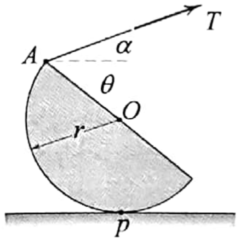
شکل م ۴۲.۲

۴۳.۲ یک یدک‌کش به‌هنگام حرکت روبه‌جلو، نیرویی معادل $F = ۱۲۰lb$ را مانند شکل به اتصال کروی وارد می‌کند. گشتاور این نیرو را حول نقطهٔ O محاسبه کنید.



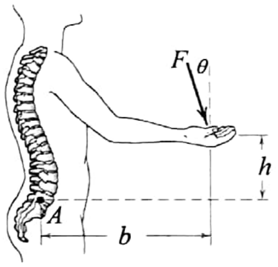
شکل م ۴۳.۲

۴۴.۲ گشتاور حاصل از نیروی کشش T حول نقاط P و O را به‌دست آورید.



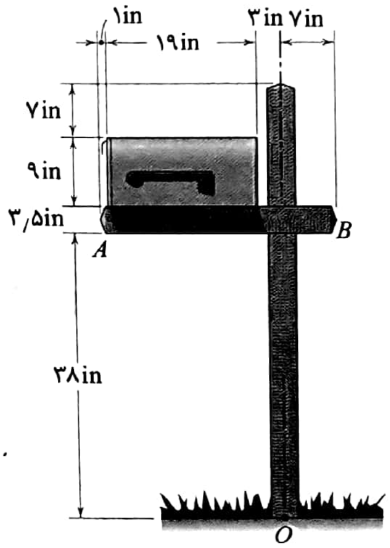
شکل م ۴۴.۲

۴۵.۲ نقطهٔ A که در محدودهٔ تحتانی کمر واقع‌شده، قسمتی از ستون فقرات است که بیشترین فشار را به‌هنگام جلوگیری از خم‌شدن بدن در مقابل خمش حاصل از نیروی F حول A تحمل می‌کند. برای مقادیر داده‌شدهٔ F، b و h، زاویهٔ θ را طوری مشخص کنید که بیشترین خمش را به کمر وارد می‌کند.



شکل م ۴۵.۲

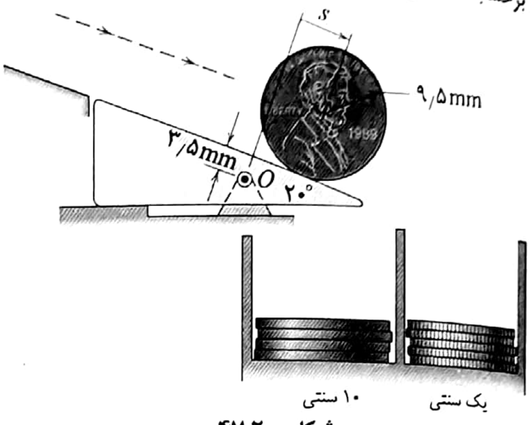
۴۶.۲ گشتاور برایند حاصل از صندوق پستی و عضو صلیبی‌شکل AB حول نقطهٔ O را به‌دست آورید. وزن صندوق برابر ۴lb و وزن عضو صلیبی‌شکل معادل ۱۰lb می‌باشد. وزن هر دو جسم به مرکز هندسی آنها وارد می‌شود.



شکل م ۴۶.۲

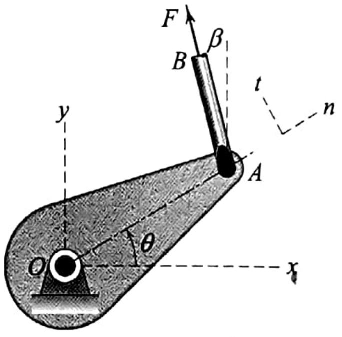
Scanned by CamScanner

۴۷.۲ سازوکار کارکرد یک دستگاه دسته‌بندی سکه به‌صورت زیر است: سکه‌های یک‌سنتی و ده‌سنتی بر روی سطح شیبدار ۲۰ درجه به پایین می‌غلتند و در انتهای آن قسمتی مثلث‌شکل قرار دارد که می‌تواند آزادانه حول محور افقی گذرنده از O بچرخد. سکه‌های یک‌سنتی سبک‌تر بوده (۲٫۲۸ گرم) و لذا قسمت مثلثی ثابت می‌ماند و باعث می‌شود که سکه به حفرهٔ سمت راست وارد شود، اما سکه‌های ده‌سنتی سنگین‌تر می‌باشند (۶٫۳ گرم) که باعث می‌شود بخش مثلثی در جهت ساعتگرد به چرخش درآید و سکه‌ها در حفرهٔ سمت چپی سقوط کند. گشتاور حاصل از یک سکهٔ یک‌سنتی حول O برحسب فاصلهٔ اُریب s به میلیمتر را محاسبه کنید.



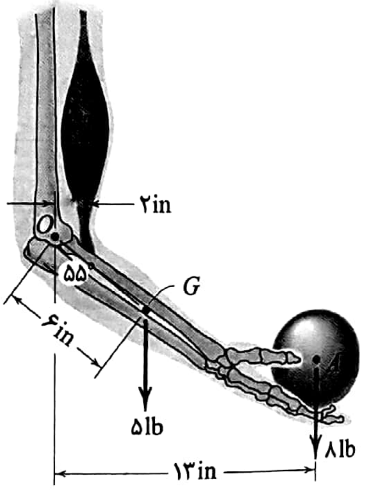
شکل م ۴۷.۲

۴۸.۲ میل‌لنگ مسئلهٔ ۱۰.۲ را در نظر بگیرید. اگر $\overline{OA} = ۵۰\text{mm}$، $\theta = ۲۵°$ و $\beta = ۵۵°$ باشد، گشتاور نیروی **F** با اندازهٔ $F = ۲۰\text{N}$ را حول نقطهٔ O محاسبه کنید.



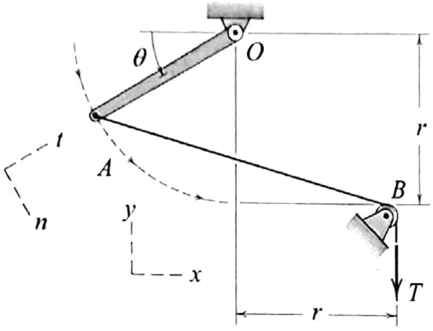
شکل م ۴۸.۲

۴۹.۲ قسمت‌های ساعد دست در شکل نشان داده شده‌اند. وزن قسمت جلو بازو برابر ۵lb، و مرکز جرم آن نقطهٔ G است. برایند گشتاورها را حول نقطهٔ O بر روی آرنج دست برای نیروهای حاصل از وزن جلو بازو و کره به‌دست آورید. نیروی کشش عضلهٔ بازو چقدر باشد تا گشتاور معادل حول نقطهٔ O برابر صفر شود؟



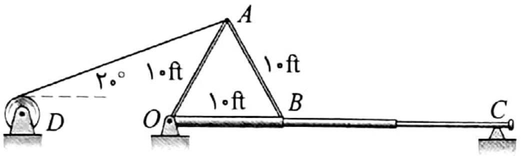
شکل م ۴۹.۲

۵۰.۲ سازوکار مسئلهٔ ۱۶.۲ بار دیگر در اینجا نشان داده شده است. برای شرایط $\theta = ۴۰°$، $T = ۱۵۰\text{N}$ و $r = ۲۰۰\text{mm}$، گشتاور حول O برای نیروی کشش T اعمال‌شده به‌وسیلهٔ کابل AB به نقطهٔ A را محاسبه کنید.



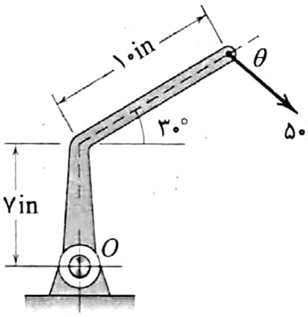
شکل م ۵۰.۲

۵۱.۲ برای بالا بردن میلهٔ پرچم OC، قاب سبک OAB به میله وصل شده و کششی معادل ۷۸۰lb به‌وسیلهٔ قرقرهٔ کشاننده در نقطهٔ D در کابل وارد می‌شود. گشتاور M_O حاصل از این کشش را حول نقطهٔ O محاسبه کنید.



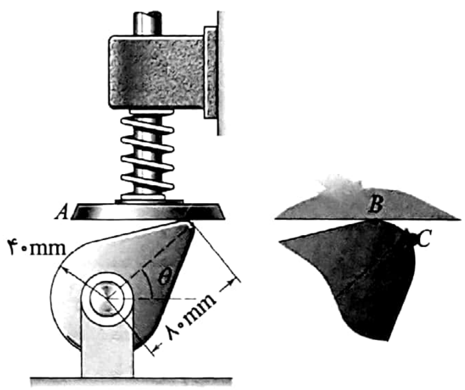
شکل م ۵۱.۲

۵۲.۲ زاویهٔ θ را طوری تعیین کنید که گشتاور M_O حاصل از نیروی ۵۰lb حول نقطهٔ O به حداکثر مقدار خود برسد. همچنین مقدار M_O را محاسبه کنید.



شکل م ۵۲.۲

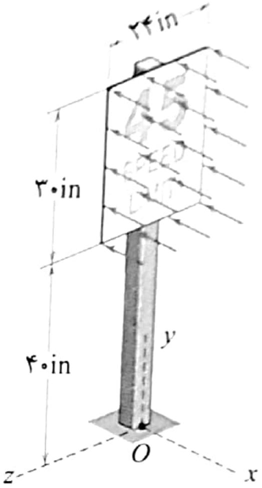
۵۳.۲ پیرو بارگذاری‌شده به‌وسیلهٔ فنر A بر روی قسمت دایره‌ای بادامک قرار می‌گیرد تا وقتی‌که قسمت تیز بادامک، آن را بلند کند. نیروی لازم برای بلندکردن پیرو متناسب با جابه‌جایی h از پایین‌ترین قسمت است. با هدف طراحی، زاویهٔ θ را طوری تعیین کنید که گشتاور نیروی تماس بر روی بادامک حول نقطهٔ O ماکزیمم باشد. با توجه به نمای نزدیک محل تماس، از فاصلهٔ میان محل تماس B و انتهای بادامک C صرف‌نظر کنید.



شکل م ۵۳.۲

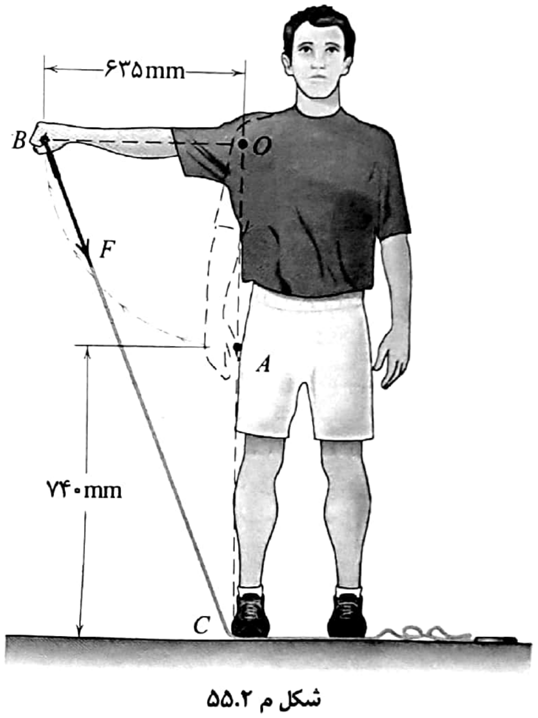
Scanned by CamScanner

۵۴.۲ در اثر وزش باد به‌طور عمودی بر تابلوی مستطیلی‌شکل، فشار یکنواختی معادل $۳٫۵\,lb/ft^2$ در جهت نشان‌داده شده در شکل وارد می‌شود. گشتاور نیروی حاصل از این فشار حول نقطهٔ O را به‌دست آورید. نتیجهٔ به‌دست آمده را به‌شکل یک بردار، در مختصات داده شده بیان کنید.



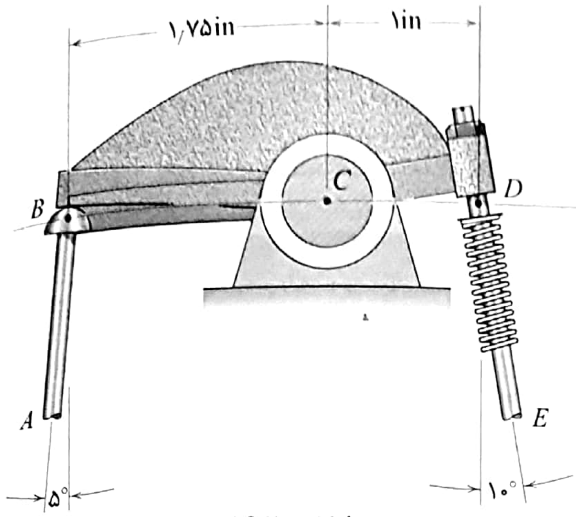
شکل م ۵۴.۲

۵۵.۲ یک شخص در حال نرمش، ابتدا دست خود را در حالت عمودی OA آویزان می‌کند که در این حالت نوار کششی در حالت بدون کشش قرار دارد. او سپس دست خود را به حالت افقی OB می‌چرخاند. ضریب کشسانی نوار برابر $k = ۶۰\,N/m$ است، به این معنی که نوار به‌ازای هر یک متر افزایش طول نیاز به $۶۰\,N$ نیرو دارد. گشتاور حاصل از نیرویی که نوار در نقطهٔ B به دست وارد می‌کند را حول نقطهٔ O، به‌دست آورید.



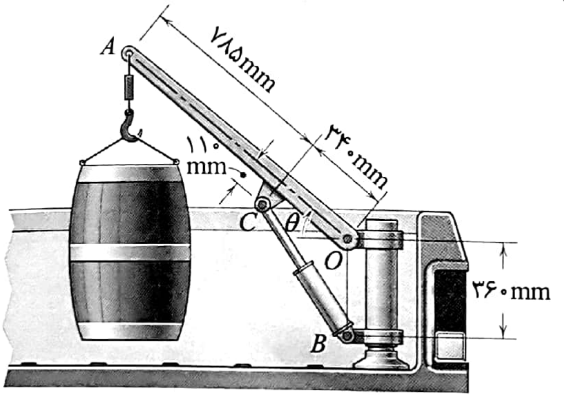
شکل م ۵۵.۲

۵۶.۲ اهرم خودکار BD متعلق به یک موتور اتومبیل بر روی یک محور ناچرخنده در نقطهٔ C قرار گرفته است. اگر مقدار نیروی وارد شده به‌وسیلهٔ میلهٔ رابط AB در طراحی، برابر $۸۰\,lb$ در نظر گرفته شده باشد، مقدار نیرویی که لازم است میلهٔ دریچهٔ DE بر D وارد کند تا برایند گشتاور حول نقطهٔ C معادل صفر شود را به‌دست آورید. همچنین برایند این دو نیروی وارد شده بر اهرم خودکار را معین کنید. توجه کنید که نقاط B، C و D هر سه بر روی یک خط افقی قرار دارند و میلهٔ رابط و میلهٔ دریچه، هر دو نیروی خود را در راستای محورشان وارد می‌کنند.



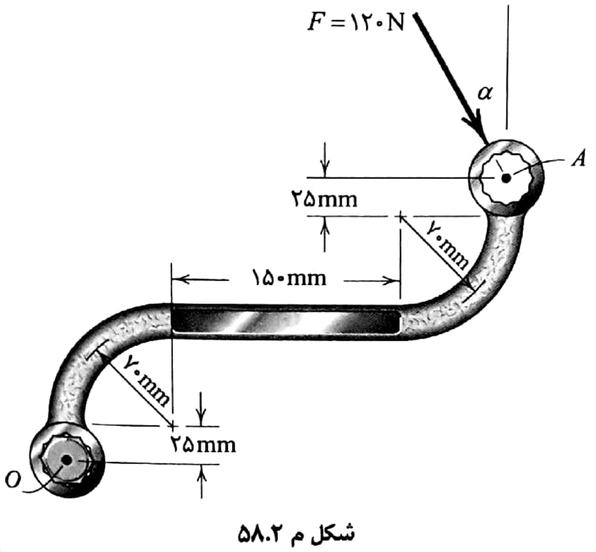
شکل م ۵۶.۲

۵۷.۲ جرثقیل کوچکی بر روی یک بستر بالاکشنده تعبیه شده و وظیفهٔ حمل بارهای سنگین به‌عهدهٔ آن است. هنگامی‌که زاویهٔ بازوی بالابرنده برابر $\theta = ۴۰°$ است، نیروی داخل سیلندر هیدرولیکی BC معادل $۴٫۵\,kN$ می‌باشد، و جهت نیروی واردشده بر نقطهٔ C، از B به C خواهد بود (سیلندر در حالت فشاری قرار دارد). گشتاور حاصل از این نیروی $۴٫۵\,kN$ را حول لولای بازوی بالابرنده در نقطهٔ O، به‌دست آورید.



شکل م ۵۷.۲

۵۸.۲ نیروی $۱۲۰\,N$ همانند شکل به یک انتهای آچار خمیده اعمال می‌شود. اگر $\alpha = ۳۰°$ باشد، گشتاور F حول نقطهٔ O از پیچ را معین کنید. همچنین مقدار α را طوری تعیین کنید که مقدار گشتاور حول O به حداکثر مقدار خود برسد. همچنین مقدار این گشتاور حداکثر را نیز به‌دست آورید.



شکل م ۵۸.۲

Scanned by CamScanner

۵.۲ کوپل[1]

گشتاور به‌وجود آمده توسط دو نیروی مساوی، و در جهت‌های خلاف هم و غیرواقع بر یک خط، *کوپل* می‌گویند. کوپل‌ها دارای ویژگی‌های منحصربه‌فردی هستند و دارای استفاده‌های مهمی در علم مکانیک می‌باشند.

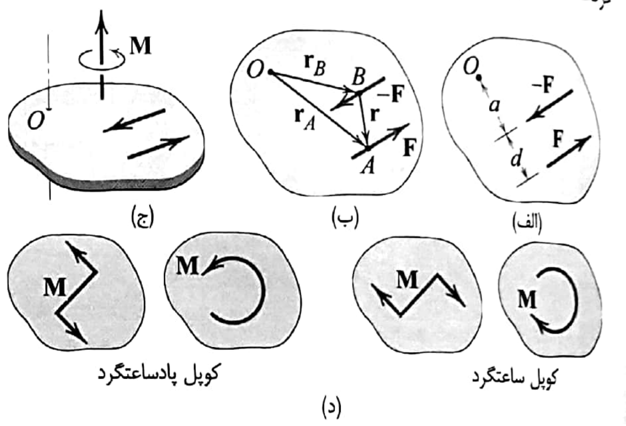
با توجه به شکل ۱۰.۲ (الف)، اثر دو نیروی هم‌اندازه و در جهت‌های مخالف **F** و **F**−، به فاصلهٔ d از یکدیگر را در نظر بگیرید. این دو نیرو را نمی‌توان تبدیل به یک تک‌نیرو نمود زیرا مجموع آنها در هر جهتی برابر صفر خواهد بود؛ تنها تأثیر آنها تمایل برای ایجاد چرخش می‌باشد. ترکیب گشتاور این دو نیرو حول یک محور عمود بر صفحهٔ آنها که از هر نقطه‌ای مانند O می‌گذرد، برابر کوپل **M** است. این کوپل دارای اندازه‌ای به‌صورت زیر است

$$M = F(a+d) - Fa$$

یا

$$M = Fd$$

جهت آن برای حالت نشان‌داده‌شده درصورتی‌که از نمای بالا به آن نگاه شود، روی این صفحه پادساعتگرد است. دقت کنید که اندازهٔ کوپل از مقدار فاصلهٔ a، که همان فاصلهٔ میان نیروها و مرکز گشتاور O می‌باشد، مستقل است. پس می‌توان نتیجه گرفت که گشتاور یک کوپل برای هر مرکز گشتاوری، مقداری ثابت دارد.



شکل ۱۰.۲

روش جبر برداری

همچنین می‌توانیم گشتاور یک کوپل را با استفاده از عملیات جبر برداری بیان نماییم. با توجه به روش ضرب خارجی توضیح داده شده در معادلهٔ (۶.۲)، گشتاور حاصل حول نقطهٔ O برای نیروهای تشکیل‌دهندهٔ کوپل در شکل ۱۰.۲ (ب)، به‌صورت زیر است

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

که $\mathbf{r}_A$ و $\mathbf{r}_B$ بردارهای مکانی هستند که از نقطهٔ O آغاز شده و به نقطهٔ دلخواه A و B واقع بر خط اثر نیروهای **F** و **F**− ختم می‌شوند. با توجه به اینکه $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$ است، می‌توانیم **M** را به‌صورت زیر بنویسیم

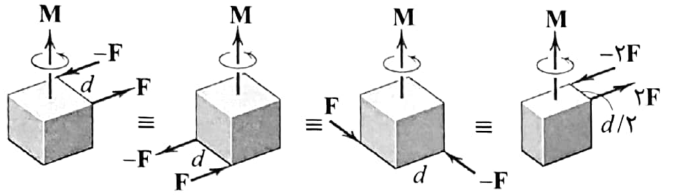
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

همان‌طورکه می‌بینید، بار دیگر عبارت نشان‌دهندهٔ گشتاور، هیچ وابستگی به مرکز گشتاور O ندارد و لذا برای هر مرکز گشتاوری یکسان است. درنتیجه همان‌طورکه در شکل ۱۰.۲ (ج) نشان داده شده، **M** را می‌توانیم با بردار آزادی نشان دهیم که امتداد آن عمود بر صفحهٔ حاوی کوپل بوده و علامت آن با استفاده از قانون دست راست مشخص می‌شود.

با توجه به اینکه کوپل **M** همیشه بر سطح حاوی دو نیروی تشکیل‌دهندهٔ کوپل عمود است، می‌توانیم در تحلیل دوبعدی، براساس قراردادهای شکل ۱۰.۲ (د) جهت یک بردار کوپل را ساعتگرد یا پادساعتگرد فرض کنیم. در آینده به‌هنگام برخورد با بردارهای کوپل در مسائل سه‌بعدی، از بردار برای نشان دادن آنها استفاده خواهیم کرد و در محاسبات ریاضی آنها علامتشان را در نظر خواهیم گرفت.

کوپل‌های برابر

تغییر در مقادیر F و d، تا زمانی‌که حاصل Fd ثابت باشد، تغییری در کوپل داده شده ایجاد نمی‌کند. همچنین، اگر نیروهای کوپل در یک سطح متفاوت اما موازی با سطح اولیه اعمال شوند، تغییری در کوپل حاصل نخواهد شد. شکل ۱۱.۲، چهار حالت متفاوت برای نشان دادن کوپل **M** را نشان می‌دهد. در هریک از چهار حالت، کوپل‌ها با یکدیگر برابر بوده و به‌وسیلهٔ همان بردار آزادی که تمایل به چرخش اجسام را دارد، نشان داده می‌شوند.



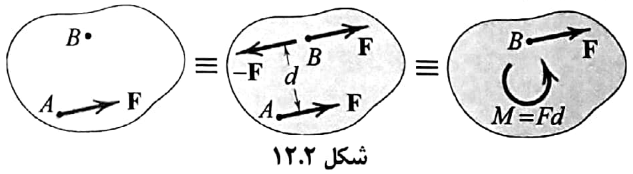
شکل ۱۱.۲

سیستم‌های کوپل ـ نیرو

اثر یک نیرو بر روی یک جسم به‌صورت تمایل نیرو برای هل‌دادن و یا کشیدن جسم در جهت نیرو و یا چرخاندن آن حول هر محور ثابتی غیرمتقاطع با خط اثر نیرو، ظاهر می‌شود. راحت‌تر است که این دو اثر را با جایگزین کردن نیروی داده شده به‌وسیلهٔ یک نیروی موازی و یک کوپل برای جبران کردن تغییر در گشتاور نیرو، نشان داد.

در شکل ۱۲.۲ جایگزین کردن یک نیرو، با یک نیرو و یک کوپل نمایش داده شده است، که در آن نیروی **F** که بر نقطهٔ A وارد می‌شود، به‌وسیلهٔ یک نیروی مساوی **F** در نقطهٔ B و همچنین یک کوپل پادساعتگرد $M = Fd$ جایگزین می‌شود. روند این جایگزینی در شکل وسط نشان داده شده است، که در آن نیروهای مساوی و خلاف جهت **F** و **F**− به نقطهٔ B اضافه می‌شوند، بدون آنکه تغییری در اثرات خارجی وارد بر جسم ایجاد شود. حال همان‌طورکه در تصویر سمت راست نشان داده شده است، نیروی اولیه در A و نیروی مساوی و خلاف جهت در B، کوپل $M = Fd$ را نتیجه می‌دهند. در نتیجه توانستیم نیروی اولیه در A را به‌وسیلهٔ یک نیروی مساوی در B و یک کوپل جایگزین کنیم، بدون آنکه تغییری در تأثیر خارجی نیرو بر روی جسم ایجادکنیم. ترکیب نیرو و کوپل در قسمت راست در شکل ۱۲.۲ را *سیستم کوپل ـ نیرو* می‌گویند.

با معکوس کردن این روند، می‌توانیم یک کوپل و یک نیروی واقع در سطح آن کوپل را ترکیب کرده و یک تک‌نیروی مساوی به‌دست آوریم. جایگزین نمودن یک نیرو با یک سیستم کوپل ـ نیرو و بالعکس، کاربردهای بسیاری در علم مکانیک دارد و لازم است که به‌خوبی فراگرفته شود.



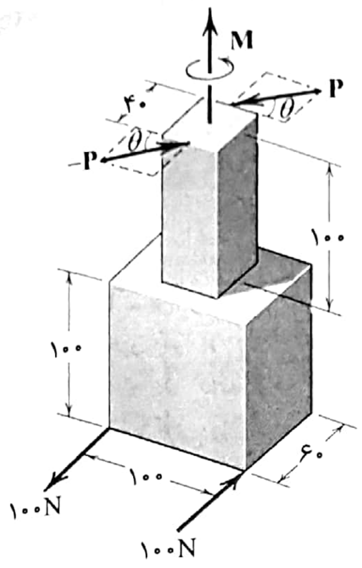
شکل ۱۲.۲

1. زوج‌نیرو یا جفت‌نیرو نیز نامیده می‌شود. ـ م.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۷.۲

عضو سازه‌ای صلب تحت تأثیر یک کوپل تشکیل‌شده از دو نیروی ۱۰۰N قرار گرفته است. این کوپل را با یک کوپل معادل تشکیل‌شده از دو نیروی **P** و **P**−، که اندازه‌ای برابر ۴۰۰N دارند، جایگزین کنید. ضمناً زاویهٔ θ را به‌دست آورید.



ابعاد برحسب میلیمتر

حل: اگر از بالا به سازه نگاه کنیم، کوپل اولیه در جهت ساعتگرد می‌باشد و مقدار آن برابر است با

$[M = Fd]$ $\qquad M = ۱۰۰(۰/۱) = ۱۰ N\cdot m$

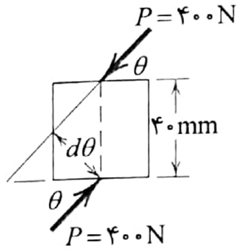
نیروهای **P** و **P**− یک کوپل ساعتگرد تولید می‌کنند

$M = ۴۰۰(۰/۰۴۰)\cos\theta$

❶ با مساوی قرار دادن دو عبارت خواهیم داشت

$۱۰ = (۴۰۰)(۰/۰۴۰)\cos\theta$

ج. $\theta = \cos^{-۱}\frac{۱۰}{۱۶} = ۵۱/۳°$

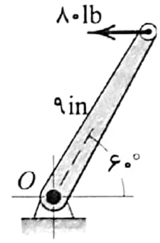


راهنمایی مفید

❶ با توجه به اینکه دو کوپل مساوی با یکدیگر به‌صورت بردارهای آزاد موازی با هم می‌باشند، تنها اندازه‌های مهم، آنهایی هستند که فاصلهٔ میان دو نیروی کوپل‌ها را بیان می‌کنند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۸.۲

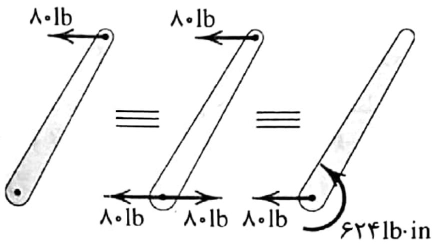
نیروی ۸۰lb افقی وارد شده بر اهرم را با یک سیستم معادل تشکیل شده از یک نیرو در نقطهٔ O و یک کوپل جایگزین نمایید.



حل: دو نیروی مساوی و خلاف جهت ۸۰lb را بر O اعمال کرده و کوپل پادساعتگرد حاصل را محاسبه می‌کنیم

ج. $[M = Fd]$ $\qquad M = ۸۰(۹\sin۶۰°) = ۶۲۴ lb\cdot in$

❶ بنابراین نیروی اولیه برابر است با یک نیروی ۸۰lb در نقطهٔ O و یک کوپل به‌مقدار ۶۲۴lb·in که در قسمت سوم شکل مسئله نشان داده شده است.



راهنمایی مفید

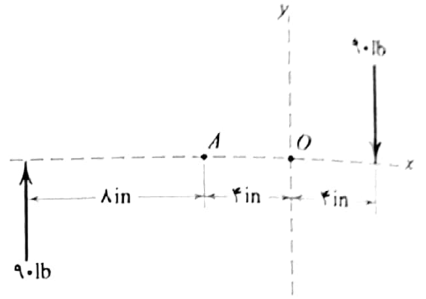
❶ معمولاً با عکس این مسئله یعنی جایگزین کردن یک نیرو و کوپل به‌وسیلهٔ یک تک‌نیروی معادل، مواجه می‌شویم. این روند معکوس مشابه است، زیرا کوپل با دو نیرویی جایگزین می‌شود که یکی از آنها با نیروی ۸۰lb در O مساوی و مخالف است. بازوی گشتاور برای نیروی دوم برابر با $M/F = ۶۲۴/۸۰ = ۷/۷۹in$ خواهد بود که معادل ۹sin۶۰ است، و می‌توان با آن خط اثر تک‌نیروی معادل ۸۰lb را به‌دست آورد.

Scanned by CamScanner

مسائل

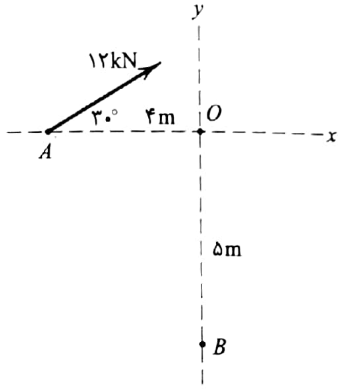
مسائل مقدماتی

۵۹.۲ گشتاور حاصل از دو نیروی ۹۰lb را حول (الف) نقطهٔ O و (ب) نقطهٔ A به‌دست آورید.



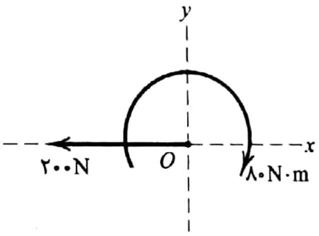
شکل م ۵۹.۲

۶۰.۲ نیروی ۱۲kN وارد بر نقطهٔ A را به‌وسیلهٔ یک سیستم کوپل ــ نیروی معادل در (الف) نقطهٔ O و (ب) در نقطهٔ B جایگزین کنید.



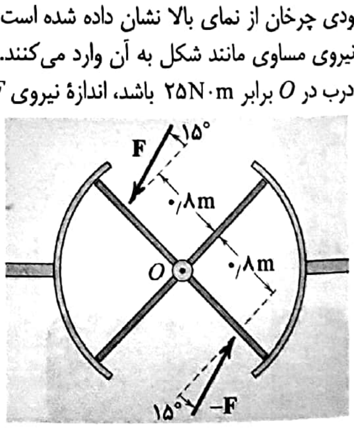
شکل م ۶۰.۲

۶۱.۲ سیستم کوپل ـ نیرو در نقطهٔ O را با یک تک‌نیرو جایگزین نمایید. مختصهٔ y_A که همان محل برخورد خط اثر این نیرو با محور y است را به‌دست آورید.



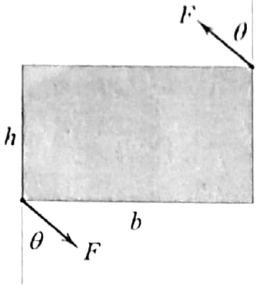
شکل م ۶۱.۲

۶۲.۲ یک درب ورودی چرخان از نمای بالا نشان داده شده است. دو نفر هم‌زمان به درب می‌رسند و دو نیروی مساوی مانند شکل به آن وارد می‌کنند. اگر گشتاور حاصل حول محور چرخش درب در O برابر ۲۵N·m باشد، اندازهٔ نیروی F را تعیین کنید.



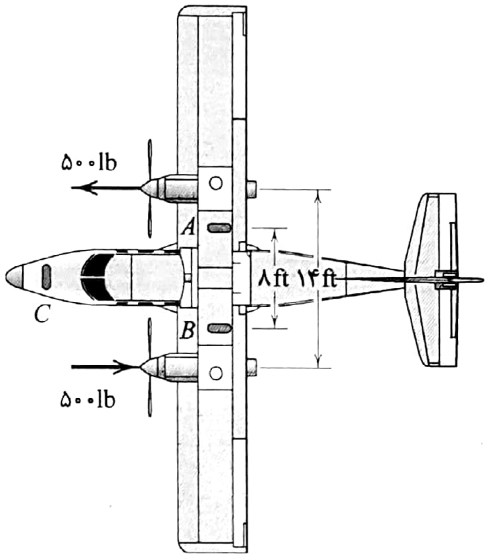
شکل م ۶۲.۲

۶۳.۲ گشتاور حاصل از کوپل وارد شده بر صفحهٔ مستطیلی زیر را به‌دست آورید. مقدار جواب را برای حالت خاص $\theta = ۰$، $b = ۰$ و $h = ۰$ به‌دست آورید.



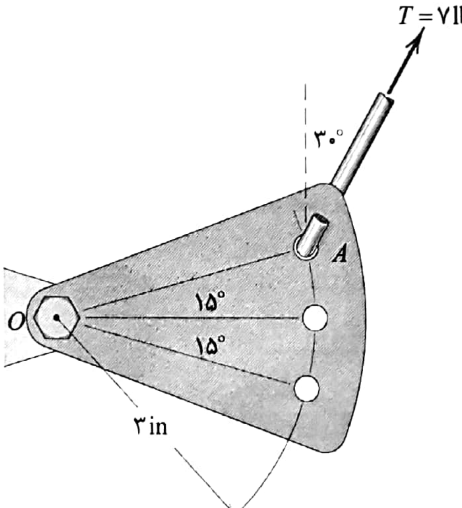
شکل م ۶۳.۲

۶۴.۲ برای بخشی از یک آزمایش، دو موتور هواپیما طوری تنظیم شده‌اند که برایند نیروها در سمت جلو و عقب مانند شکل باشد. چه نیروی Fای باید از زمین بر چرخ‌های در حال ترمز در A و B وارد شود تا اثر چرخش دو نیروی حاصل از ملخ‌ها را خنثی کند؟ از چرخ واقع در نقطهٔ C که در حالت غیرترمزی و با زاویهٔ °۹۰ قرار دارد، صرف‌نظر کنید.



شکل م ۶۴.۲

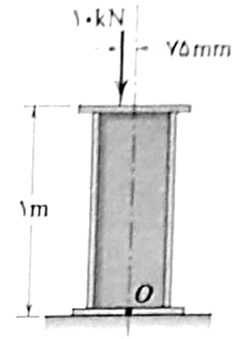
۶۵.۲ نیروی ۷lb از طرف اهرم کنترل بر مقطع نشان‌داده‌شده وارد می‌شود. سیستم کوپل ـ نیروی معادل با آن را در نقطهٔ O به‌دست آورید.



شکل م ۶۵.۲

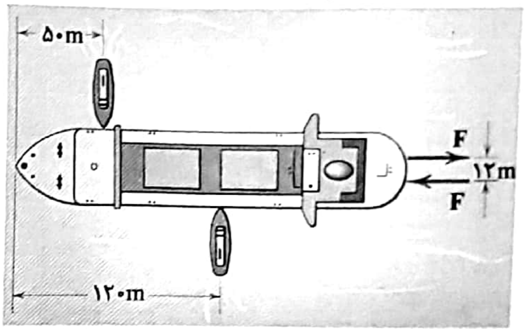
Scanned by CamScanner

۶۶.۲ نیروی ۱۰kN واردشده بر ستون فولادی را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O جایگزین نمایید. این جایگزین کردن به کرّات در طراحی سازه‌ها استفاده می‌شود.



شکل م ۶۶.۲

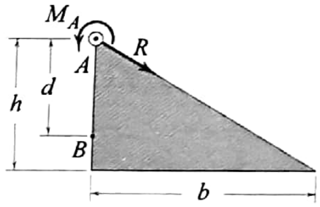
۶۷.۲ هریک از پروانه‌های یک کشتی دوموتوره نیرویی برابر ۳۰۰kN تولید می‌کنند. در آزمایش کردن کشتی، یک پروانه در حالت چرخش با سرعت کامل رو به جلو بوده و دیگری با همان سرعت رو به عقب می‌چرخد. نیروی P واردشده از هر یدک‌کش چقدر باشد تا اثر پروانه‌های کشتی را خنثی کند؟



شکل م ۶۷.۲

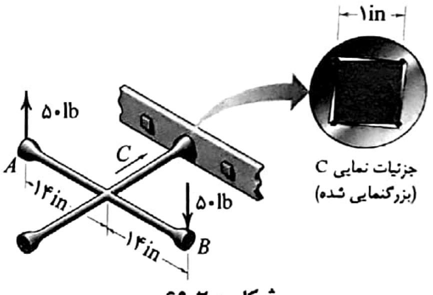
مسائل برگزیده

۶۸.۲ قرار است سیستم کوپل-نیروی نشان‌داده‌شده در A با یک تک‌نیروی معادل در نقطهٔ B بر روی مرز عمودی صفحه‌ای مطابق شکل جایگزین شود. فاصلهٔ d میان A و B را تعیین کنید.



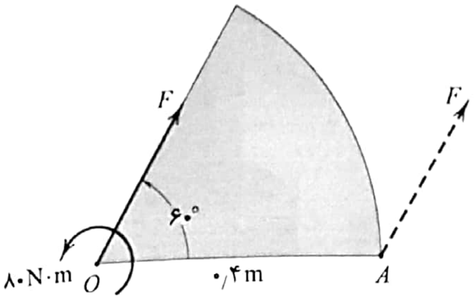
شکل م ۶۸.۲

۶۹.۲ برای سفت کردن یک پیچ سرمربعی از یک آچار چرخ استفاده می‌کنیم. اگر نیروهای ۵۰lb همانند شکل به آچار اعمال شوند، اندازهٔ نیروی F وارد شده بر چهار نقطهٔ تماس پیچ یک‌اینچی را طوری تعیین کنید که اثر خارجی آنها بر روی پیچ برابر برایند حاصل از دو نیروی ۵۰lb باشد. نیروها را عمود بر سطوح سر پیچ فرض کنید.



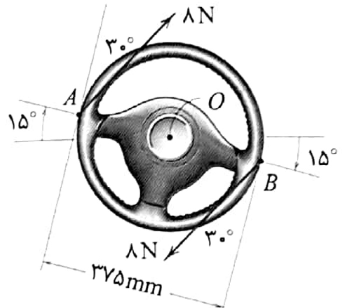
شکل م ۶۹.۲

۷۰.۲ یک سیستم کوپل-نیرو در نقطهٔ O بر روی قطاع دایره‌ای ۶۰ درجه وار
می‌شود. اندازهٔ نیروی F را برای حالتی تعیین کنید که سیستم داده شده با یک تکنیر
در گوشهٔ A از قطاع، جایگزین شود.



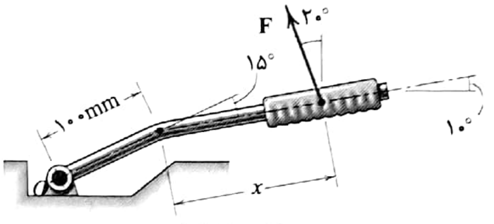
شکل م ۷۰.۲

۷۱.۲ شخصی در یک گردش ملایم به راست، نیروهای نشان‌داده‌شده را بر روی
فرمان اتومبیل اعمال می‌کند. دقت کنید که هر نیرو از یک مؤلفهٔ مماسی و یک مؤلفه
شعاعی به سمت داخل تشکیل شده است. گشتاور وارد بر حول نقطهٔ O بر روی
میل‌فرمان را به‌دست آورید.



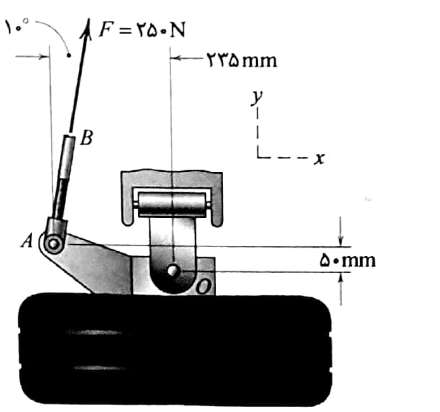
شکل م ۷۱.۲

۷۲.۲ نیروی **F** با اندازهٔ ۵۰N بر روی اهرم ترمز دستی یک اتومبیل د
موقعیت $x = ۲۵۰\text{mm}$ اعمال می‌شود. نیرو را با یک سیستم کوپل-نیرو در لولای
O جایگزین نمایید.



شکل م ۷۲.۲

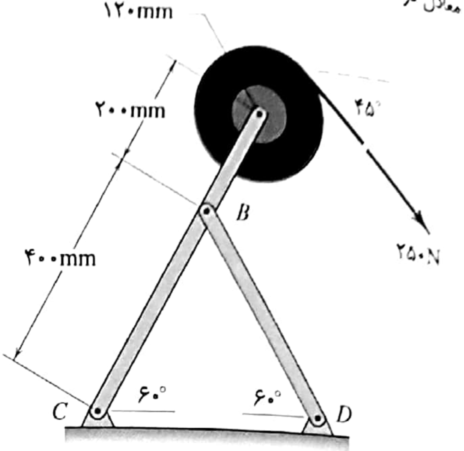
۷۳.۲ میلهٔ AB نیرویی معادل ۲۵۰N را بر سگدست فرمان AO همانند شکل وارد
می‌کند. این نیرو را با یک سیستم کوپل-نیرو در O جایگزین کنید.



شکل م ۷۳.۲

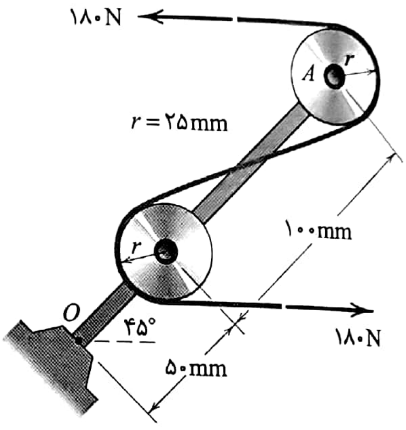
Scanned by CamScanner

۷۴.۲ کشش ۲۵۰N بر یک کابل پیچیده شده حول یک دیسک وارد می‌شود. سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ C را به‌دست آورید. برای این کار ابتدا سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ A را به‌دست آورید.



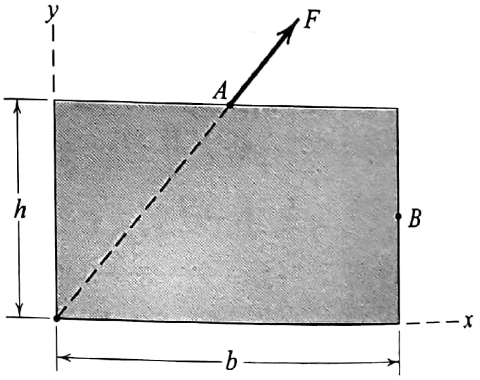
شکل م ۷۴.۲

۷۵.۲ سیستم تشکیل‌شده از میلهٔ OA، دو قرقرهٔ یکسان و قسمتی از یک نوار باریک، مطابق شکل تحت تأثیر دو نیروی کششی ۱۸۰N قرار گرفته‌اند. سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O را به‌دست آورید.



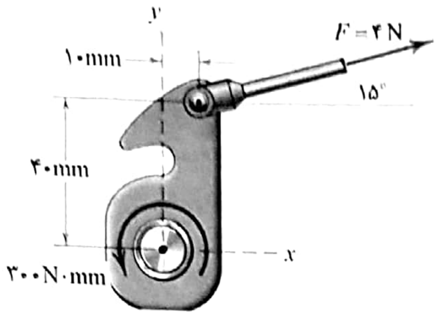
شکل م ۷۵.۲

۷۶.۲ نقاط A و B، نقاط میانی اضلاع مستطیل زیر هستند. نیروی F وارد شده بر A را به‌وسیلهٔ یک سیستم کوپل-نیرو در B جایگزین کنید.



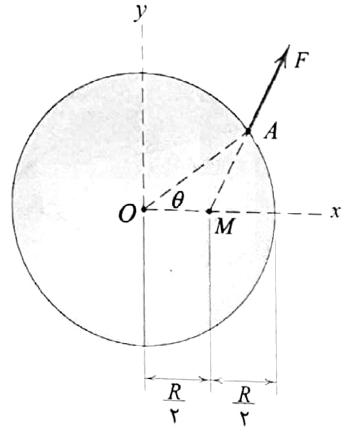
شکل م ۷۶.۲

۷۷.۲ دستگاه نشان‌داده‌شده قسمتی از تنظیم‌کنندهٔ صندلی یک اتومبیل است. یک نیروی ۴N بر نقطهٔ A و همچنین یک گشتاور بازگردانندهٔ ۳۰۰N·mm به‌وسیلهٔ یک فنر مخفی به این قسمت وارد می‌شود. مختصات محل برخورد خط اثر تک‌نیروی معادل با محور y را به‌دست آورید.



شکل م ۷۷.۲

۷۸.۲ نیروی F در راستای خط MA عمل می‌کند که M بر وسط شعاع در راستای محور x قرار گرفته است. سیستم کوپل-نیروی معادل را در O برای زاویهٔ $\theta = 40°$ به‌دست آورید.



شکل م ۷۸.۲

۶.۲ برایندها

ویژگی‌های اصلی نیرو، گشتاور و کوپل در بخش‌های گذشته مورد بررسی قرار گرفت. حال آماده‌ایم تا اثر برایند یک گروه یا یک *سیستم* از نیروها را بررسی کنیم. بیشتر مسائل در مکانیک، با یک سیستم نیرو سروکار دارند و عموماً لازم است تا برای بررسی اثر آن سیستم، آن را به ساده‌ترین شکل ممکن درآوریم. برایند یک سیستم نیرو، ساده‌ترین ترکیب از آن نیروهاست که می‌تواند جایگزین نیروهای اولیه شده، بدون آنکه تغییری در اثرات خارجی تحت تأثیر نیروها ایجاد نماید.

تعادل، حالتی است که در آن برایند تمام نیروهای وارد بر آن برابر صفر است. این حالت، در استاتیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. هنگامی‌که برایند نیروهای وارد بر یک جسم صفر نباشد، شتاب جسم را می‌توان با مساوی قرار دادن برایند نیروها با حاصل ضرب جرم جسم در شتاب آن به‌دست آورد. این حالت در دینامیک بررسی می‌شود. لذا به‌دست آوردن برایند نیروها هم برای استاتیک و هم برای دینامیک لازم است.

متداول‌ترین شکل از سیستم نیرو وقتی اتفاق می‌افتد که تمام نیروها در یک صفحه، مثلاً صفحهٔ x-y قرار داشته باشند که می‌توانید نمونهٔ آن را در مورد سیستمی با سه نیروی $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_3$ در شکل ۱۳.۲ (الف) ببینید. اندازه و جهت نیروی برایند $\mathbf{R}$ را، با تشکیل‌دادن *چندضلعی نیرو* همانند قسمت (ب) در شکل، به‌دست می‌آوریم؛ به این صورت که نیروها را به‌صورت نوک به دم با هر ترتیب دلخواهی با یکدیگر جمع می‌کنیم. لذا برای سیستمی از نیروهای هم‌صفحه، می‌توانیم بنویسیم

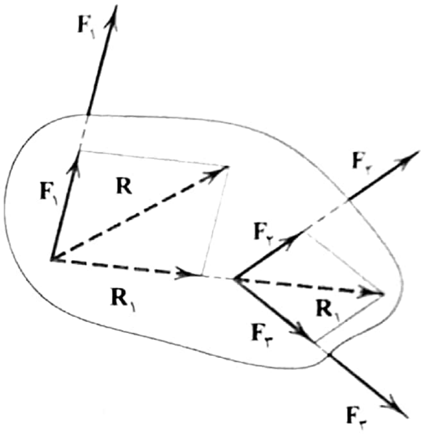
$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots = \Sigma\mathbf{F}$$

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} \tag{۹.۲}$$

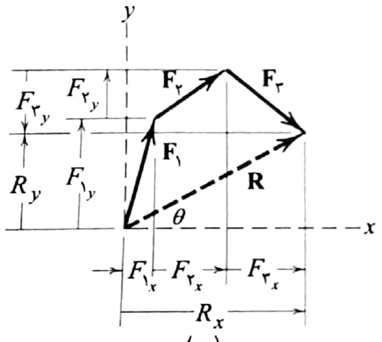
$$\theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1}\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$$

Scanned by CamScanner

در ترسیم، برای درست به‌دست آوردن خط اثر $\mathbf{R}$، باید خط اثرهای درست نیروها را حفظ کرده و با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع، نیروها را با یکدیگر جمع کنید. این عمل را می‌توانید در شکل ۱۳.۲ (الف) برای سه حالت نیرو مشاهده نمایید که در آن $\mathbf{R}_1$، مجموع $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_3$، با $\mathbf{F}_1$ جمع شده و از آن $\mathbf{R}$ به‌دست می‌آید. اصل انتقال‌پذیری نیز در این روش مورد استفاده قرارگرفته است.



(الف)



(ب)

شکل ۱۳.۲

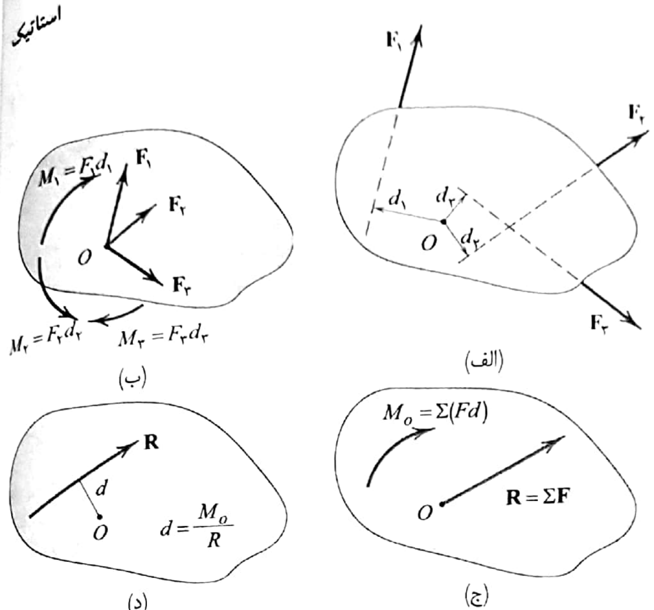
روش جبری

با استفاده از جبر به‌صورت زیر می‌توانیم بردار برایند نیرو و خط اثر آن را به‌دست آوریم:

۱. یک نقطهٔ مرجع دلخواه انتخاب کنید و تمامی نیروها را به آن نقطه انتقال دهید این عمل برای یک سیستم سه‌نیرویی در شکل ۱۴.۲ (الف) و (ب) نشان داده شده که در آن M_1، M_2 و M_3 کوپل‌های حاصل از انتقال نیروهای $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_3$ از خط اثر اولیهٔ آنها به نقطهٔ O می‌باشند.

۲. نیروهای موجود در نقطهٔ O را با یکدیگر جمع کنید تا نیروی برایند $\mathbf{R}$ به‌دست آید. سپس تمام کوپل‌ها را با یکدیگر جمع نمایید تا کوپل برایند M_O را به‌دست آورید. اکنون یک سیستم تک‌کوپل-نیرو داریم که می‌توانید آن را در شکل ۱۴.۲ (ج) ببینید.

۳. در شکل ۱۴.۲ (د)، خط اثر $\mathbf{R}$ را با این شرط به‌دست آورید که گشتاوری به‌اندازهٔ M_O حول O داشته باشد. دقت کنید که سیستم‌های نیرو در شکل‌های ۱۴.۲ (الف) و (د) هم‌ارز هستند، و همچنین $\Sigma(Fd)$ در شکل ۱۴.۲ (الف) با Rd در شکل ۱۴.۲ (د) مساوی است.



شکل ۱۴.۲

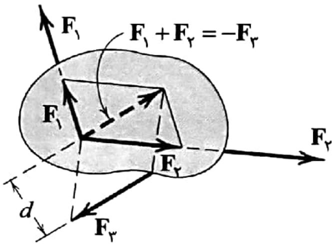
اصل گشتاورها

این روند به شکل یک تساوی به‌صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$$
$$M_O = \Sigma M = \Sigma(Fd) \qquad (۱۰.۲)$$
$$Rd = M_O$$

دو معادلهٔ اول در معادلهٔ (۱۰.۲) یک سیستم نیروی فرضی را به یک سیستم کوپل-نیرو در یک نقطهٔ دلخواه ولی مناسب O ساده می‌کنند. معادلهٔ آخر، فاصلهٔ d از نقطهٔ O تا خط اثر $\mathbf{R}$ را مشخص کرده، و همچنین بیان می‌کند که گشتاور نیروی برایند حول هر نقطهٔ O، برابر با مجموع گشتاورهای نیروهای اولیه حول همان نقطه می‌باشد. به این ترتیب قضیهٔ وارینون برای سیستم‌های نیروی *غیرهمرس* تعمیم می‌یابد؛ که به این تعمیم، *اصل گشتاورها* می‌گوییم.

برای یک سیستم از نیروهای همرس که در آن خط اثر تمامی نیروها از یک نقطهٔ مشترک O می‌گذرند، مجموع گشتاورهای ΣM_O حول آن نقطه برابر با صفر است. لذا خط اثر برایند $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ که به‌وسیلهٔ معادلهٔ اول تساوی (۱۰.۲) مشخص می‌شود، از نقطهٔ O عبور خواهد کرد. برای یک سیستم با نیروهای موازی، یک محور مختصات در جهت نیروها انتخاب کنید. اگر نیروی برایند $\mathbf{R}$، برای یک سیستم نیروی داده‌شده برابر صفر باشد، برایند سیستم لزوماً صفر نیست زیرا آن برایند ممکن است یک کوپل باشد. به‌عنوان مثال سیستم سه‌نیرویی شکل ۱۵.۲، برایند نیرویی برابر صفر داشته اما دارای یک کوپل برایند به‌مقدار $M = F_3 d$ در جهت ساعتگرد می‌باشد.

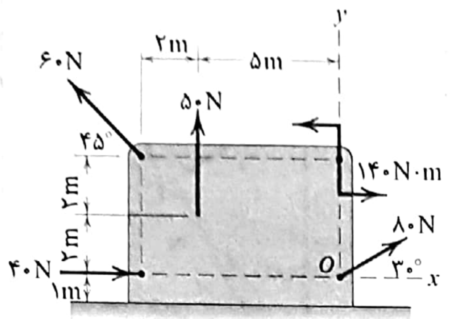


شکل ۱۵.۲

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۹.۲

برایند چهار نیرو و تک‌کوپل اعمال‌شده بر صفحهٔ نشان‌داده‌شده را به‌دست آورید.



حل: نقطهٔ O به‌عنوان یک نقطهٔ مرجع مناسب برای سیستم کوپل-نیرو انتخاب می‌شود.

$[R_x = \Sigma F_x] \qquad R_x = ۴۰ + ۸۰\cos ۳۰° - ۶۰\cos ۴۵° = ۶۶/۹\text{N}$

$[R_y = \Sigma F_y] \qquad R_y = ۵۰ + ۸۰\sin ۳۰° + ۶۰\cos ۴۵° = ۱۳۲/۴\text{N}$

ج. $[R = \sqrt{R_x^۲ + R_y^۲}] \qquad R = \sqrt{(۶۶/۹)^۲ + (۱۳۲/۴)^۲} = ۱۴۸/۳\text{N}$

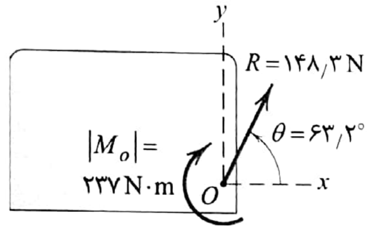
ج. $\left[\theta = \tan^{-۱}\dfrac{R_y}{R_x}\right] \qquad \theta = \tan^{-۱}\dfrac{۱۳۲/۴}{۶۶/۹} = ۶۳/۲°$

❶ $[M_O = \Sigma(Fd)] \qquad M_O = ۱۴۰ - ۵۰(۵) + ۶۰\cos ۴۵°(۴) - ۶۰\sin ۴۵°(۷) = -۲۳۷\text{N·m}$

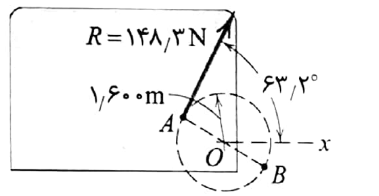
سیستم کوپل-نیروی تشکیل‌شده از **R** و M_O در شکل (الف) نشان داده شده است.

حال باید خط اثر نیروی **R** را طوری تعیین کنیم که **R** به‌تنهایی نشان‌دهندهٔ سیستم اولیه باشد

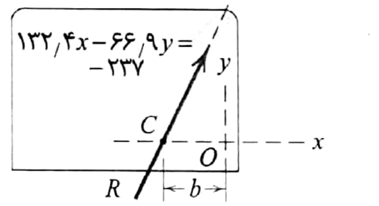
ج. $[Rd = |M_O|] \qquad ۱۴۸/۳d = ۲۳۷ \qquad d = ۱/۶۰۰\text{m}$



(الف)



(ب)



(ج)

بنابراین، بردار برایند **R** را می‌توان بر هر نقطه از خطی که با محور xها زاویهٔ $۶۳/۲°$ می‌سازد و در نقطهٔ A مماس بر دایره‌ای به‌شعاع $۱/۶۰۰\text{m}$ و مرکز O می‌باشد [شکل (ب)]، اعمال کرد. تساوی $Rd = M_O$ را به‌صورت کاملاً مقداری استفاده می‌کنیم (یعنی به علامت M_O کاری نداریم) و با استفاده از فیزیک مسئله، که در شکل (الف) نشان داده شده، محل نهایی **R** را پیدا می‌کنیم. اگر M_O پادساعتگرد بود، خط اثر درست **R**، مماس بر نقطهٔ B می‌شد.

همچنین برایند **R** را می‌توان با تعیین b، یعنی فاصلهٔ طول از مبدأ آن به‌دست آورد که در شکل (ج) می‌بینید. با آنکه مؤلفه‌های R_x و R_y بر نقطهٔ C وارد می‌شوند، فقط R_y حول O گشتاور ایجاد می‌کند به این صورت که

$$R_y b = |M_O| \text{ و } b = \frac{۲۳۷}{۱۳۲/۴} = ۱/۷۹۲\text{m}$$

علاوه بر آن می‌توانستیم عرض از مبدأ را به‌دست آوریم و واضح است که در آن صورت گشتاور حول O فقط حاصل از R_x می‌بود.

یک روش معمول دیگر برای به‌دست آوردن خط اثر نهایی **R**، استفاده از تساوی برداری است

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O$$

که $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$، یک بردار مکان است که از نقطهٔ O آغاز شده و به هر نقطه‌ای بر روی خط اثر **R** ختم می‌شود. با جایگزین کردن معادل‌های برداری **r**، **R** و $\mathbf{M}_O$ و انجام ضرب خارجی نتیجه می‌شود

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times (۶۶/۹\mathbf{i} + ۱۳۲/۴\mathbf{j}) = -۲۳۷\mathbf{k}$$
$$(۱۳۲/۴x - ۶۶/۹y)\mathbf{k} = -۲۳۷\mathbf{k}$$

لذا خط اثر مطلوب، که در شکل (ج) می‌بینید، به‌صورت زیر است

$$۱۳۲/۴x - ۶۶/۹y = -۲۳۷$$

❷ با قرار دادن $y = ۰$، مقدار $x = -۱/۷۹۲\text{m}$ را به‌دست می‌آوریم، که با محاسبات پیشین ما برای فاصلهٔ b سازگار است.

راهنمایی‌های مفید

❶ دقت کنید که انتخاب O به‌عنوان مرکز گشتاور، گشتاورهای حاصل از دو نیرویی که امتدادشان از O می‌گذرد را خنثی می‌کند. اگر از قرارداد ساعتگرد استفاده می‌کردیم، مقدار M_O برابر $+۲۳۷\text{N·m}$ می‌شد که علامت مثبت نشان‌دهندهٔ جهتی براساس این قرارداد می‌بود. در هر حال با هر کدام از قراردادها، M_O در جهت ساعتگرد به‌دست می‌آید.

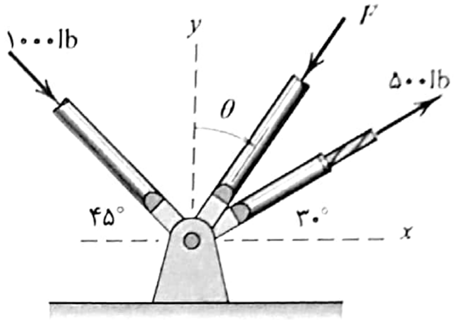
❷ دقت کنید که راه حل برداری، خودبه‌خود علامت‌ها را نگه می‌دارد در صورتی‌که راه‌حل عددی، جنبهٔ فیزیکی دارد. شما لازم است که هر دو روش را به‌خوبی فراگیرید.

Scanned by CamScanner

مسائل

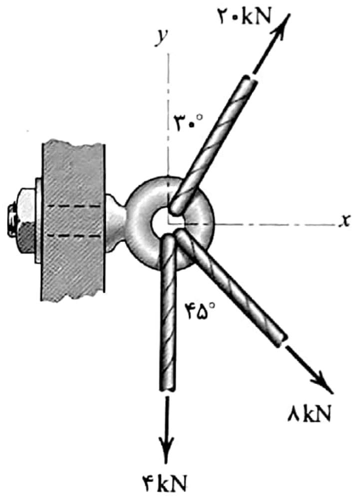
مسائل مقدماتی

۷۹.۲ دو میله و یک کابل به تکیه‌گاهی در نقطهٔ O متصل شده‌اند. اگر دو تا از نیروها مانند شکل باشند، اندازهٔ F و مقدار θ را برای نیروی سوم طوری پیدا کنید که برایند سه نیرو، عمودی و رو به پایین بوده و اندازه‌ای برابر ۱۲۰۰lb داشته باشد.



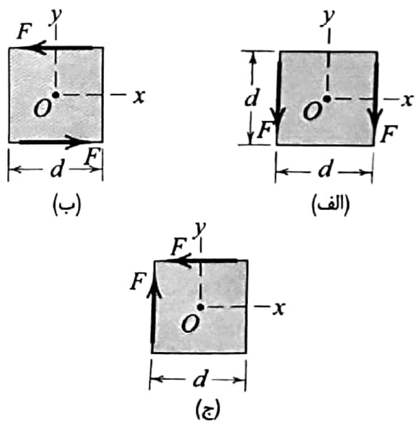
شکل م ۷۹.۲

۸۰.۲ برایند **R** را برای سه‌نیروی کششی وارد شده بر پیچ به‌دست آورید. اندازهٔ **R** و زاویهٔ θ_x که همان زاویهٔ **R** و جهت مثبت محور xهاست را به‌دست آورید.



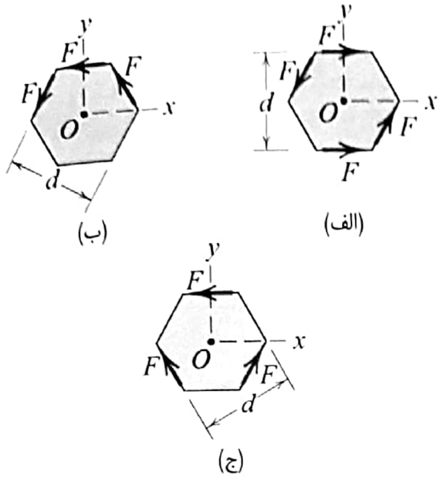
شکل م ۸۰.۲

۸۱.۲ سیستم کوپل-نیروی معادل را در نقطهٔ O برای هر سه حالت از نیروهای وارد بر یک صفحهٔ مربعی‌شکل با ضلع d، به‌دست آورید.



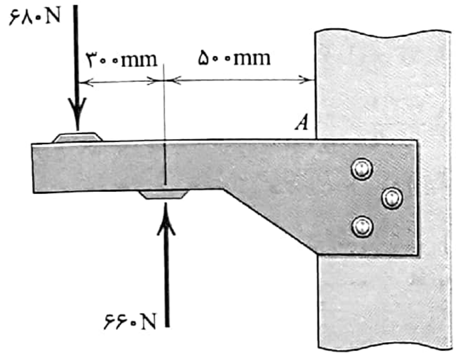
شکل م ۸۱.۲

۸۲.۲ سیستم معادل کوپل-نیرو را در نقطهٔ O برای هر سه حالت از نیروهای وارد بر راستای مرزهای یک شش‌ضلعی منظم به‌ضلع d به‌دست آورید. اگر برایند آنها مقداری صریح داشته باشد سیستم کوپل-نیرو را با یک تک‌نیرو جایگزین کنید.



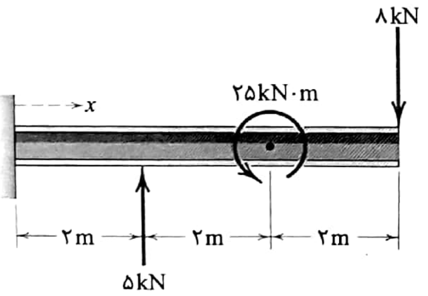
شکل م ۸۲.۲

۸۳.۲ برایند دو نیرو به کدام نقطه وارد می‌شود؟



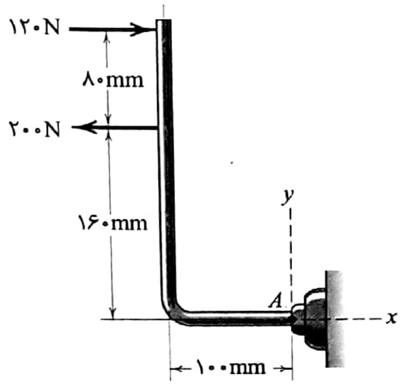
شکل م ۸۳.۲

۸۴.۲ برایند **R** را برای دو نیرو و کوپل وارد شده بر تیر I-شکل به‌دست آورده و مکان آن را تعیین کنید.



شکل م ۸۴.۲

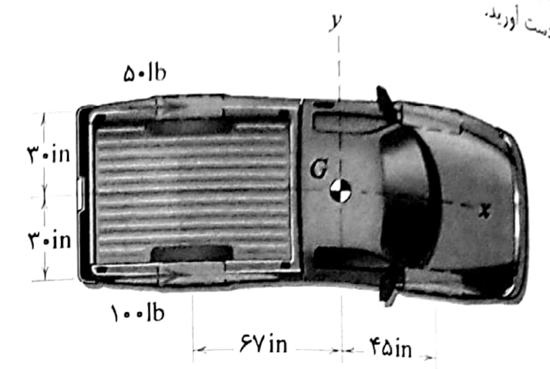
۸۵.۲ دو نیروی وارد شده بر لولهٔ خمیده را با یک تک‌نیروی معادل **R** جایگزین کنید. همچنین فاصلهٔ y از نقطهٔ A تا خط اثر **R** را معین کنید.



شکل م ۸۵.۲

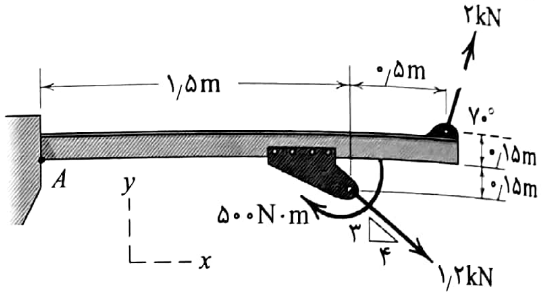
Scanned by CamScanner

۸۶.۲ در یک خیابان با شرایط غیریکنواخت و لغزنده، دو نیروی نشان‌داده‌شده بر چرخ‌های عقب یک وانت وارد می‌شوند. نقطهٔ تقاطع برایند این سیستم نیرو با محور y را به‌دست آورید.



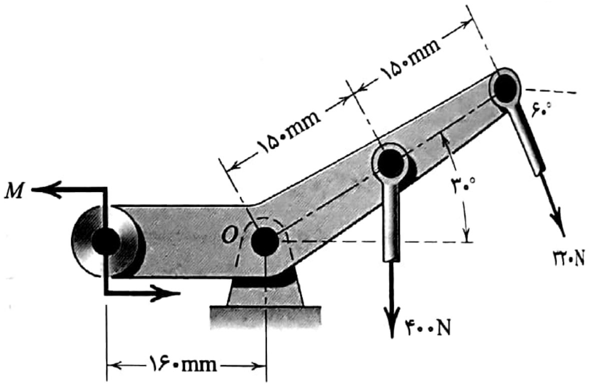
شکل م ۸۶.۲

۸۷.۲ تیر یک‌سرگیردار فولادی با دیوارکوب پرچی تحت تأثیر یک کوپل و دو نیرو همانند شکل قرار گرفته است و لازم است تا اثر آنها بر روی اتصال A معین شود. کوپل و دو نیرو را با یک کوپل معادل M و یک نیروی برایند **R** در نقطهٔ A جایگزین نمایید.



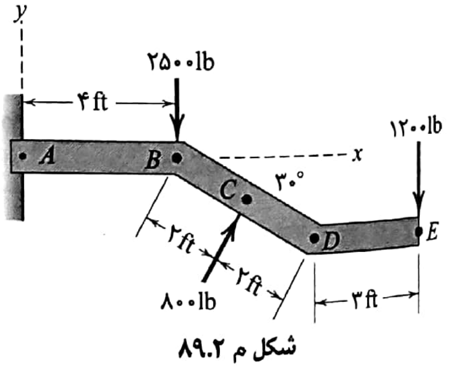
شکل م ۸۷.۲

۸۸.۲ اگر برایند دو نیرو و کوپل M از نقطهٔ O بگذرند، M را تعیین کنید.



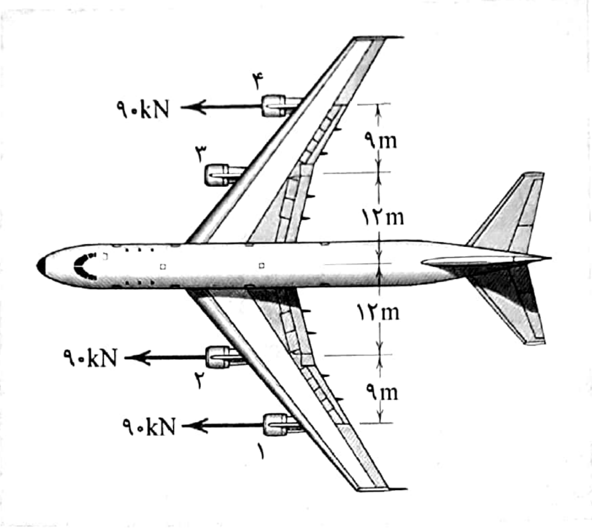
شکل م ۸۸.۲

۸۹.۲ سه نیروی وارد شده بر میلهٔ خمیده را با یک سیستم کوپل-نیرو در نقطهٔ تکیه‌گاهی A جایگزین کنید. سپس طول از مبدأ خط اثر نیروی برایند **R** را به‌دست آورید.



شکل م ۸۹.۲

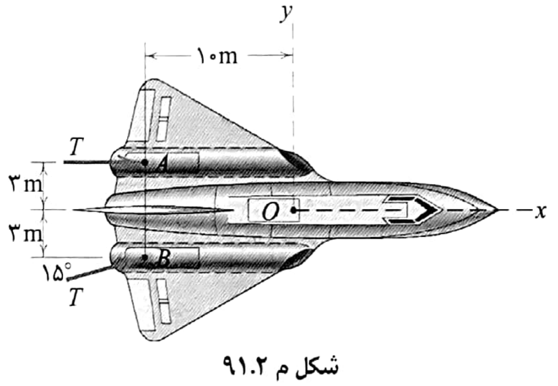
۹۰.۲ یک هواپیمای مسافربری با چهار موتور، که هریک از موتورها نیرویی معادل ۹۰kN به‌سمت جلو اعمال می‌کنند، در حالت پایدار قرار دارد که ناگهان موتور شمارهٔ ۳ از کار می‌افتد. برایند نیروهای سه موتور باقی‌مانده را به‌دست آورده و محل آن را تعیین کنید. این مسئله را به‌عنوان یک مسئلهٔ دوبعدی در نظر بگیرید.



شکل م ۹۰.۲

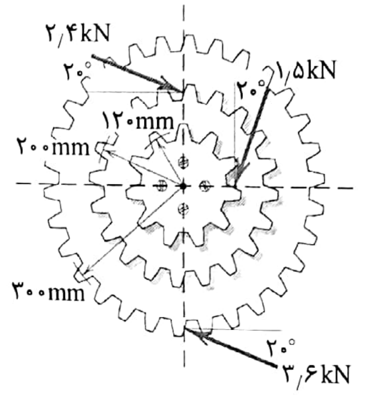
مسائل برگزیده

۹۱.۲ جهت‌های دو بردار نیروی یک هواپیمای آزمایشی را می‌توان مستقل از یکدیگر تا حد مجاز تغییر داد. برای ترکیب نیروهای نشان‌داده‌شده، سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O را تعیین کنید. سپس این سیستم کوپل-نیرو را با یک تک‌نیرو جایگزین کرده و محل برخورد خط اثر آن با محور xها را تعیین کنید. این نتایج برای برآورد کردن بازده این طراحی ضروری هستند.



شکل م ۹۱.۲

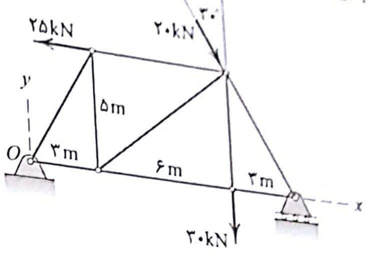
۹۲.۲ عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط اثر متعلق به برایند سه نیروی اعمال شده بر روی دنده‌ها را به‌دست آورید.



شکل م ۹۲.۲

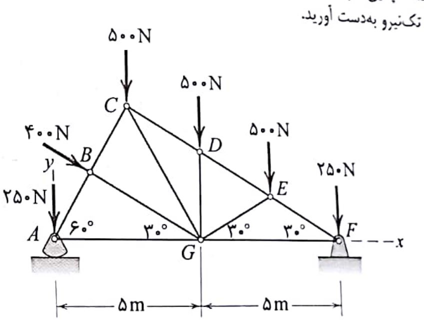
Scanned by CamScanner

۹۳.۲ برایند R را برای سه نیروی اعمال شده بر خرپای سادهٔ نشان‌داده‌شده به‌دست آورید. همچنین محل برخورد R با محور xها و yها را تعیین کنید.



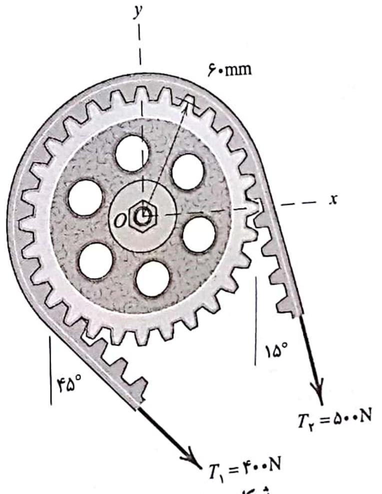
شکل م ۹۳.۲

۹۴.۲ یک خرپای نامتقارن سقفی به‌هنگام تابش آفتاب به‌صورت قائم بر روی سطح رو به جنوب ABC برای استفاده از انرژی خورشیدی استفاده می‌شود. پنج بارگذاری نشان‌داده‌شده اثر وزن خرپا و مواد تشکیل‌دهندهٔ سقف را نشان می‌دهد. نیروی ۴۰۰N تأثیر نیروی باد را نشان می‌دهد. سیستم کوپل-نیروی معادل را در نقطهٔ A تعیین کنید. همچنین طول از مبدأ خط اثر نیروی برایند **R** را با تبدیل سیستم کوپل-نیرو به یک تک‌نیرو به‌دست آورید.



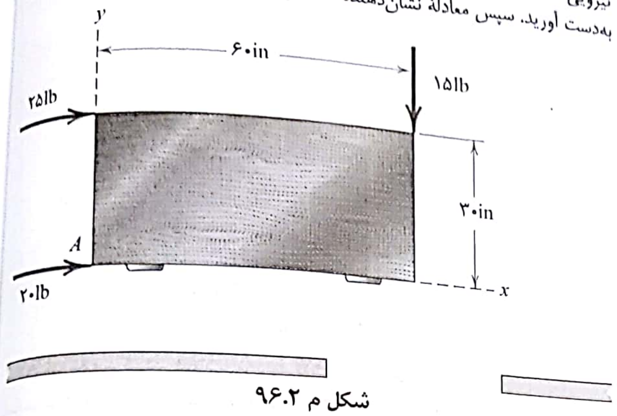
شکل م ۹۴.۲

۹۵.۲ به‌عنوان بخشی از آزمایش یک طرح، چرخ‌دندهٔ متصل به میل بادامک، ثابت شده و دو نیروی نشان‌داده‌شده بر تسمهٔ پیچیده شده به دور چرخ دنده وارد می‌شوند. برایند این سیستم دو نیرویی را پیدا کرده و عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط اثر آن را به‌دست آورید.



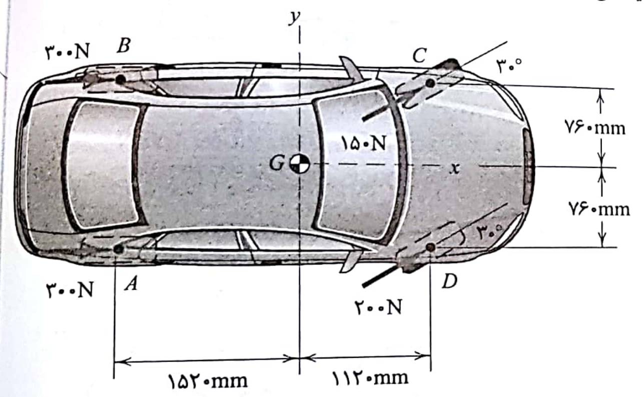
شکل م ۹۵.۲

۹۶.۲ سه دانش‌آموز درحالی‌که یک میز را به سمت در حرکت می‌دهند، از نمای بالا نیرویی مانند شکل به آن وارد می‌کنند. سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ A را به‌دست آورید. سپس معادلهٔ نشان‌دهندهٔ خط اثر نیروی برایند را تعیین کنید.



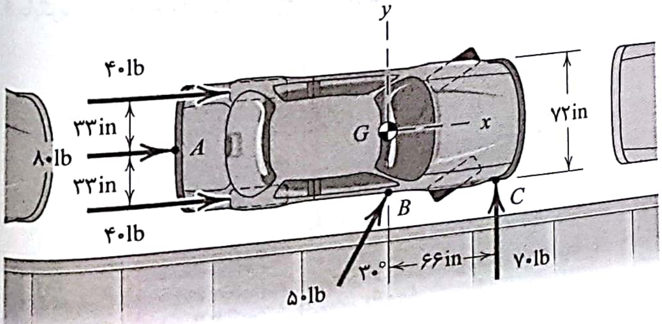
شکل م ۹۶.۲

۹۷.۲ در یک خیابان با شرایط غیریکنواخت و لغزنده، چهار نیروی نشان‌داده‌شده بر چهار چرخ اتومبیل وارد می‌شوند. برایند سیستم را تعیین کرده و عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط اثر آن را به‌دست آورید. دقت کنید که فاصلهٔ دو چرخ جلو و دو چرخ عقب یکسان است ($\overline{AB} = \overline{CD}$).



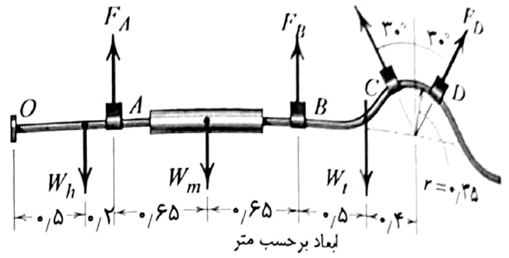
شکل م ۹۷.۲

۹۸.۲ یک اتومبیل دیفرانسیل عقب در برف، بین دو اتومبیل پارک شده گیر کرده است. در تلاش برای آزادکردن اتومبیل، سه دانشجو نیروهای نشان‌داده‌شده را در نقاط A، B و C وارد می‌کنند و همچنین تلاش راننده، نیرویی معادل ۴۰lb را در هر چرخ عقب به‌موازات صفحهٔ چرخش آن اعمال می‌کند. با در نظر گرفتن مسئله به‌صورت دو بعدی، سیستم کوپل-نیروی معادل در مرکز جرم اتومبیل G را به‌دست آورید و سپس محل برخورد بردار برایند با محور x را تعیین کنید. از نیروهای نشان داده نشده صرف نظر کنید.



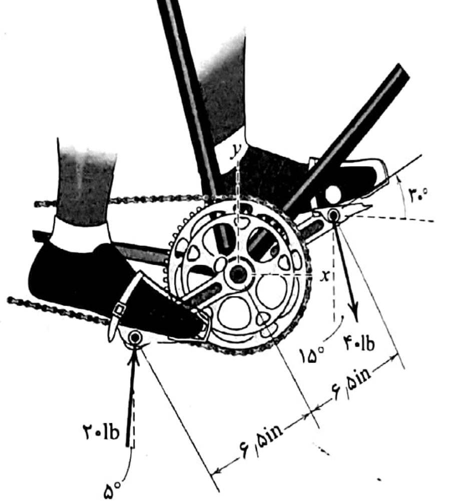
شکل م ۹۸.۲

۹۹.۲ سیستم اگزوز یک وانت در شکل نشان داده شده است. مقادیر $W_h = 10N$، $W_m = 100N$ و $W_t = 50N$ متعلق به لوله، صداگیر و لوله اگزوز بوده و بر نقاط نشان داده‌شده وارد می‌شوند. اگر آویز لوله اگزوز در نقطهٔ A طوری تنظیم شده باشد که کشش F_A برابر ۵۰N باشد، نیروهای لازم در آویزهای B، C و D را طوری تعیین کنید که سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O برابر صفر باشد. چرا سیستم کوپل-نیروی صفر در نقطهٔ O مناسب است؟



شکل م ۹۹.۲

۱۰۰.۲ پدال زنجیر چرخ یک دوچرخه در شکل نشان داده شده است. پای چپ شخص نیرویی برابر ۴۰lb را وارد کرده درحالی‌که شخص با استفاده از اتصال نشان‌داده‌شده، می‌تواند نیرویی برابر ۲۰lb را به سمت بالا اعمال کند. سیستم کوپل ـ نیروی معادل در نقطهٔ O را به‌دست آورید. همچنین معادلهٔ خط اثر تک‌نیروی **R** معادل با سیستم کوپل-نیرو را به‌دست آورید. مسئله را در دو بعد حل کنید.



شکل م ۱۰۰.۲

قسمت (ب): سیستم‌های سه‌بعدی نیرو

۷.۲ مؤلفه‌های عمود برهم

بسیاری از مسائل مکانیک نیازمند تحلیل در سه‌بعد می‌باشند و برای این‌گونه مسائل اغلب لازم است تا نیرو به سه مؤلفهٔ عمودبرهم تجزیه شود. نیروی **F** وارد شده بر نقطهٔ O در شکل ۱۶.۲ به *مؤلفه‌های عمودی* F_x، F_y و F_z تجزیه شده است که

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$
$$F_y = F\cos\theta_y \qquad \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \qquad (۱۱.۲)$$
$$F_z = F\cos\theta_z \qquad \mathbf{F} = F(\mathbf{i}\cos\theta_x + \mathbf{j}\cos\theta_y + \mathbf{k}\cos\theta_z)$$

بردارهای یکهٔ **i**، **j** و **k** به‌ترتیب در جهت‌های x، y و z قرار گرفته‌اند. با استفاده از کسینوس‌های هادی به‌ترتیب **F**، که به‌صورت $l = \cos\theta_x$، $m = \cos\theta_y$ و $n = \cos\theta_z$ می‌باشند و در آن $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ است، می‌توانیم نیرو را به‌صورت زیر بیان کنیم

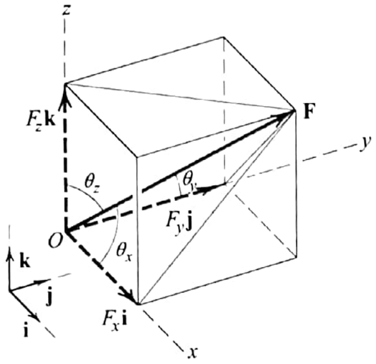
$$\mathbf{F} = F(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) \qquad (۱۲.۲)$$

می‌توانیم سمت راست معادلهٔ (۱۲.۲) را به‌صورت اندازهٔ نیروی **F** ضرب‌در بردار یکهٔ $\mathbf{n}_F$ بنویسیم که این بردار یکه نشان‌دهندهٔ جهت **F** است یا

$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_F \qquad (۱۲.۲\ \text{الف})$$

از معادلات (۱۲.۲) و (۱۲.۲ الف) واضح است که $\mathbf{n}_F = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$، که نشان می‌دهد مؤلفه‌های عددی بردار یکهٔ $\mathbf{n}_F$ همان کسینوس‌های هادی برای خط اثر **F** می‌باشند.

در حل مسائل سه‌بعدی، اغلب لازم است که ابتدا مؤلفه‌های عددی x، y و z نیرو معین شوند. در بیشتر موارد، جهت نیرو به دو صورت بیان می‌شود: (الف) با دو نقطه از خط اثر نیرو یا (ب) با دو زاویه که خط اثر نیرو را نشان می‌دهند.

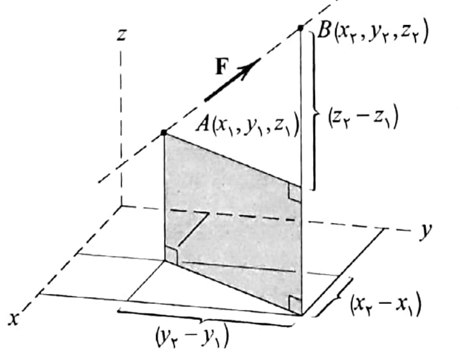


شکل ۱۶.۲

(الف) تعیین امتداد نیرو به‌وسیلهٔ دو نقطه از خط اثر آن. اگر مختصات نقاط A و B از شکل ۱۷.۲ معلوم باشد، نیروی **F** را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_F = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = F\frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

در نتیجه مؤلفه‌های عددی x، y و z نیروی **F**، به‌ترتیب ضرایب عمودی بردارهای یکهٔ **i**، **j** و **k** خواهند بود.



شکل ۱۷.۲

(ب) تعیین امتداد نیرو به‌وسیلهٔ دو زاویهٔ معرف خط اثر آن. هندسهٔ شکل ۱۸.۲ را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم که زوایای θ و ϕ معلوم باشند. ابتدا **F** را به دو مؤلفهٔ افقی و عمودی تجزیه می‌کنیم.

$$F_{xy} = F\cos\phi$$
$$F_z = F\sin\phi$$

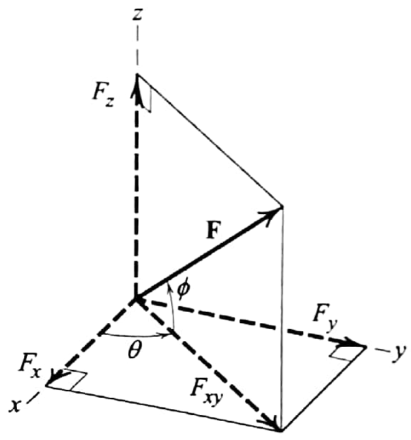
Scanned by CamScanner

سپس مؤلفهٔ افقی F_{xy} را به دو مؤلفهٔ x و y تجزیه می‌نماییم.

$$F_x = F_{xy}\cos\theta = F\cos\phi\cos\theta$$
$$F_y = F_{xy}\sin\theta = F\cos\phi\sin\theta$$

مقادیر F_x، F_y و F_z همان مؤلفه‌های عددی خواسته‌شدهٔ **F** می‌باشند.

انتخاب جهت سیستم مختصات امری اختیاری است، و مهم‌ترین عامل در انتخاب آن راحتی در حل مسئله است. با این حال لازم است که محورهای مختصات در فضای سه‌بعدی یا به‌صورت راستگرد باشند تا با قانون دست راست استفاده شده برای ضرب خارجی سازگار باشد. هنگامی‌که از محور x به محور y طی یک زاویهٔ ۹۰ درجه دور می‌زنیم، جهت مثبت محور z در یک سیستم راستگرد معادل جهت حرکت یک پیچ راستگرد طی چرخاندن در همان جهت می‌باشد که این همان قانون دست راست است.



شکل ۱۸.۲

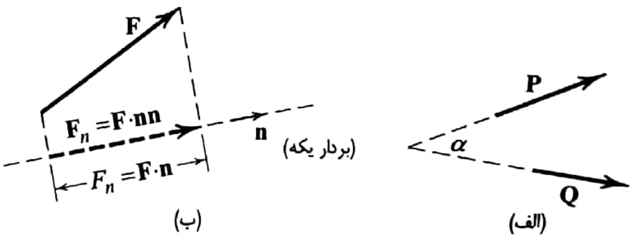
ضرب داخلی

ما می‌توانیم مؤلفه‌های عمودی یک نیروی **F** (یا هر بردار دیگری) را به‌کمک یک عملگر برداری به نام *ضرب داخلی* یا *عددی* بیان کنیم (به بند ۶ از پیوست ج.۷ مراجعه کنید). ضرب داخلی دو بردار **P** و **Q** در شکل ۱۹.۲ (الف)، به‌صورت ضرب اندازه‌های آنها در زاویهٔ α بین آنها تعریف می‌شود که آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = PQ\cos\alpha$$

این عملگر را می‌توانیم به‌عنوان تصویر عمودی $P\cos\alpha$ از **P** در جهت **Q** و یا تصویر عمودی $Q\cos\alpha$ از **Q** در جهت **P** ضرب‌در P بیان کنیم. در هر دو حالت، ضرب داخلی دو بردار یک کمیت مقداری است. لذا به‌عنوان مثال، مؤلفهٔ مقداری $F_x = F\cos\theta_x$ از نیروی **F** در شکل ۱۶.۲ را می‌توانیم به‌صورت $F_x = \mathbf{F}\cdot\mathbf{i}$ بیان کنیم که **i** بردار یکه در جهت x می‌باشد.

به‌صورت کلی‌تر، اگر **n** بردار یکه در یک راستای مشخص باشد، تصویر **F** در راستای **n** اندازه‌ای برابر $F_n = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ دارد [شکل ۱۹.۲ (ب)]. اگر بخواهیم



شکل ۱۹.۲

تصویر در راستای **n** را مانند یک کمیت برداری نمایش دهیم، می‌توانیم مؤلفهٔ عددی آن را، که از $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ به‌دست می‌آید، در بردار یکهٔ **n** ضرب کنیم که به ما $\mathbf{F}_n = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ را می‌دهد. این عبارت را می‌توانیم به‌صورت $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}\cdot\mathbf{nn}$ بنویسیم بدون آنکه ابهامی در عبارت ایجاد شود، زیرا عبارت **nn** تعریف نشده است و عبارت کامل را نمی‌توان به‌صورت $\mathbf{F}\cdot(\mathbf{nn})$ در نظر گرفت.

اگر کسینوس‌های هادی **n** برابر α، β و γ باشند، بیان برداری **n** را می‌توانیم مانند یک بردار عادی به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{n} = \alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}$$

که در این حالت، اندازهٔ آن برابر یک است. اگر کسینوس‌های هادی **F** با در نظر گرفتن محورهای x، y و z به‌ترتیب برابر l، m و n باشند، پس تصویر **F** در راستای **n** چنین می‌شود

$$F_n = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = F(l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k})\cdot(\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k})$$
$$= F(l\alpha+m\beta+n\gamma)$$

زیرا

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$$

و

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0$$

تساوی‌های دوم به این علت درست‌اند که **i**، **j** و **k** دارای طول یکه بوده و بر یکدیگر عمود می‌باشند.

زاویهٔ بین دو بردار

اگر زاویهٔ بین نیروی **F** و یک راستای مشخص‌شده به‌وسیلهٔ یک بردار یکه **n** برابر θ باشد، آنگاه از تعریف ضرب داخلی داریم $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = F_n\cos\theta = F\cos\theta$، که در آن $|\mathbf{n}| = n = 1$ است. پس زاویهٔ بین **F** و **n** با رابطهٔ زیر معین می‌شود

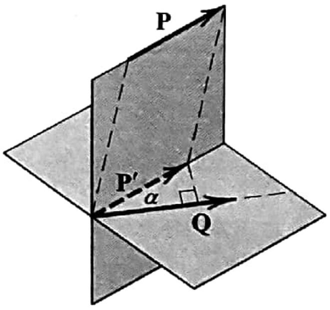
$$\theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}}{F} \qquad (۱۳.۲)$$

در حالت کلی، زاویهٔ بین هر دو بردار **P** و **Q** عبارت است از

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}}{PQ} \qquad (۱۳.۲\ الف)$$

اگر نیروی **F** بر خطی که راستای آن با بردار یکهٔ **n** مشخص می‌شود عمود باشد، آنگاه $\cos\theta = 0$ و $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 0$. گفتنی است که این رابطه بدین معنی نیست که **F** یا **n** صفر است، مانند حالتی که از ضرب عددی $(A)(B) = 0$ نتیجه می‌گیریم که A یا B (یا هر دو) صفر باشند.

رابطهٔ حاصلضرب نقطه‌ای در مورد بردارهای غیرمتقاطع و همچنین بردارهای متقاطع به‌کار می‌رود. پس حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار **P** و **Q** غیرمتقاطع در شکل ۲۰.۲، Q برابر تصویر **P′** روی **Q** است، یا $P'Q\cos\alpha = PQ\cos\alpha$ زیرا **P′** و **P** وقتی مانند بردارهای لغزنده رفتار می‌کنند یکسان خواهند بود.

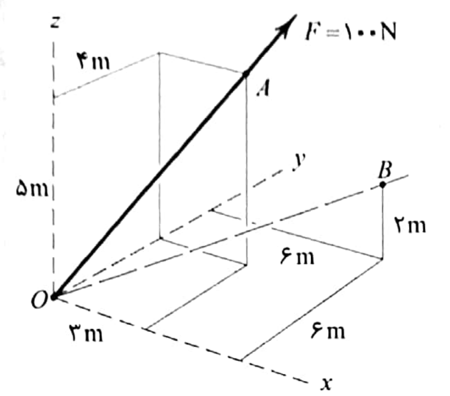


شکل ۲۰.۲

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۱۰

نیروی **F** با اندازهٔ ۱۰۰N بر نقطهٔ مرجع Oی محورهای x، y و z همانند شکل وارد می‌شود. خط اثر **F** از نقطهٔ A که مختصات آن برابر ۳m، ۴m و ۵m است، می‌گذرد. (الف) مؤلفه‌های عددی x، y و z برای **F**، (ب) تصویر F_{xy} نیروی **F** بر روی صفحهٔ x-y، و (ج) تصویر F_{OB} نیروی **F** در راستای خط OB را تعیین کنید.



حل: (الف) در ابتدا بردار نیروی **F** را به‌صورت اندازهٔ آن ضربدر بردار یکهٔ $\mathbf{n}_{OA}$ می‌نویسیم

$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_{OA} = F\frac{\overrightarrow{OA}}{OA} = ۱۰۰\left[\frac{۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۵\mathbf{k}}{\sqrt{۳^۲+۴^۲+۵^۲}}\right]$$
$$= ۱۰۰[۰/۴۲۴\mathbf{i}+۰/۵۶۶\mathbf{j}+۰/۷۰۷\mathbf{k}]$$
$$= ۴۲/۴\mathbf{i}+۵۶/۶\mathbf{j}+۷۰/۷\mathbf{k}\ \text{N}$$

بنابراین مؤلفه‌های عددی موردنظر برابرند با

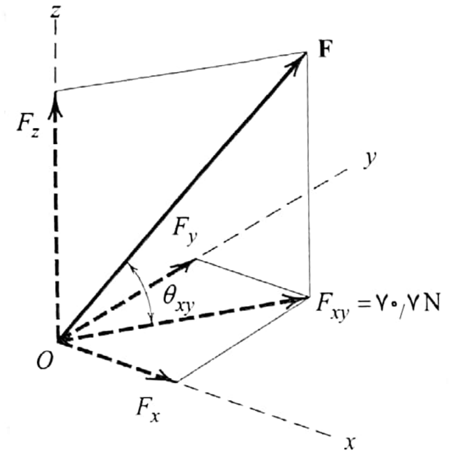
$$F_x = ۴۲/۴\text{N} \qquad F_y = ۵۶/۶\text{N} \qquad F_z = ۷۰/۷\text{N}$$ ج. ❶

(ب) کسینوس زاویهٔ θ_{xy} بین **F** و صفحهٔ x-y برابر است با

$$\cos\theta_{xy} = \frac{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}{\sqrt{۳^۲+۴^۲+۵^۲}} = ۰/۷۰۷$$

بنابراین

$$F_{xy} = F\cos\theta_{xy} = ۱۰۰(۰/۷۰۷) = ۷۰/۷\text{N}$$ ج.



(ج) بردار یکهٔ $\mathbf{n}_{OB}$ در امتداد OB برابر است با

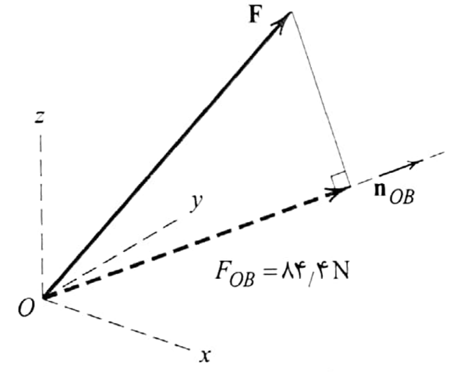
$$\mathbf{n}_{OB} = \frac{\overrightarrow{OB}}{OB} = \frac{۶\mathbf{i}+۶\mathbf{j}+۲\mathbf{k}}{\sqrt{۶^۲+۶^۲+۲^۲}}$$
$$= ۰/۶۸۸\mathbf{i}+۰/۶۸۸\mathbf{j}+۰/۲۲۹\mathbf{k}$$

تصویر عددی **F** بر روی OB برابر است با

$$F_{OB} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{OB} = (۴۲/۴\mathbf{i}+۵۶/۶\mathbf{j}+۷۰/۷\mathbf{k})\cdot(۰/۶۸۸\mathbf{i}+۰/۶۸۸\mathbf{j}+۰/۲۲۹\mathbf{k})$$ ❷
$$= (۴۲/۴)(۰/۶۸۸)+(۵۶/۶)(۰/۶۸۸)+(۷۰/۷)(۰/۲۲۹)$$
$$= ۸۴/۴\text{N}$$ ج.

اگر بخواهیم تصویر را به‌صورت یک بردار بیان کنیم، می‌نویسیم

$$\mathbf{F}_{OB} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{OB}\,\mathbf{n}_{OB}$$
$$= ۸۴/۴(۰/۶۸۸\mathbf{i}+۰/۶۸۸\mathbf{j}+۰/۲۲۹\mathbf{k})$$
$$= ۵۸/۱\mathbf{i}+۵۸/۱\mathbf{j}+۱۹/۳۵\mathbf{k}\ \text{N}$$



راهنمایی‌های مفید

❶ در این مسئلهٔ نمونه، تمام مؤلفه‌های عددی مثبت می‌باشند. برای حالت‌هایی که کسینوس هادی یا حتی مؤلفهٔ عددی دارای مقداری منفی باشد، خود را آماده کنید.

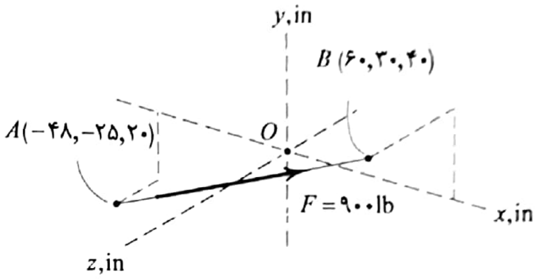
❷ همان‌طورکه در شکل نشان داده شده است، با ضرب نقطه‌ای به‌طور خودکار تصویر یا مؤلفهٔ عددی نیروی **F** در امتداد خط OB به‌دست می‌آید.

Scanned by CamScanner

مسائل

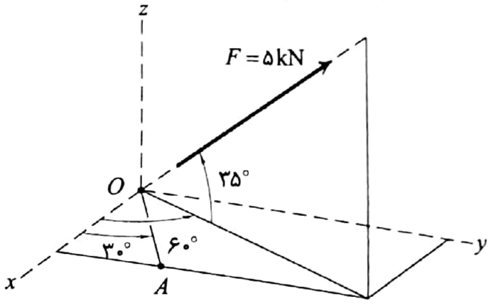
مسائل مقدماتی

۱۰۱.۲ نیروی ۹۰۰ پوندی **F** را به‌صورت یک بردار برحسب بردارهای یکهٔ **i**، **j** و **k** به‌دست آورید. سپس تصویر **F** بر روی محور y را معین کنید.



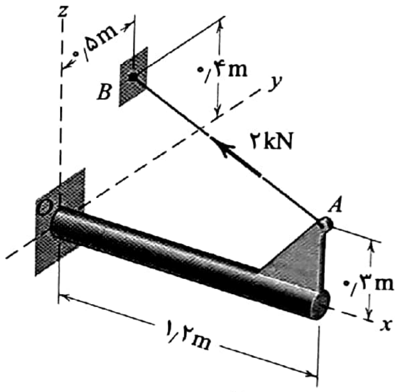
شکل م ۱۰۱.۲

۱۰۲.۲ نیروی **F** معادل ۵kN را به‌صورت یک بردار برحسب بردارهای یکهٔ **i**، **j** و **k** بیان کنید. تصویر **F** بر روی محورهای x و y را در راستای خط OA تعیین کنید.



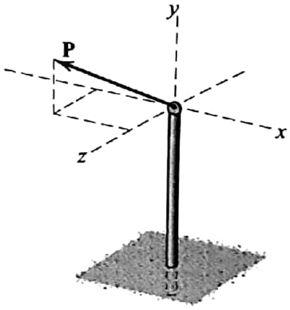
شکل م ۱۰۲.۲

۱۰۳.۲ کابل نشان‌داده‌شده، کششی معادل ۲kN بر روی دیوارکوب ثابت در نقطهٔ A وارد می‌کند. کشش **T** را به‌صورت یک عبارت برداری بیان کنید.



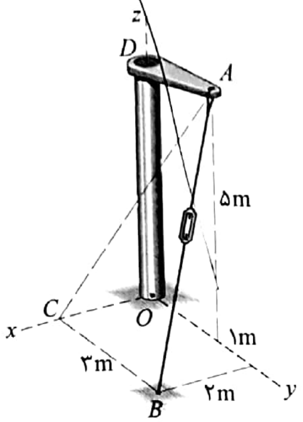
شکل م ۱۰۳.۲

۱۰۴.۲ برای آزمون استحکام میلهٔ حصار تازه نصب شده، شخصی نیروی معادل **P** = −۱۶۰**i** + ۴۰**j** + ۶۰**k** N را مطابق شکل به بالای میله وارد می‌کند. زوایای بین **P** با قسمت مثبت محور xها و همچنین با صفحهٔ x-z را به‌دست آورید.



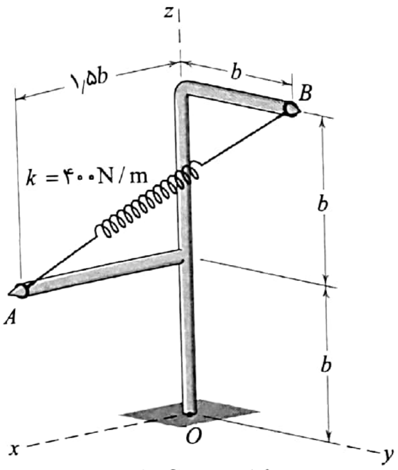
شکل م ۱۰۴.۲

۱۰۵.۲ پیچ تنظیم نشان‌داده‌شده آن‌قدر سفت می‌شود تا کشش در کاب
معادل ۲٫۴kN شود. کشش **T** را به‌عنوان نیرویی که بر عضو AD وارد می‌شود، به
یک عبارت برداری بیان کنید. همچنین اندازهٔ تصویر **T** در راستای خط AC را به‌دست



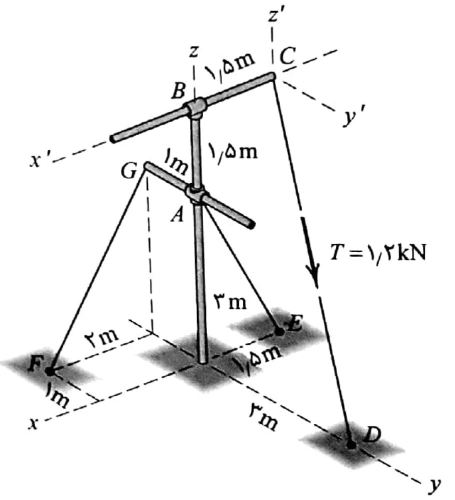
شکل م ۱۰۵.۲

۱۰۶.۲ طول آزاد فنر شکل زیر برابر b است. نیروی وارد شده توسط فنر بر نقطهٔ B از قاب را برای b = ۰٫۳m تعیین کنید. اندازهٔ نیروی فنر برابر با حاصلض ثابت فنر k، در تغییر طول فنر می‌باشد.



شکل م ۱۰۶.۲

۱۰۷.۲ ستون صلب و بازوهای متصل به آن توسط سه کابل نشان‌داده‌شده نگ داشته شده‌اند. یک پیچ تنظیم‌کننده در نقطهٔ D آن‌قدر سفت می‌شود تا کشش T معادل ۱٫۲kN را در CD ایجاد کند. **T** را به‌صورت یک بردار بیان کنید. آیا استفاده از یک سیستم مختصات دیگر تأثیری در جواب ما دارد؟

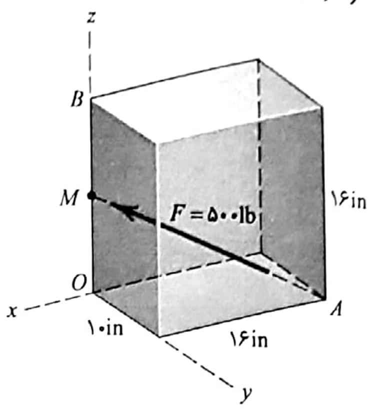


شکل م ۱۰۷.۲

۱۰۸.۲ از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۰۷.۲ استفاده نموده و اندازهٔ T_{GF}، تصویر **T** در راستای خط GF را تعیین کنید.

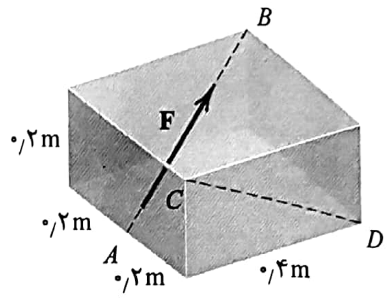
مسائل برگزیده

۱۰۹.۲ نیروی **F** اندازه‌ای برابر ۵۰۰lb دارد و در راستای خط AM عمل می‌کند، که M در وسط ضلع عمودی OB متوازی‌السطوح می‌باشد. **F** را به‌صورت حاصلضرب اندازهٔ آن در یک بردار یکه بیان نموده و سپس مؤلفه‌های عددی x، y و z آن را تعیین کنید.



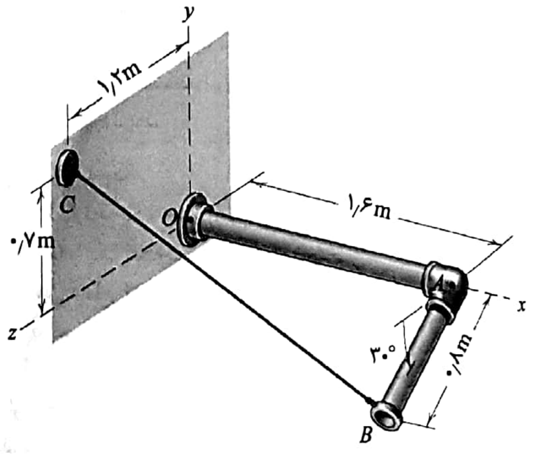
شکل م ۱۰۹.۲

۱۱۰.۲ نیروی **F** اندازه‌ای برابر 2kN دارد و جهت آن از A به B است. تصویر F_{CD} نیروی **F** بر روی خط CD و همچنین زاویهٔ بین **F** و CD را تعیین نمایید.



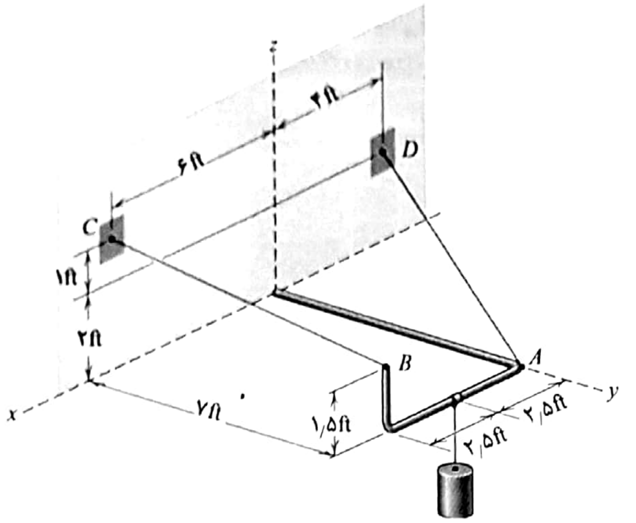
شکل م ۱۱۰.۲

۱۱۱.۲ کابل BC دارای کششی معادل ۷۵۰N می‌باشد. این کشش را به‌صورت یک نیروی **T** وارد بر نقطهٔ B برحسب بردارهای یکهٔ **i**، **j** و **k** بنویسید. زاویهٔ تشکیل‌شده در A معادل ۹۰ درجه است.



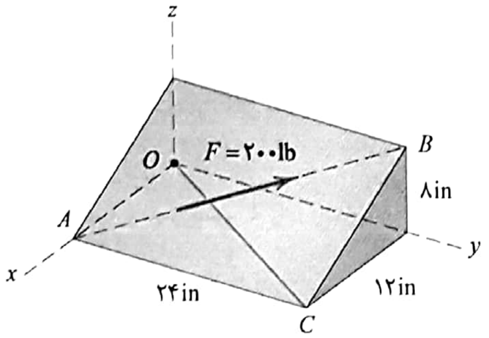
شکل م ۱۱۱.۲

۱۱۲.۲ کشش در کابل نگهدارندهٔ BC معادل ۸۰۰lb است. نیرویی که این کابل بر بازوی OAB وارد می‌کند را به‌صورت یک بردار **T** بیان کنید. زوایای θ_x، θ_y و θ_z که همان زوایای میان خط اثر **T** و سمت مثبت محورهای x، y و z هستند را به‌دست آورید.



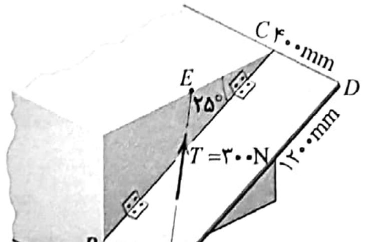
شکل م ۱۱۲.۲

۱۱۳.۲ زاویهٔ θ میان نیروی ۲۰۰lb و خط OC را تعیین کنید.



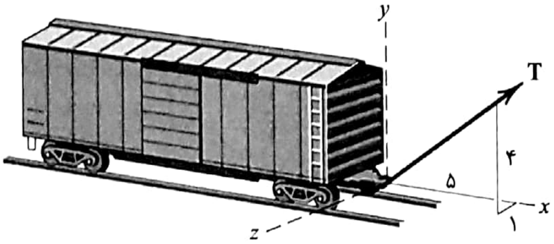
شکل م ۱۱۳.۲

۱۱۴.۲ صفحهٔ مستطیل‌شکل، با لولایی در امتداد BC و کابل AE نگه داشته می‌شود. اگر کشش کابل برابر با ۳۰۰N باشد، تصویر نیروی وارد شده بر صفحه به‌وسیلهٔ کابل را بر روی خط BC به‌دست آورید. دقت کنید که E نقطهٔ میانی از ضلع بالای سازهٔ تکیه‌گاهی می‌باشد.



شکل م ۱۱۴.۲

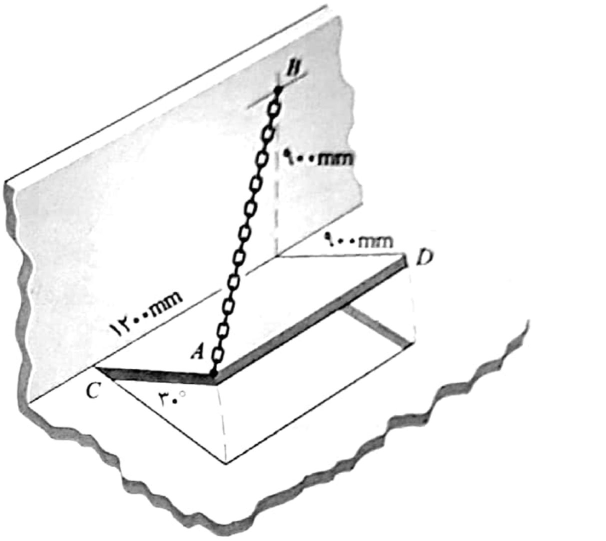
۱۱۵.۲ یک جرثقیل هوایی برای جابه‌جا کردن واگن جعبه‌ای در داخل یک کارگاه تعمیر واگن استفاده می‌شود. اگر واگن وقتی در راستای ریل‌ها به حرکت درآید که مؤلفهٔ x کشش کابل آن به ۶۰۰lb برسد، کشش T لازم در کابل را محاسبه کنید. همچنین زاویهٔ θ_{xy} بین کابل و صفحهٔ x-y را تعیین کنید.



شکل م ۱۱۵.۲

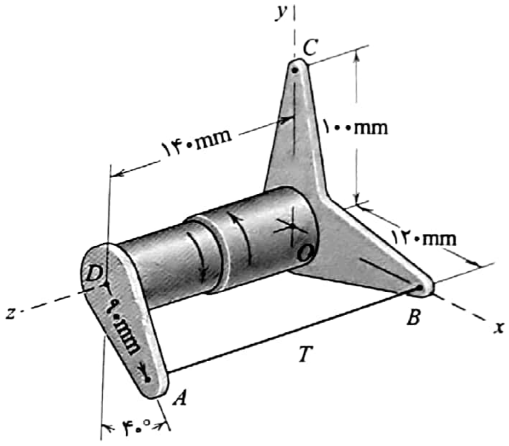
Scanned by CamScanner

۱۱۶.۲ درب نشان‌داده‌شده به‌وسیلهٔ زنجیر AB با زاویهٔ 30° باز نگه داشته می‌شود. اگر کشش در زنجیر معادل 100N باشد، تصویر نیروی کشش در راستای محور قطری [illegible] درب را تعیین کنید.



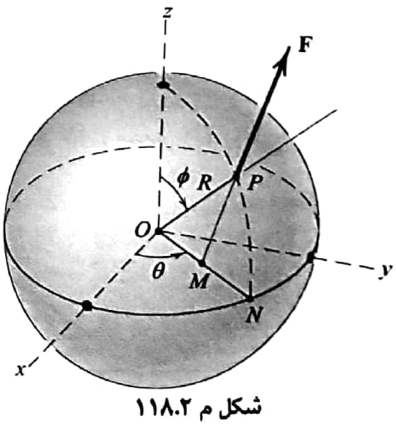
شکل م ۱۱۶.۲

۱۱۷.۲ میل‌گردان‌ها و دیوارکوب‌های متصل به آنها در جهت مخالف یکدیگر آن‌قدر پیچ داده می‌شوند تا کششی معادل $T = 500\text{N}$ در سیم متصل‌کنندهٔ A و B ایجاد کنند. این کشش را به‌صورت یک نیروی وارد بر نقطهٔ A فرض کرده و بردار آن را به‌صورت معادلهٔ (۱۳.۲) به‌دست آورید و سپس تصویر $\mathbf{T}$ را در راستای خط DC تعیین کنید.



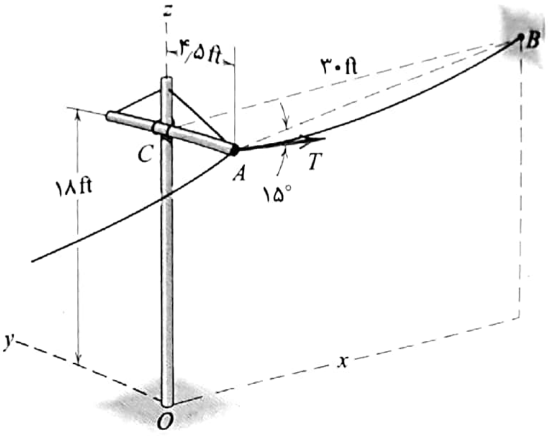
شکل م ۱۱۷.۲

۱۱۸.۲ نیروی $\mathbf{F}$ به سطح کرهٔ نشان‌داده‌شده اعمال می‌شود. نقطهٔ P با زوایای θ و ϕ مشخص می‌شود و ضمناً M در وسط خط ON قرار دارد. شکل برداری $\mathbf{F}$ را برحسب دستگاه مختصات داده شدهٔ x، y و z به‌دست آورید.



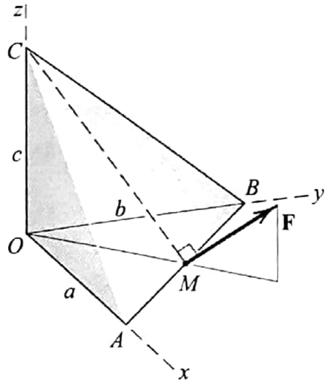
شکل م ۱۱۸.۲

۱۱۹.۲ یک کابل برق از نقطهٔ A بر روی بازوی تیر تا نقطهٔ هم‌ارتفاع B آویزان شده است. به‌دلیل وجود شکم‌دادگی در کابل، در محل اتصال آن به A زاویه‌ای معادل ۱۵ درجه نسبت به سطح افقی تشکیل شده است. اگر کشش کابل در A برابر 200lb باشد، $\mathbf{T}$ را به‌صورت یک بردار به‌دست آورید و همچنین اندازهٔ تصویر آن بر روی سطح $x-z$ را تعیین کنید.



شکل م ۱۱۹.۲

۱۲۰.۲ مؤلفه‌های x، y و z از نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر چهار وجهی نشان‌داده‌شده را تعیین کنید. مقادیر a، b و c و F معلوم بوده و M در ضلع AB قرار گرفته است.



شکل م ۱۲۰.۲

۸.۲ گشتاور و کوپل

در تحلیل دوبعدی، اغلب ساده‌تر است که اندازهٔ گشتاور را به‌وسیلهٔ ضرب اسکالر (عددی)، با استفاده از قانون گشتاور ـ بازو تعیین کنیم. اما در تحلیل مسائل سه‌بعدی، تعیین فاصلهٔ میان یک نقطه یا یک خط و خط اثر یک نیرو می‌تواند کار دشواری باشد، بنابراین استفاده از بردارها و ضرب خارجی در این‌گونه مسائل انتخاب بهتری خواهد بود.

گشتاورها در سه بعد

یک نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر یک جسم را با یک خط اثر معین مانند شکل ۲۱.۲ (الف) در نظر گرفته و O را یک نقطهٔ دلخواه در مکانی خارج از این خط فرض کنید. نقطهٔ O و خط $\mathbf{F}$ تشکیل سطح A را می‌دهند. $\mathbf{M}_O$ گشتاور $\mathbf{F}$ حول یک خط گذرنده از نقطهٔ O و عمود بر سطح، اندازه‌ای برابر $M_O = Fd$ دارد که در آن d فاصلهٔ عمودی نقطهٔ O از خط اثر $\mathbf{F}$ می‌باشد. این گشتاور به‌عنوان گشتاور $\mathbf{F}$ حول *نقطهٔ O* معروف است.

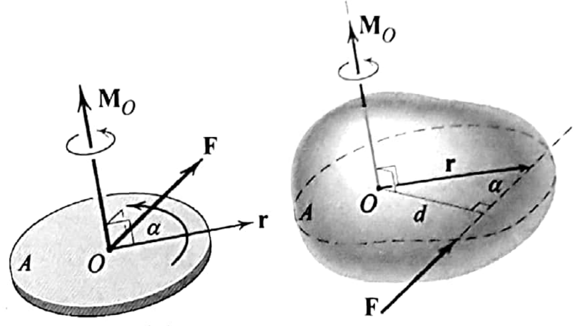
بردار $\mathbf{M}_O$ بر سطح عمود بوده و در راستای محور گذرنده از نقطهٔ O می‌باشد. می‌توانیم اندازه و جهت $\mathbf{M}_O$ را برحسب بردار حاصل از ضرب خارجی توضیح داده شده در بخش ۴.۲ بیان کنیم (به پیوست ج.۷ مراجعه کنید). بردار $\mathbf{r}$ از نقطهٔ O آغاز شده و به هر نقطه‌ای در خط اثر $\mathbf{F}$ ختم می‌شود. همان‌طور که در بخش ۴.۲ توضیح داده شد، ضرب خارجی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ به‌صورت $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ نوشته می‌شود که اندازه‌ای برابر $(r\sin\alpha)F$ دارد، و برابر با اندازهٔ $\mathbf{M}_O$ یعنی Fd است.

Scanned by CamScanner

جهت و علامت درست برای گشتاور براساس قانون دست راست تعیین می‌شود، که پیش‌تر در بخش‌های ۴.۲ و ۵.۲ توضیح داده شد. بنابراین با در نظر گرفتن $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ به‌عنوان بردارهای آزاد ناشی از O [شکل ۲۱.۲ (ب)]، اگر انگشتان دست راست از $\mathbf{r}$ به $\mathbf{F}$ به سمت داخل بچرخند، انگشت شست جهت $\mathbf{M}_O$ را نشان خواهد داد. لذا گشتاور $\mathbf{F}$ حول محور O را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \qquad (۱۴.۲)$$

لازم است که ترتیب نوشتن در $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ حفظ شود زیرا حاصل $\mathbf{F}\times\mathbf{r}$ برداری است در خلاف جهت $\mathbf{M}_O$؛ یا اینکه $\mathbf{F}\times\mathbf{r} = -\mathbf{M}_O$.



شکل ۲۱.۲

ارزیابی ضرب خارجی

عبارت ضرب خارجی برای $\mathbf{M}_O$ را می‌توان به‌صورت دترمینانی نوشت

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (۱۵.۲)$$

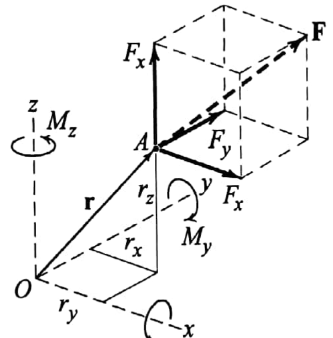
(اگر با نمایش دترمینانی ضرب خارجی آشنا نیستید به پیوست ج.۷ مراجعه کنید) به‌ترتیب جمله‌ها دقت کنید و بدانید که لازم است از یک سیستم مختصات *راستگرد* استفاده کنید. با بسط دترمینان داریم

$$\mathbf{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y)\mathbf{i} + (r_z F_x - r_x F_z)\mathbf{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\mathbf{k}$$

برای درک بیشتر نسبت به ضرب خارجی، سه مؤلفهٔ گشتاور حاصل از یک نیرو حول یک نقطه در شکل ۲۲.۲ را ببینید. این شکل، سه مؤلفهٔ نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر نقطهٔ A که در موقعیت $\mathbf{r}$ نسبت به O قرار دارد را نشان می‌دهد. اندازه‌های عددی گشتاور این نیروها حول سمت مثبت محورهای x، y و z گذرنده از O را می‌توان با استفاده از قانون گشتاور ـ بازو به‌دست آورد که به‌این‌صورت می‌باشند

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y\,, \quad M_y = r_z F_x - r_x F_z\,, \quad M_z = r_x F_y - r_y F_x$$

که با جمله‌های دترمینان بسط داده شده برای ضرب خارجی $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ تطابق دارند.



شکل ۲۲.۲

گشتاور حول یک محور دلخواه

حال ما قادریم که رابطه‌ای برای بیان گشتاور $\mathbf{M}_\lambda$ حاصل از $\mathbf{F}$ حول هر محور λ گذرنده از O که در شکل ۲۳.۲ می‌بینید را به‌دست آوریم. اگر $\mathbf{n}$ بردار یکه در راستای λ باشد، همان‌طورکه در بخش ۷.۲ توضیح داده شد، می‌توانیم از ضرب داخلی استفاده کرده و $\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{n}$ یعنی مؤلفهٔ $\mathbf{M}_O$ در راستای λ را به‌دست آوریم. این مقدار برابر با اندازهٔ $\mathbf{M}_\lambda$ گشتاور $\mathbf{F}$ حول λ خواهد بود.

برای به‌دست آوردن یک عبارت برداری برای $\mathbf{M}_\lambda$ گشتاور $\mathbf{F}$ حول λ، اندازهٔ آن را در بردار یکهٔ $\mathbf{n}$ ضرب می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

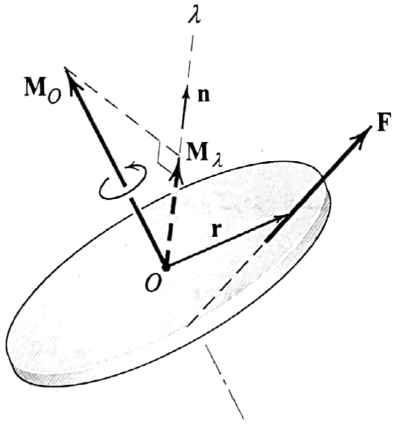
$$\mathbf{M}_\lambda = (\mathbf{r}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} \qquad (۱۶.۲)$$

که $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ جایگزین $\mathbf{M}_O$ می‌شود. عبارت $\mathbf{r}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ به نام *ضرب سه‌گانهٔ عددی* معروف است (به بند ۸ از پیوست ج.۷ مراجعه کنید). استفاده از پرانتز در نوشتن عبارت یعنی به‌صورت $(\mathbf{r}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}$ لازم نیست چرا که ضرب خارجی برای دو بردار تعریف می‌شود و برای ضرب یک مقدار عددی در یک بردار مفهومی ندارد یا بهتر است بگوییم $\mathbf{r}\times(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})$ بی‌معنی است.

ضرب خارجی سه‌گانه را می‌توان با یک دترمینان نمایش داد

$$|\mathbf{M}_\lambda| = M_\lambda = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \qquad (۱۷.۲)$$

که در آن α، β و γ کسینوس‌های هادی بردار یکهٔ $\mathbf{n}$ می‌باشند.



شکل ۲۳.۲

قضیهٔ وارینون در سه بعد

در بخش ۴.۲ قضیهٔ وارینون در دو بعد را بررسی کردیم. این قضیه را می‌توان به‌راحتی برای سه بعد تعمیم داد. شکل ۲۴.۲ یک سیستم از نیروهای همرس $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$، $\mathbf{F}_3$ و ... را نشان می‌دهد که مجموع گشتاورهای این نیروها حول نقطهٔ O برابر است با

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\times\mathbf{F}_1 + \mathbf{r}\times\mathbf{F}_2 + \mathbf{r}\times\mathbf{F}_3 + \ldots &= \mathbf{r}\times(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots) \\ &= \mathbf{r}\times\Sigma\mathbf{F}\end{aligned}$$

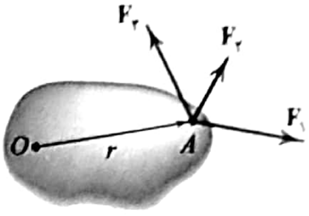
که با کمی دقت متوجه می‌شوید که در آن از قانون توزیع‌پذیری استفاده شده است. با استفاده از $\mathbf{M}_O$ برای نمایش مجموع گشتاورها در سمت چپ تساوی، داریم

$$\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = \mathbf{r}\times\mathbf{R} \qquad (۱۸.۲)$$

این تساوی بیان می‌کند که مجموع گشتاورهای یک سیستم از نیروهای همرس حول یک نقطهٔ داده شده برابر با گشتاور مجموع آن نیروها حول همان

Scanned by CamScanner

نقطه است. همان‌طور که در بخش ۴.۲ اشاره شد، این قضیه کاربردهای زیادی در مکانیک دارد.

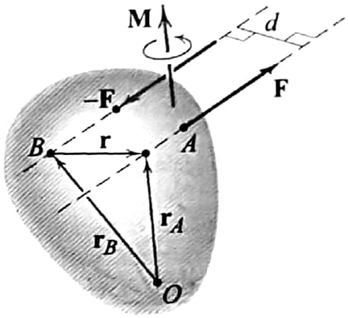


شکل ۲۴.۲

کوپل در سه بعد

مفهوم کوپل در بخش ۵.۲ توصیف شد و به‌راحتی برای سه‌بعد قابل تعمیم است. شکل ۲۵.۲ دو نیروی مساوی و خلاف جهت $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ را نشان می‌دهد که بر یک جسم وارد می‌شوند. بردار $\mathbf{r}$ از هر نقطهٔ دلخواه B بر روی خط اثر $-\mathbf{F}$ تا هر نقطهٔ دلخواه A واقع بر خط اثر $\mathbf{F}$ امتداد می‌یابد. نقطهٔ A و B به‌وسیلهٔ بردارهای مکان $\mathbf{r}_A$ و $\mathbf{r}_B$ نسبت به نقطهٔ O مشخص می‌شوند. مجموع گشتاور حاصل از این دو نیرو حول O برابر است با

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$



شکل ۲۵.۲

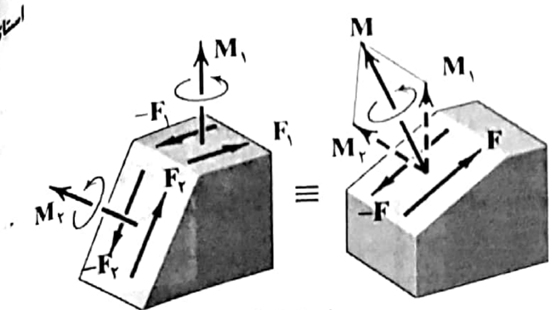
اما $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ می‌باشد، لذا محل قرارگرفتن نقطهٔ O بی‌اهمیت شده و گشتاور کوپل برابر خواهد بود با

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (۱۹.۲)$$

پس، گشتاور یک کوپل *حول هر نقطه مقداری ثابت* دارد. اندازهٔ $\mathbf{M}$ برابر با $M = Fd$ است که d فاصلهٔ عمودی میان خط اثرهای دو نیروست که قبلاً در بخش ۵.۲ شرح داده شد.

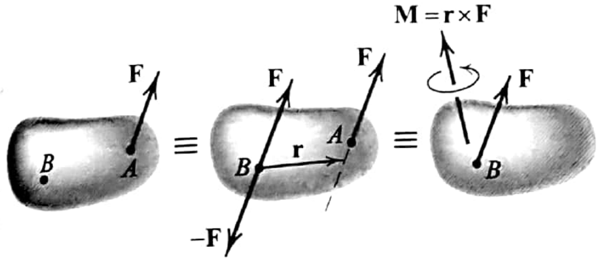
گشتاور یک کوپل، *برداری آزاد* است، درحالی‌که گشتاور یک نیرو حول یک نقطه (که همان گشتاور حول یک محور مشخص گذرنده از آن نقطه است) یک *بردار لغزنده* است که راستای آن هم‌خط با محور گذرنده از همان قسمت می‌باشد. همانند حالت دو بعدی، یک کوپل تمایل دارد تا در جسم، چرخشی حول یک محور عمود بر سطح حاوی نیروهای کوپل ایجاد کند.

بردارهای کوپل از تمامی قوانین حاکم بر مقادیر برداری تبعیت می‌کنند. پس در شکل ۲۶.۲ بردار کوپل $\mathbf{M}_1$ حاصل از $\mathbf{F}_1$ و $-\mathbf{F}_1$ را می‌توان با $\mathbf{M}_2$ یعنی بردار کوپل حاصل از $\mathbf{F}_2$ و $-\mathbf{F}_2$ جمع نموده و کوپل $\mathbf{M}$ را به‌دست آورد که همچنین می‌توان آن را با استفاده از $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ نیز معین کرد.

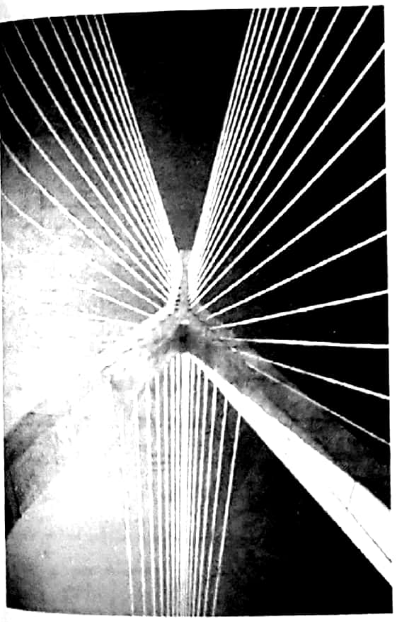


شکل ۲۶.۲

در بخش ۵.۲ آموختیم که چگونه می‌توان یک نیرو را با سیستم کوپل - نیروی معادل آن جایگزین کرد. این عمل باید برای شما در سه بعد نیز امکان‌پذیر باشد. روش آن در شکل ۲۷.۲ نشان داده شده است که در آن $\mathbf{F}$ نیرویی است که بر یک جسم صلب در نقطهٔ A وارد شده و به‌وسیلهٔ یک نیروی مساوی در B و یک کوپل $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ جایگزین می‌شود. با جمع کردن نیروهای مساوی و خلاف جهت $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ در B، می‌توانیم کوپل حاصل از $-\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}$ اولیه را به‌دست آوریم. پس همان‌طور که می‌بینید بردار کوپل همان گشتاور نیروی اولیه حول نقطه‌ای است که نیرو به آن انتقال داده می‌شود. تأکید می‌کنیم که $\mathbf{r}$ برداری است که از نقطهٔ B آغاز شده و به هر نقطهٔ دلخواهی واقع بر خط اثر نیروی اولیهٔ گذرنده از A ختم می‌شود.



شکل ۲۷.۲

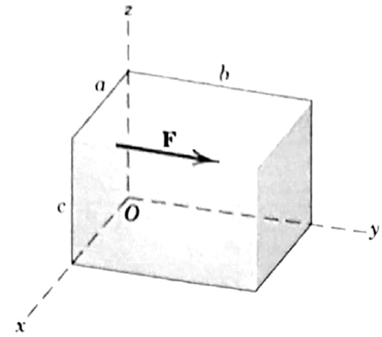


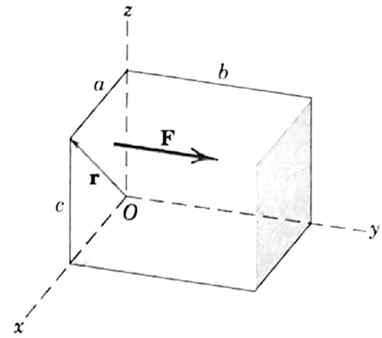
در این نما، سیستم کابل سه‌بعدی پل لئونارد پ. زاکیم بونکر هیل به‌وضوح دیده می‌شود.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱.۲

گشتاور **F** حول نقطهٔ O را به‌روش (الف) بررسی و (ب) با ضرب خارجی یعنی $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ به‌دست آورید.





حل: (الف) با توجه به اینکه **F** با محور y موازی است، گشتاوری حول آن محور ندارد. واضح است که بازوی گشتاور از محور x تا خط اثر **F** برابر با c است و اینکه گشتاور **F** حول محور x منفی است. همچنین بازوی گشتاور از محور z تا خط اثر **F** برابر a است و گشتاور **F** حول محور z مثبت است. پس داریم

$$\mathbf{M}_O = -cF\,\mathbf{i} + aF\,\mathbf{k} = F(-c\,\mathbf{i} + a\mathbf{k})$$ ج.

(ب) به‌طور معمول

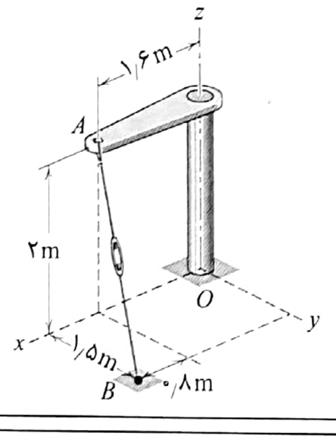
❶
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = (a\mathbf{i} + c\,\mathbf{k})\times F\,\mathbf{j} = aF\mathbf{k} - cF\mathbf{i}$$
$$= F(-c\mathbf{i} + a\mathbf{k})$$ ج.

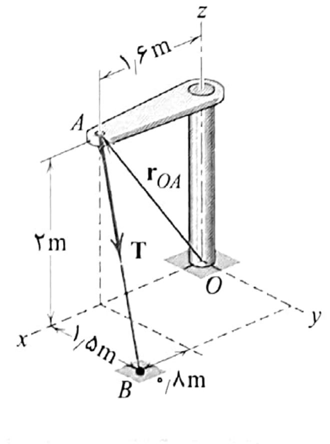
راهنمایی مفید

❶ بار دیگر تأکید می‌کنیم که **r** از نقطهٔ مرکز گشتاور شروع شده و به خط اثر نیروی F ختم می‌شود. یک بردار مکان قابل قبول اما نامناسب‌تر بردار $\mathbf{r} = a\,\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲.۲

پیچ تنظیم آن‌قدر سفت می‌شود تا کشش در کابل AB به مقدار ۲٫۴kN برسد. گشتاور نیروی وارد شده بر نقطهٔ A به‌وسیلهٔ کابل را حول نقطهٔ O و همچنین اندازهٔ آن را به‌دست آورید.





حل: ابتدا این نیرو را به‌صورت یک بردار می‌نویسیم

$$\mathbf{T} = T\mathbf{n}_{AB} = ۲٫۴\left[\frac{۰٫۸\mathbf{i} + ۱٫۵\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}}{\sqrt{۰٫۸^۲ + ۱٫۵^۲ + ۲^۲}}\right] = ۰٫۷۳۱\mathbf{i} + ۱٫۳۷۱\mathbf{j} - ۱٫۸۲۹\mathbf{k}\,\text{kN}$$

گشتاور این نیرو حول O برابر است با

❶
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA}\times\mathbf{T} = (۱٫۶\mathbf{i} + ۲\mathbf{k})\times(۰٫۷۳۱\mathbf{i} + ۱٫۳۷۱\mathbf{j} - ۱٫۸۲۹\mathbf{k})$$
$$= -۲٫۷۴\mathbf{i} + ۴٫۳۹\mathbf{j} + ۲٫۱۹\mathbf{k}\,\text{kN}\cdot\text{m}$$ ج.

اندازهٔ این بردار برابر است با

$$M_O = \sqrt{۲٫۷۴^۲ + ۴٫۳۹^۲ + ۲٫۱۹^۲} = ۵٫۶۲\,\text{kN}\cdot\text{m}$$ ج.

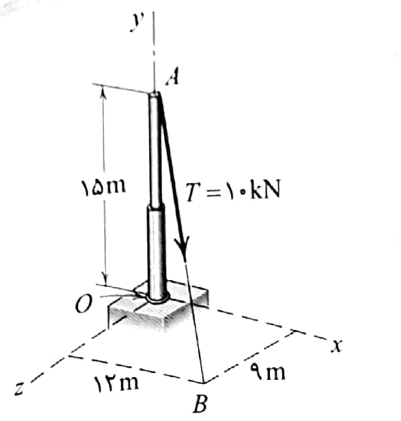
راهنمایی مفید

❶ دانشجو باید بتواند درستی جواب‌ها را با بررسی جهت گشتاورها تأیید کند.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳.۲

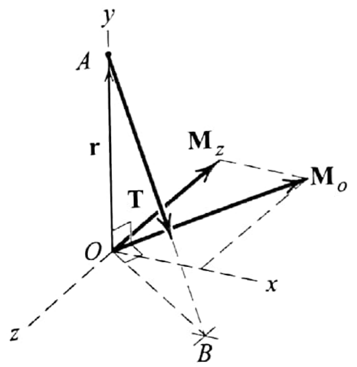
نیروی کشش **T** با اندازه‌ای معادل ۱۰kN به کابل متصل به A بر روی یک دکل صلب، وارد می‌آید و در نقطهٔ B به زمین متصل شده است. گشتاور M_z را برای **T** حول محور z گذرنده از پایهٔ O به‌دست آورید.



حل: (الف) گشتاور موردنظر را می‌توان با پیدا کردن مؤلفهٔ هم‌راستا با محور z برای گشتاور $\mathbf{M}_O$ حاصل از نیروی **T** حول O به‌دست آورد. بردار $\mathbf{M}_O$ بر سطح عمود بوده و به‌وسیلهٔ **T** و نقطهٔ O بیان می‌شود، که می‌توانید آن‌را در شکل ببینید. با استفاده از معادلهٔ (۱۴.۲) برای به‌دست آوردن $\mathbf{M}_O$، بردار **r** می‌تواند هر بردار آغازشونده از نقطهٔ O و ❶ ختم‌شونده به خط اثر **T** باشد. آسان‌ترین انتخاب برای این بردار، از نقطهٔ O به A است، که می‌توان آن را به‌صورت $\mathbf{r}=۱۵\mathbf{j}\text{m}$ نوشت. بیان برداری **T** برابر است با

$$\mathbf{T}=T\mathbf{n}_{AB}=۱۰\left[\frac{۱۲\mathbf{i}-۱۵\mathbf{j}+۹\mathbf{k}}{\sqrt{(۱۲)^۲+(-۱۵)^۲+(۹)^۲}}\right]$$
$$=۱۰(۰/۵۶۶\mathbf{i}-۰/۷۰۷\mathbf{j}+۰/۴۲۴\mathbf{k})\text{kN}$$

با توجه به معادلهٔ (۱۴.۲)

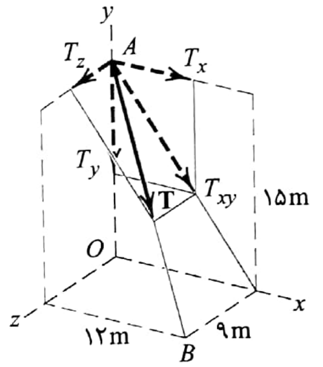


$$[\mathbf{M}_O=\mathbf{r}\times\mathbf{F}]\qquad \mathbf{M}_O=۱۵\mathbf{j}\times ۱۰(۰/۵۶۶\mathbf{i}-۰/۷۰۷\mathbf{j}+۰/۴۲۴\mathbf{k})$$
$$=۱۵۰(-۰/۵۶۶\mathbf{k}+۰/۴۲۴\mathbf{i})\text{kN}\cdot\text{m}$$

مقدار M_z برای گشتاور خواسته شده برابر با مؤلفهٔ عددی $\mathbf{M}_O$ در راستای محور z است یا $M_z=\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{k}$. در نتیجه

$$M_z=۱۵۰(-۰/۵۶۶\mathbf{k}+۰/۴۲۴\mathbf{i})\cdot\mathbf{k}=-۸۴/۹\,\text{kN}\cdot\text{m}\qquad\text{ج.}$$

❷ علامت منفی $\mathbf{M}_z$ نشان‌دهندهٔ آن است که بردار $\mathbf{M}_z$ در جهت منفی محور z بوده و بیان برداری آن به‌صورت $\mathbf{M}_z=-۸۴/۹\mathbf{k}\ \text{kN}\cdot\text{m}$ است.



(ب) نیرو با مقدار T به مؤلفه‌های T_z و T_{xy} در صفحهٔ x-y تقسیم می‌شود. با توجه به آنکه T_z موازی با محور z هاست، گشتاوری حول آن محور ایجاد نمی‌کند. در نتیجه گشتاور M_z ❸ فقط حاصل T_{xy} بوده و برابر با $M_z=T_{xy}d$ است که در آن d فاصلهٔ عمودی از T_{xy} تا O است. کسینوس زاویهٔ میان T و T_{xy} برابر با $۰/۹۰۶=\sqrt{۱۵^۲+۱۲^۲}\,/\,\sqrt{۱۵^۲+۱۲^۲+۹^۲}$ است و بنابراین

$$T_{xy}=۱۰(۰/۹۰۶)=۹/۰۶\text{kN}$$

بازوی گشتاور d معادل با $\overline{OA}$ ضربدر سینوس زاویهٔ بین T_{xy} و OA است یا

$$d=۱۵\frac{۱۲}{\sqrt{۱۲^۲+۱۵^۲}}=۹/۳۷\text{m}$$

بنابراین گشتاور **T** حول محور z اندازه‌ای برابر

$$M_z=۹/۰۶(۹/۳۷)=۸۴/۹\text{kN}\cdot\text{m}\qquad\text{ج.}$$

دارد و اگر در صفحهٔ x-y نشان داده شود، ساعتگرد است.

(ج) مؤلفهٔ T_{xy} به دو مؤلفهٔ T_x و T_y تجزیه می‌شود. واضح است که T_y گشتاوری حول محور z ایجاد نمی‌کند؛ چرا که از آن می‌گذرد در نتیجه گشتاور خواسته شده تنها حاصل از T_x است. کسینوس هادی **T** در راستای محور x برابر با $۰/۵۶۶=۱۲/\sqrt{۹^۲+۱۲^۲+۱۵^۲}$ است پس $T_x=۱۰(۰/۵۶۶)=۵/۶۶\text{kN}$ خواهد شد. بنابراین

$$M_z=۵/۶۶(۱۵)=۸۴/۹\text{kN}\cdot\text{m}\qquad\text{ج.}$$

راهنمایی‌های مفید

❶ می‌توانستیم برداری از O تا B را به‌جای **r** به‌کار بریم و نتیجهٔ یکسانی را به‌دست آوریم، ولی استفاده از بردار OA ساده‌تر است.

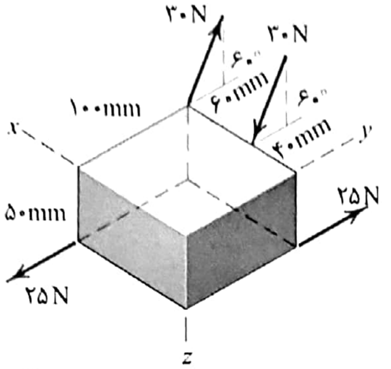
❷ همیشه همراهی کردن عملیات برداری با شکل ترسیمی هندسی مسئله بسیار مفید است.

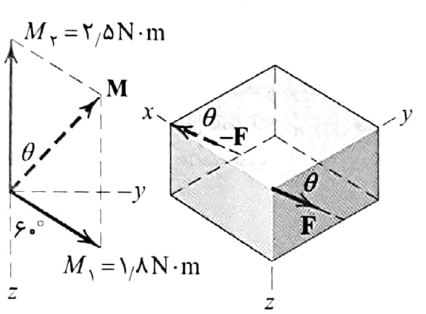
❸ نمای ترسیمی x-y مسئله را رسم کنید و d را نشان دهید.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۴.۲

اندازه و راستای کوپل **M** را که جایگزین دو کوپل داده‌شده می‌شود و همان تأثیر را در بلوک می‌گذارد، محاسبه کنید. دو نیروی **F** و **F**− را، که بر دو وجه بلوک موازی با سطح y-z وارد می‌شوند، طوری تعیین کنید که جایگزین چهار نیروی اولیه شوند. نیروهای ۳۰N به‌موازات سطح y-z وارد می‌شوند.





حل: کوپل حاصل از دو نیروی ۳۰ نیوتنی اندازه‌ای برابر با $M_1 = ۳۰(۰/۰۶) = ۱/۸۰\text{N}\cdot\text{m}$ دارد. راستای $\mathbf{M}_1$ عمود بر سطح تشکیل‌شده به‌وسیلهٔ دو نیرو بوده و جهت آن در شکل نشان داده شده، به‌وسیلهٔ قانون دست راست مشخص می‌شود. کوپل حاصل از دو نیروی ۲۵N دارای اندازه‌ای به‌مقدار $M_2 = ۲۵(۰/۱۰) = ۲/۵۰\text{N}\cdot\text{m}$ می‌باشد و راستا و جهت آن در همان شکل نشان داده شده است. با ترکیب دو بردار کوپل زیر به‌دست می‌آید

$$M_y = ۱/۸۰\sin ۶۰° = ۱/۵۵۹\,\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = -۲/۵۰ + ۱/۸۰\cos ۶۰° = -۱/۶۰۰\,\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M = \sqrt{(۱/۵۵۹)^۲ + (-۱/۶۰۰)^۲} = ۲/۲۳\,\text{N}\cdot\text{m}$$ ❶ ج.

$$\theta = \tan^{-۱}\frac{۱/۵۵۹}{۱/۶۰۰} = \tan^{-۱}۰/۹۷۴ = ۴۴/۳°$$ ج.

نیروهای **F** و **F**− در سطحی عمود بر کوپل **M** قرار دارند و بازوی گشتاور آنها با توجه به شکل سمت راست برابر ۱۰۰mm است. بنابراین هر نیرو اندازه‌ای برابر مقدار زیر را دارد

$$[M = Fd] \qquad F = \frac{۲/۲۳}{۰/۱۰} = ۲۲/۳\text{N}$$ ج.

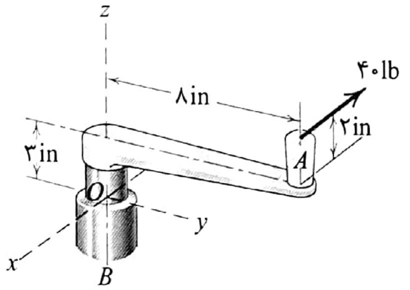
و راستای آن $\theta = ۴۴/۳°$ است.

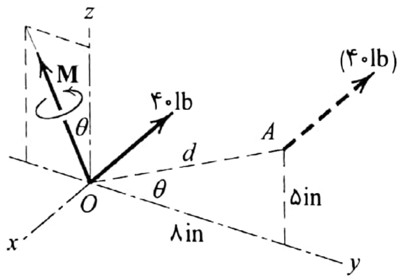
راهنمایی مفید

❶ دقت کنید که بردارهای کوپل *بردارهایی آزادند* و لذا هیچ خط اثر معینی به آنها نسبت داده نمی‌شود.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵.۲

نیروی ۴۰lb بر نقطهٔ A از دستهٔ یک اهرم کنترل متصل به محور ثابت OB اعمال می‌شود. برای تعیین اثر نیرو بر روی محور در نقطه‌ای مانند O، نیرو را با یک نیروی معادل در O و یک کوپل جایگزین می‌کنیم. این کوپل را به‌صورت یک بردار **M** توصیف کنید.





حل: بیان برداری کوپل را می‌توان با استفاده از $\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ به‌دست آورید که در آن $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA} = ۸\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}\,\text{in}$ و $\mathbf{F} = -۴۰\mathbf{i}\,\text{lb}$ است. بنابراین

$$\mathbf{M} = (۸\mathbf{j} + ۵\mathbf{k})\times(-۴۰\mathbf{i}) = -۲۰۰\mathbf{j} + ۳۲۰\mathbf{k}\,\text{lb}\cdot\text{in}$$

علاوه بر آن واضح است که انتقال نیروی ۴۰lb به‌فاصلهٔ $d = \sqrt{۵^۲ + ۸^۲} = ۹/۴۳\text{in}$ در یک موقعیت موازی گذرنده از O، نیازمند اضافه کردن کوپل **M** است که مقدار آن برابر است با

$$M = Fd = ۴۰(۹/۴۳) = ۳۷۷\,\text{lb}\cdot\text{in}$$ ج.

بردار کوپل عمود بر سطحی است که نیرو به آن انتقال می‌یابد و جهت آن هم‌جهت با گشتاور نیروی داده‌شده حول O است. جهت **M** در سطح y-z به‌صورت زیر است

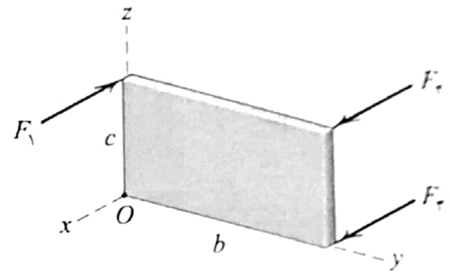
$$\theta = \tan^{-۱}\frac{۵}{۸} = ۳۲/۰°$$ ج.

Scanned by CamScanner

مسائل

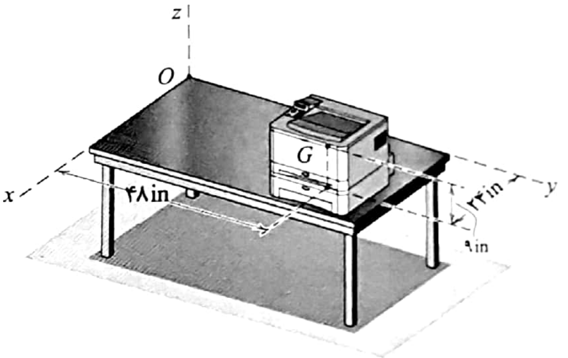
مسائل مقدماتی

۱۲۱.۲ سه نیروی نشان‌داده‌شده به‌صورت عمودی بر صفحهٔ مستطیل‌شکلی اعمال می‌شوند. گشتاورهای $\mathbf{M}_1$ برای $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{M}_2$ برای $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{M}_3$ برای $\mathbf{F}_3$، حول نقطهٔ O را معین کنید.



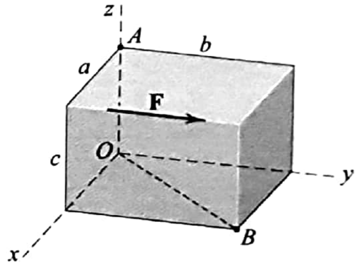
شکل م ۱۲۱.۲

۱۲۲.۲ وزن چاپگر برابر ۸۰lb بوده و مرکز جرم آن در نقطهٔ G قرار دارد. گشتاور $\mathbf{M}_O$ برای این وزن حول نقطهٔ O را بر روی قسمت افقی بالای میز تعیین کنید. همچنین اندازهٔ $\mathbf{M}_O$ را به‌دست آورید.



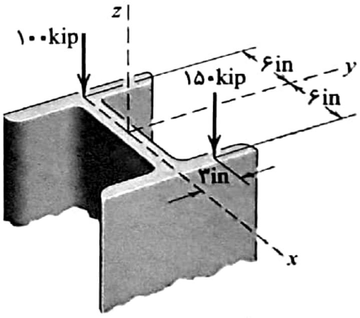
شکل م ۱۲۲.۲

۱۲۳.۲ گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ حول نقاط O و A، و خط OB را تعیین کنید.



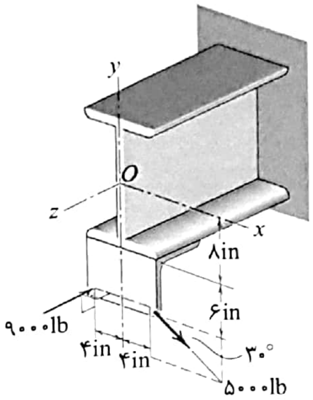
شکل م ۱۲۳.۲

۱۲۴.۲ تیر H ـ شکل فولادی جهت استفاده در یک ستون، با در نظرگرفتن تأثیر نیروهای عمودی نشان‌داده‌شده، طراحی می‌شود. این نیروها را با یک تک‌نیروی معادل در راستای خط مرکزی عمودی ستون و یک کوپل $\mathbf{M}$، جایگزین کنید.



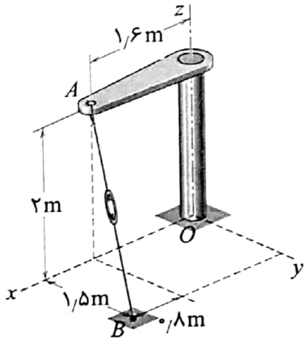
شکل م ۱۲۴.۲

۱۲۵.۲ نبشی جوش شده به بال پایین تیر I ـ شکلی نیروی ۹۰۰۰lb موازی با محور ... تیر و نیروی ۵۰۰۰lb وارد بر انتهای سطح تیر را تحمل می‌کند. در تحلیل ظرفیت ... برای تحمل بارگذاری در مرحلهٔ طراحی، آسان‌تر است که نیروها را با یک تک‌نیروی معادل در O و یک کوپل $\mathbf{M}$ جایگزین کنیم. مؤلفه‌های x، y و z متعلق به گشتاور ... را محاسبه کنید.



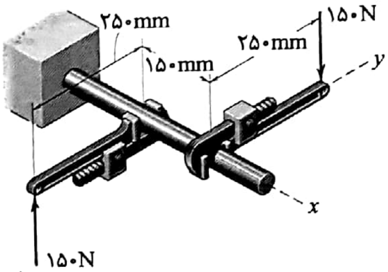
شکل م ۱۲۵.۲

۱۲۶.۲ پیچ تنظیم آن‌قدر سفت می‌شود تا کشش در کابل AB به مقدار ۱٫۲kN برس... اندازهٔ گشتاور نیروی وارد بر نقطهٔ A حول نقطهٔ O را تعیین کنید.



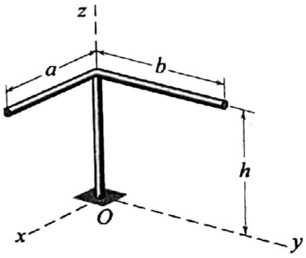
شکل م ۱۲۶.۲

۱۲۷.۲ دو نیروی وارد شده بر دستهٔ آچار شلاقی، تشکیل کوپل $\mathbf{M}$ را می‌دهند. ای... کوپل را به‌صورت یک بردار نشان دهید.



شکل م ۱۲۷.۲

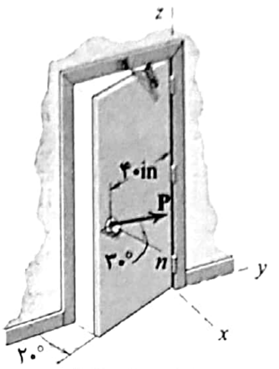
۱۲۸.۲ جسم نشان‌داده‌شده از یک میلهٔ باریک تشکیل شده است که به‌ازای هر یکا... طول، جرمی معادل ρ دارد. گشتاور وزن این جسم را حول نقطهٔ O به‌دست آورید.



شکل م ۱۲۸.۲

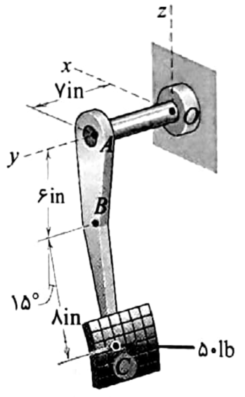
Scanned by CamScanner

۱۲۹.۲ برای بازکردن یک درب که دارای سازوکار بازگشت است، شخصی نیروی P به اندازهٔ ۶lb را مطابق شکل وارد می‌کند. نیروی P و خط n عمود بر سطح در صفحه‌ای عمودی قرار دارند. گشتاور P حول محور z را به‌دست آورید.



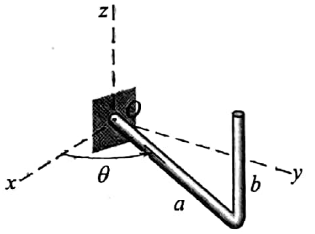
شکل م ۱۲۹.۲

۱۳۰.۲ یک نیروی ۵۰ پوندی به پدال کنترل زیر وارد می‌شود. نیرو در سطحی به‌موازات سطح x-z قرار داشته و بر BC عمود است. گشتاور این نیرو را حول O و همچنین حول میل‌گردان OA محاسبه کنید.



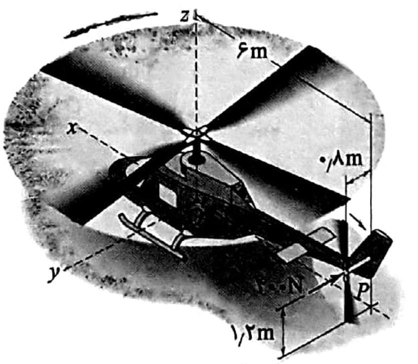
شکل م ۱۳۰.۲

۱۳۱.۲ میله‌ای خمیده دارای جرمی معادل ρ به‌ازای یکای طول است. گشتاور وزن میله حول نقطهٔ O را تعیین نمایید.



شکل م ۱۳۱.۲

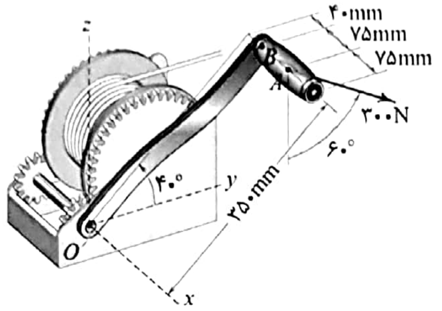
۱۳۲.۲ شکل هلی‌کوپتری را با مختصات سه‌بعدی نشان می‌دهد. در یک آزمون بر روی زمین، نیروی آیرودینامیک ۴۰۰ نیوتنی به ملخ عقب آن وارد می‌شود. گشتاور این نیرو حول نقطهٔ O را محاسبه کنید.



شکل م ۱۳۲.۲

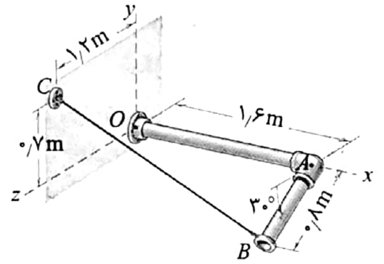
مسائل برگزیده

۱۳۳.۲ نیروی ۳۰۰ نیوتنی به دستهٔ وینچ نشان‌داده‌شده وارد می‌شود. این نیرو در سطحی به‌موازات صفحهٔ y-z قرار دارد و بر خط AB بر روی دسته عمود است. گشتاور این نیرو حول نقطهٔ O و حول محور x را محاسبه کنید.



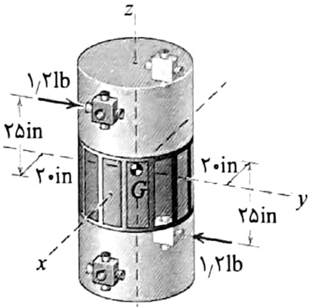
شکل م ۱۳۳.۲

۱۳۴.۲ لولهٔ قائم‌الزاویهٔ OAB مسئلهٔ ۱۱۱.۲ را در نظر بگیرید. نیروی کششی ۷۵۰N را که کابل بر نقطهٔ B وارد می‌کند، با یک سیستم کوپل-نیرو در نقطهٔ O جایگزین کنید.



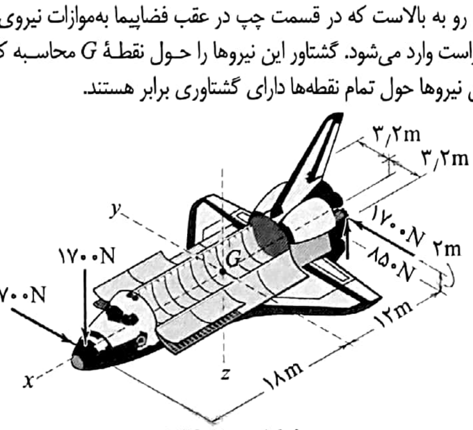
شکل م ۱۳۴.۲

۱۳۵.۲ دو پیش‌برندهٔ ۱/۲ پوندی بر روی ماهوارهٔ غیرچرخان نشان‌داده‌شده، هم‌زمان با هم به کار می‌افتند. گشتاور حاصل از این کوپل را محاسبه کرده و مشخص کنید که ماهواره حول چه محورهایی شروع به چرخش خواهد کرد.



شکل م ۱۳۵.۲

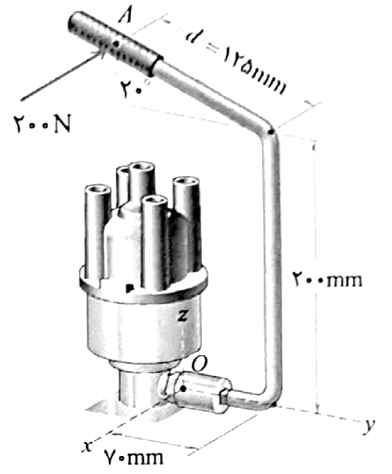
۱۳۶.۲ یک فضاپیما تحت تأثیر نیروی رانش حاصل از پنج موتور واقع بر آن قرار می‌گیرد. چهار تا از این نیروها در شکل نشان داده شده‌اند؛ نیروی پنجم یک نیروی رانش ۸۵۰ نیوتنی رو به بالاست که در قسمت چپ در عقب فضاپیما به‌موازات نیروی ۸۵۰ نیوتنی در قسمت راست وارد می‌شود. گشتاور این نیروها را حول نقطهٔ G محاسبه کرده و نشان دهید که این نیروها حول تمام نقطه‌ها دارای گشتاوری برابر هستند.



شکل م ۱۳۶.۲

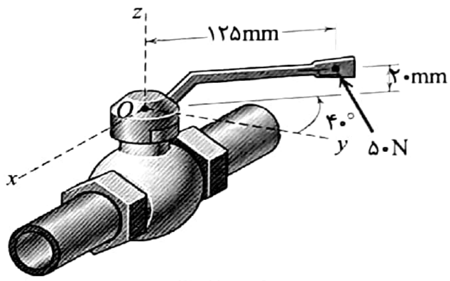
Scanned by CamScanner

۱۳۷.۲ آچار مخصوص نشان‌داده‌شده در شکل برای دسترسی به پیچ اتصال دلکو در بعضی از اتومبیل‌ها طراحی شده است. برای حالت نشان‌داده‌شده که آچار در صفحهٔ عمودی قرار داشته و نیروی ۲۰۰ نیوتنی افقی به نقطهٔ A عمود بر دسته وارد می‌شود، گشتاور $\mathbf{M}_O$ وارد بر پیچ در O را محاسبه کنید. برای چه مقداری از فاصلهٔ d مؤلفهٔ z از $\mathbf{M}_O$ صفر خواهد بود؟



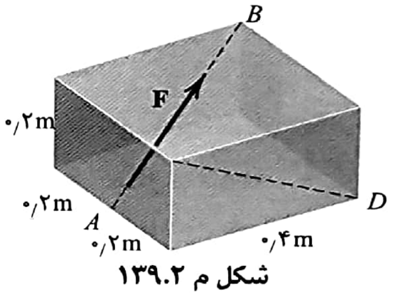
شکل م ۱۳۷.۲

۱۳۸.۲ مطابق شکل نیروی ۵۰ نیوتنی افقی به دستهٔ یک شیر صنعتی وارد می‌شود. نیرو عمود بر صفحهٔ افقی حاوی خط OA بر روی دسته است. سیستم کوپل ـ نیروی معادل در نقطهٔ O را معین کنید.



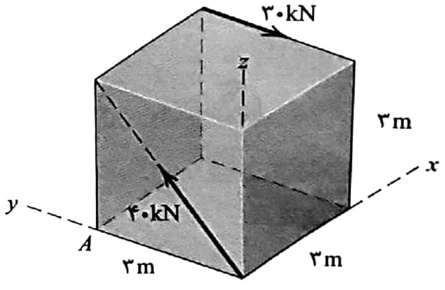
شکل م۱۳۸.۲

۱۳۹.۲ اگر اندازهٔ گشتاور **F** حول خط CD برابر ۵۰N·m باشد، اندازهٔ **F** را معین کنید.



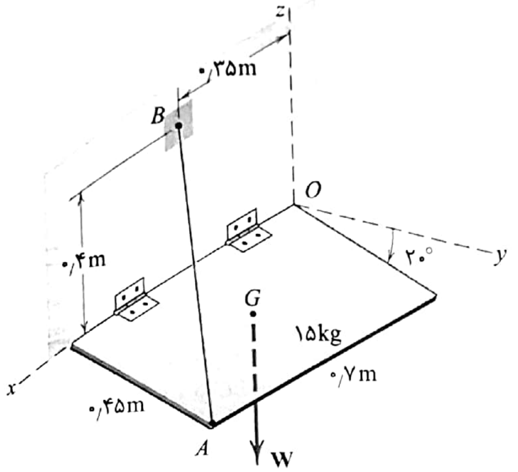
شکل م ۱۳۹.۲

۱۴۰.۲ دو نیروی وارد بر مکعب به‌ضلع ۳m را با یک نیروی **F** معادل در A و یک کوپل **M** جایگزین نمایید.



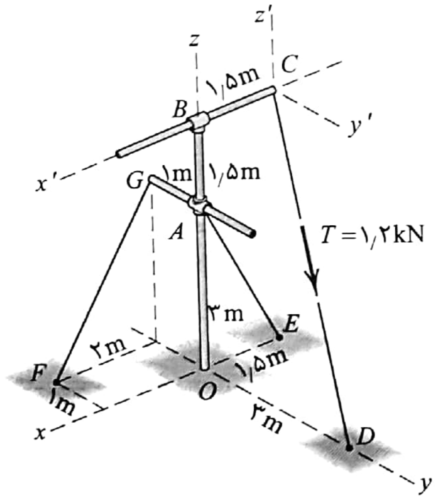
شکل م ۱۴۰.۲

۱۴۱.۲ با استفاده از اصول توضیح داده شده در فصل ۳ در مورد تعادل، مشخص کرد که نیروی داخل کابل AB معادل ۱۴۳٫۴N است. گشتاور حول محور x برای این نیروی کشش وارد بر A معین کنید. نتایج خود را با گشتاور حاصل از وزن یک صفحهٔ یکنواخت ۱۵ کیلوگرمی حول محور x مقایسه کنید. گشتاور نیروی کشش وارد بر نقطهٔ A حول خط OB چقدر است؟



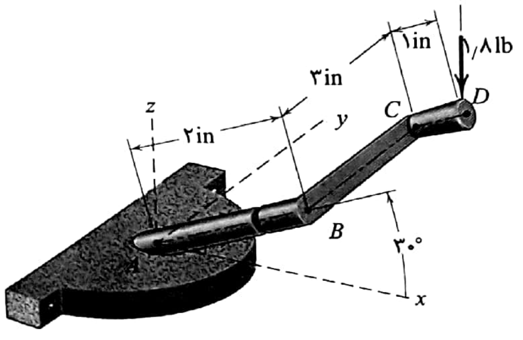
شکل م ۱۴۱.۲

۱۴۲.۲ ستون صلب و بازوهای متصل مسئلهٔ ۱۰۷.۲ را در نظر بگیرید. گشتاور نیروی کششی ۱٫۲kN را به‌صورت برداری حول (الف) نقطهٔ O و (ب) محور z ستون به‌دست آورید. هر گشتاور را از دو روش متفاوت محاسبه کنید.



شکل م ۱۴۲.۲

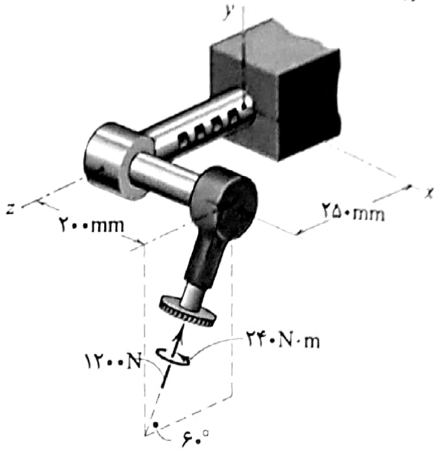
۱۴۳.۲ بر دستگیرهٔ یک سازوکار بازکردن پنجره، هنگامی که قسمت BC به‌صورت افقی قرار دارد، نیروی ۱٫۸lb به‌طور عمودی وارد می‌شود. گشتاور این نیرو حول نقطهٔ A و خط AB را تعیین کنید.



شکل م ۱۴۳.۲

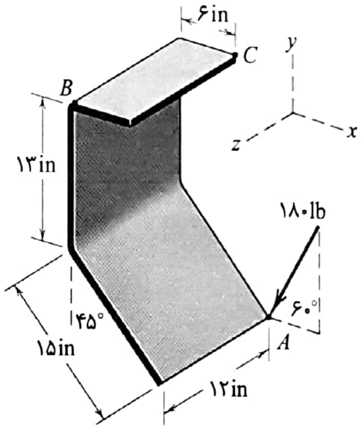
Scanned by CamScanner

۱۴۴.۲ ماشین برش زیر، تحت یک نیروی ۱۲۰۰ نیوتنی و یک کوپل به‌مقدار ۲۴۰N·m قرار می‌گیرد. گشتاور این سیستم حول نقطهٔ O را تعیین کنید.



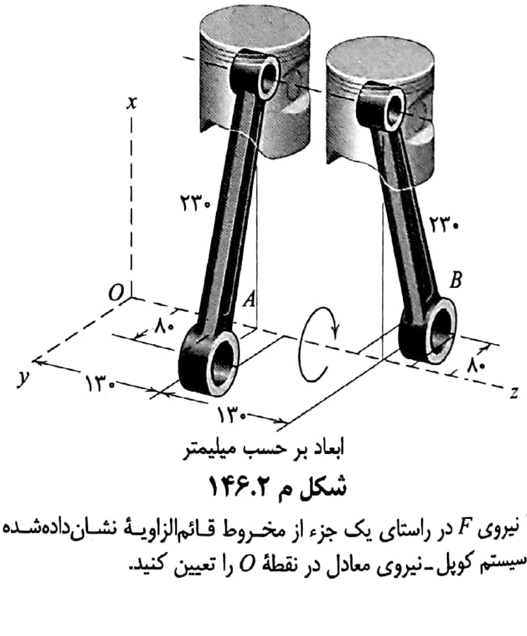
شکل م ۱۴۴.۲

۱۴۵.۲ نیروی ۱۸۰lb بر نقطهٔ A بر روی دیوارکوب وارد می‌شود. گشتاور این نیـرو را حول نقطهٔ B، نقطهٔ C و خط BC تعیین کنید.



شکل م ۱۴۵.۲

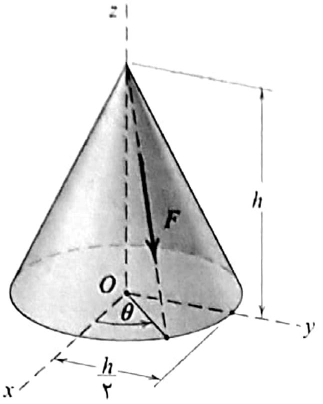
۱۴۶.۲ در لحظهٔ نشان‌داده‌شده، پین‌های متعلق به میل‌لنگ‌های یک موتور دوسیلندر، از صفحهٔ افقـی y-z مـی‌گذرنـد. اگـر میلـهٔ اتصـال A تحـت تـأثیر نیـروی فشـاری معادل ۱٫۸kN و میلهٔ B تحت تأثیر نیروی فشاری به‌مقدار ۰٫۸kN باشد، گشتاور وارد شده به‌وسیلهٔ میله‌ها را حول محور میل‌لنگ‌ها یعنی محور z به‌دست آوریـد. بـه‌منظـور طراحی، لازم است که عبارت برداری برای گشتاور دو نیرو حول یکی از بلبرینگ‌هـای اصلی در O به‌دست آید.



ابعاد بر حسب میلیمتر

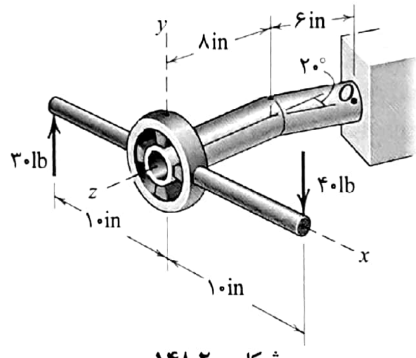
شکل م ۱۴۶.۲

۱۴۷.۲ نیروی F در راستای یک جزء از مخـروط قـائم‌الزاویـهٔ نشـان‌داده‌شـده عمـل می‌کند. سیستم کوپل ـ نیروی معادل در نقطهٔ O را تعیین کنید.



شکل م ۱۴۷.۲

◄ **۱۴۸.۲** سازوکار چرخ نخ‌ریسی بر انتهای یک لولهٔ ثابت و خمیده بـا زاویـهٔ °۲۰ پـیچ شـده است. دو نیرو را با یک نیروی معادل در O و یک کوپل $\mathbf{M}$ جایگزین کنید. $\mathbf{M}$ را بـه‌دست آورده و اندازهٔ M' گشتاوری را که تمایل دارد تا لوله را به داخـل بلـوک ثابـت حـول محـور خمیدهٔ گذرنده از O پیچ کند، محاسبه کنید.



شکل م ۱۴۸.۲

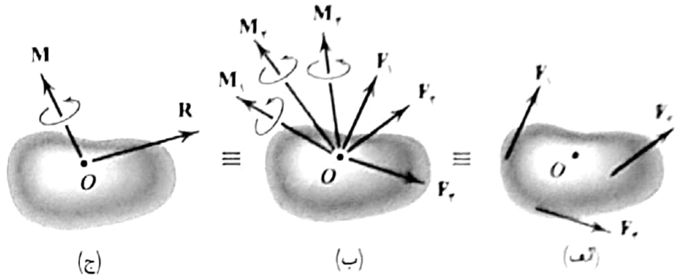
۹.۲ برایندها

در بخش ۶.۲ برایند را به‌عنوان ساده‌ترین ترکیب نیروها شـرح داده و نشـان دادیـم که چگونه می‌توان به‌کمک آن، یک سیستم از نیروها را بدون آنکـه تغییـری در اثـر خارجی‌شان بر جسم ایجاد کند، جایگزین کرد. ما توانسـتیم انـدازه و جهـت نیـروی برایند را در یک سیستم نیروی دوبعدی به‌کمک جمع بـرداری (معادلـهٔ ۹.۲)، تعیـین کرده و خط اثر نیروی برایند حاصل را به‌کمک اصول گشتاورهای توضیح داده شـده در معادلهٔ (۱۰.۲) به‌دست آوریم. از این اصول می‌توان در سه بعد نیز استفاده کرد.

در بخش قبل، نشان دادیم که یک نیرو را می‌توان بـا اضـافه کـردن یـک کوپل به یک موقعیت موازی با نیـروی اولیـه انتقـال داد. بنـابراین بـرای یـک سیستم از نیروهای $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$، $\mathbf{F}_3$ و ... که بر جسم صلب نشان‌داده‌شده در شـکل ۲۸.۲ (الف) وارد می‌شوند، می‌توان هریک از آنها را به نقطـهٔ دلخـواه O انتقـال داد، به‌شرطی‌که برای هر نیروی منتقل‌شده، یک کوپل وارد سیستم کنیم. لـذا بـه‌عنـوان مثـال مـی‌تـوانیم نیـروی $\mathbf{F}_1$ را بـه نقطـهٔ O انتقـال دهـیم، بـه‌شـرط آنکـه کوپل $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ را وارد سیستم کنیم؛ که $\mathbf{r}_1$ برداری است که از نقطـهٔ O آغـاز شده و می‌تواند به هر نقطه‌ای بر روی خط اثر نیرو $\mathbf{F}_1$ ختم شود. هنگامی‌که به ایـن ترتیب تمام نیروها به O انتقال داده شدند، سیستم تبدیل بـه سیسـتمی از نیروهـای همرس در O و همچنین بردارهای کوپل خواهد شد، که مـی‌توانیـد آن را در شـکل ۲۸.۲ (ب) ببینید. سپس می‌توان نیروهای همرس را با یکدیگر جمع برداری نمـوده و نیروی برایند $\mathbf{R}$ را به‌دست آورد. همچنین کوپل‌ها را با یکدیگر جمـع کـرد و کوپـل برایند $\mathbf{M}$ را محاسبه کرد که در شکل ۲۸.۲ (ج) نشان داده شده است. بـا ایـن کـار هر سیستم نیروها را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots = \Sigma \mathbf{F}$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \ldots = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (۲۰.۲)$$

Scanned by CamScanner



شکل ۲۸.۲

بردارهای کوپل بر روی نقطهٔ O نمایش داده شده‌اند اما با توجه به اینکه بردارهایی آزاد هستند، می‌توان آنها را در هر موقعیت موازی با موقعیت اولیه نمایش داد. اندازهٔ برایند و مؤلفه‌های آنها برابرند با

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z$$
$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}$$
$$\mathbf{M}_x = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_x \qquad \mathbf{M}_y = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_y \qquad \mathbf{M}_z = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_z \quad (۲۱.۲)$$
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

نقطهٔ انتخاب‌شدهٔ O به‌عنوان محل تقاطع نیروها، نقطه‌ای دلخواه است و اندازه و جهت $\mathbf{M}$ بستگی به محل نقطهٔ O دارد. با این حال اندازه و جهت $\mathbf{R}$ مستقل از محل انتخاب O می‌باشد.

در کل هر سیستم از نیروها را می‌توان با یک نیروی برایند $\mathbf{R}$ و یک کوپل برایند $\mathbf{M}$ جایگزین کرد. در دینامیک معمولاً مرکز جرم را به‌عنوان نقطهٔ مرجع انتخاب می‌کنیم. تغییر در حرکت خطی یک جسم حاصل از برایند نیروها بوده و تغییر در حرکت زاویه‌ای جسم حاصل از کوپل معادل می‌باشد. در استاتیک، جسم هنگامی در *تعادل کامل* قرار گرفته است که نیروی برایند $\mathbf{R}$ وارد بر آن صفر بوده و همچنین کوپل برایند $\mathbf{M}$ صفر باشد، جسم در تعادل کامل قرار دارد. بنابراین تعیین برایندها امری ضروری چه در استاتیک و چه در دینامیک است.

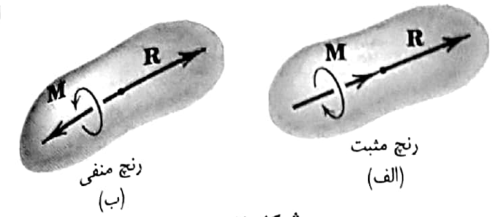
اکنون برایند چند سیستم نیروی خاص را بررسی می‌کنیم.

نیروهای همرس: هنگامی‌که نیروها در یک نقطه با یکدیگر همرس‌اند، فقط قسمت اول معادلهٔ (۲۰.۲) قابل استفاده است، زیرا گشتاوری حول نقطهٔ تقاطع وجود ندارد.

نیروهای موازی: برای یک سیستم از نیروهای موازی غیرهم‌سطح، اندازهٔ نیروی برایند $\mathbf{R}$ برابر با جمع جبری اندازه‌های آن نیروهای داده شده است. محل قرار گرفتن خط اثر آن را می‌توان از اصل گشتاورها با استفاده از $\mathbf{r}\times\mathbf{R}=\mathbf{M}_O$ به‌دست آورد. در اینجا $\mathbf{r}$ بردار مکانی است که از نقطهٔ مرجع سیستم کوپل ـ نیرو یعنی O آغاز شده و به خط اثر نهایی $\mathbf{R}$ ختم می‌شود و $\mathbf{M}_O$ معادل مجموع گشتاورهای تک‌تک نیروها حول O است. برای درک بهتر می‌توانید به مسئلهٔ نمونهٔ ۱۷.۲ مراجعه کنید.

نیروهای هم‌سطح: بخش ۶.۲ به این‌گونه از سیستم‌ها اختصاص داده شد.

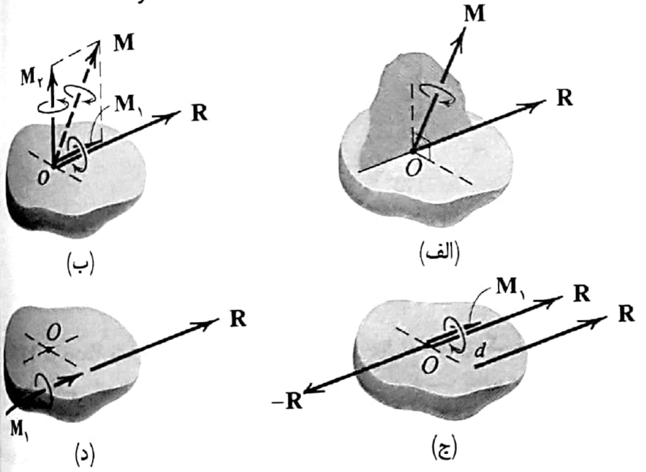
برایند رنچ: هنگامی‌که بردار کوپل برایند $\mathbf{M}$ با نیروی برایند $\mathbf{R}$ موازی باشد (شکل ۲۹.۲)، به برایند آن یک *رنچ* می‌گوییم. طبق تعریف یک رنچ وقتی مثبت است که بردارهای کوپل و نیرو هردو در یک جهت باشند و هنگامی منفی است که در خلاف جهت یکدیگر باشند. یک نمونهٔ معمول از رنچ مثبت در استفاده از یک پیچ‌گوشتی بر روی یک پیچ راستگرد دیده می‌شود. هر سیستم نیرو را می‌توان به‌وسیلهٔ یک رنچ اعمال‌شده در راستای یک خط اثر یکتا نشان داد. این کار در شکل ۳۰.۲ نشان داده شده است، که در قسمت (الف) آن، نیروی برایند $\mathbf{R}$ وارد بر نقطهٔ O و کوپل برایند $\mathbf{M}$ را برای یک سیستم نیروی کلی نمایش می‌دهد. با آنکه $\mathbf{M}$ یک بردار آزاد است برای راحتی کار، آن را وارد بر O نمایش می‌دهیم.



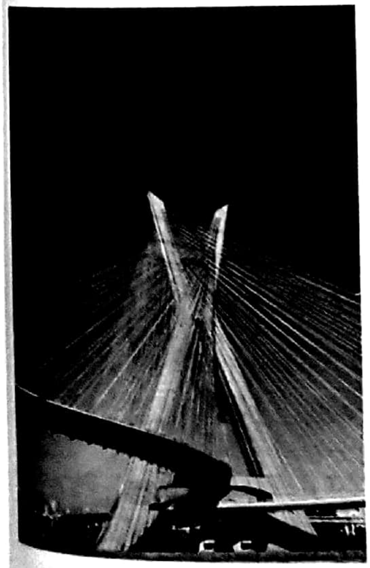
شکل ۲۹.۲

در شکل ۳۰.۲ (ب)، $\mathbf{M}$ به دو مؤلفهٔ $\mathbf{M}_1$ در راستای $\mathbf{R}$ و $\mathbf{M}_2$ عمود بر $\mathbf{R}$ تجزیه شده است. در شکل ۳۰.۲ (ج)، کوپل $\mathbf{M}_2$، به‌وسیلهٔ یک سیستم معادل از دو نیروی $\mathbf{R}$ و $-\mathbf{R}$ به‌فاصلهٔ $d = M_2/R$ جایگزین شده که برای خنثی کردن $\mathbf{R}$ اولیه به نقطهٔ O اعمال شده است. همان‌طورکه در شکل ۳۰.۲ (د) می‌بینید. در این مرحله تنها نیروی برایند $\mathbf{R}$ در امتداد خط اثر یگانهٔ جدید و کوپل $\mathbf{M}_1$ به‌عنوان بردار آزاد موازی با آن باقی می‌ماند. بنابراین برایندهای سیستم اولیهٔ نیرو، تبدیل به یک رنچ (در این مثال مثبت) شدند که محور یکتای آن به‌وسیلهٔ موقعیت جدید $\mathbf{R}$ بیان می‌شود.

با توجه به شکل ۳۰.۲ می‌توانیم ببینیم که محور رنچ معادل در سطح گذرنده از O و عمود بر سطح حاوی $\mathbf{R}$ و $\mathbf{M}$ قرار دارد. رنچ ساده‌ترین شکل است که می‌توان با آن یک سیستم نیرو را نشان داد. با این حال این شکل برایند، استفادهٔ محدودی دارد چرا که اغلب آسان‌تر است تا نقطهٔ O بر نقطه‌ای غیر واقع بر محور رنچ، مثلاً بر مرکز جرم جسم انتخاب شود.



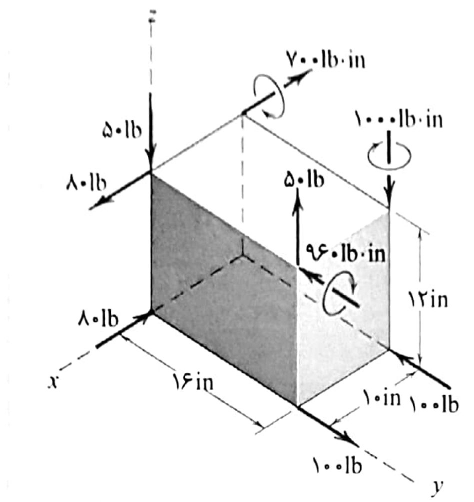
شکل ۳۰.۲



کابل‌های این پل، یک سیستم سه‌بعدی از نیروها را به ستون پل وارد می‌کنند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶.۲

برایند سیستم کوپل ـ نیروی وارد بر مستطیل توپُر را به‌دست آورید.



حل: نقطهٔ O را به‌عنوان نقطهٔ مرجع در نظر می‌گیریم تا بتوانیم نیروهای داده شده را به‌راحتی به یک سیستم کوپل ـ نیرو ساده‌کنیم. نیروی برایند برابر است با

❶ $$\mathbf{R}=\Sigma\mathbf{F}=(۸۰-۸۰)\mathbf{i}+(۱۰۰-۱۰۰)\mathbf{j}+(۵۰-۵۰)\mathbf{k}=۰\,\text{lb}$$

مجموع گشتاورها حول O برابر است با

❷ $$\mathbf{M}_O=[۵۰(۱۶)-۷۰۰]\mathbf{i}+[۸۰(۱۲)-۹۶۰]\mathbf{j}+[۱۰۰(۱۰)-۱۰۰۰]\mathbf{k}\,\text{lb}\cdot\text{in}=۱۰۰\mathbf{i}\,\text{lb}\cdot\text{in}$$

بنابراین برایند تشکیل شده است از یک کوپل که می‌توان آن را به هر نقطه‌ای از جسم یا امتداد آن اعمال کرد.

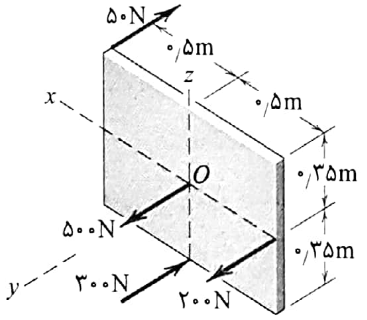
راهنمایی‌های مفید

❶ با توجه به اینکه مجموع نیروها برابر با صفر است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که برایند، در صورت وجود، یک کوپل است.

❷ گشتاور حاصل از زوج‌نیروها را می‌توانید به‌وسیلهٔ رابطهٔ $M=Fd$ به‌دست آورید و جهت آن را با بررسی معین نمایید. در بسیاری از مسائل سه‌بعدی، این روش آسان‌تر از استفاده از $\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ می‌باشد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۷.۲

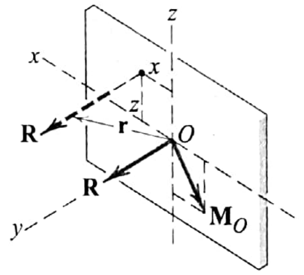
برایند سیستم نیروهای موازی وارد بر صفحه را معین کنید. برای حل از روش برداری استفاده نمایید.



حل: انتقال تمام نیروها به نقطهٔ O منجر به تشکیل یک سیستم کوپل ـ نیرو می‌شود.

$$\mathbf{R}=\Sigma\mathbf{F}=(۲۰۰+۵۰۰-۳۰۰-۵۰)\mathbf{j}=۳۵۰\mathbf{j}\,\text{N}$$

$$\mathbf{M}_O=[۵۰(۰٫۳۵)-۳۰۰(۰٫۳۵)]\mathbf{i}+[-۵۰(۰٫۵۰)-۲۰۰(۰٫۵۰)]\mathbf{k}$$
$$=-۸۷٫۵\mathbf{i}-۱۲۵\mathbf{k}\,\text{N}\cdot\text{m}$$



پیدا کردن موقعیت $\mathbf{R}$ به‌نحوی که به‌درستی نشان‌دهندهٔ سیستم کوپل ـ نیروی بالا باشد با استفاده از اصول گشتاور در حالت برداری انجام می‌شود

$$\mathbf{r}\times\mathbf{R}=\mathbf{M}_O$$
$$(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\times ۳۵۰\mathbf{j}=-۸۷٫۵\mathbf{i}-۱۲۵\mathbf{k}$$
$$۳۵۰x\mathbf{k}-۳۵۰z\mathbf{i}=-۸۷٫۵\mathbf{i}-۱۲۵\mathbf{k}$$

از تساوی بردارها می‌توانیم دو معادلهٔ زیر را به‌دست آوریم

$$۳۵۰x=-۱۲۵ \quad \text{و} \quad -۳۵۰z=-۸۷٫۵$$

بنابراین $x=-۰٫۳۵۷\text{m}$ و $z=۰٫۲۵۰\text{m}$ مختصاتی هستند که خط اثر $\mathbf{R}$ باید از آنها عبور کند.

❶ مقدار y با توجه به اصل انتقال‌پذیری، می‌تواند هر مقداری باشد. بنابراین، همان‌طور که انتظار می‌رفت، متغیر y از تحلیل برداری بالا حذف شده است.

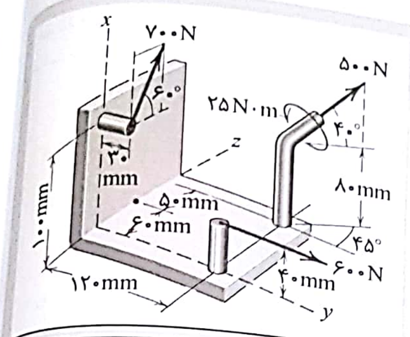
راهنمایی مفید

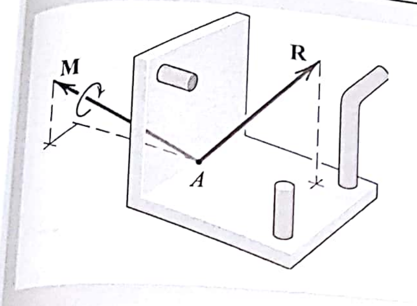
❶ بهتر است این مسئله را از راه عددی نیز حل کنید.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۸.۲

دو نیرو و رنج منفی نشان‌داده‌شده در شکل را با یک نیروی **R** وارد بر نقطهٔ A و کوپل متناظر **M** جایگزین کنید.





حل: نیروی برایند دارای سه مؤلفه است

$[R_x = \Sigma F_x]$ $$R_x = ۵۰۰ \sin ۴۰^\circ + ۷۰۰ \sin ۶۰^\circ = ۹۲۸\,\text{N}$$

$[R_y = \Sigma F_y]$ $$R_y = ۶۰۰ + ۵۰۰ \cos ۴۰^\circ \cos ۴۵^\circ = ۸۷۱\,\text{N}$$

$[R_z = \Sigma F_z]$ $$R_z = ۷۰۰ \cos ۶۰^\circ + ۵۰۰ \cos ۴۰^\circ \sin ۴۵^\circ = ۶۲۱\,\text{N}$$

$$\mathbf{R} = ۹۲۸\mathbf{i} + ۸۷۱\mathbf{j} + ۶۲۱\mathbf{k}\ \text{N}$$

بنابراین

و

$$R = \sqrt{(۹۲۸)^۲ + (۸۷۱)^۲ + (۶۲۱)^۲} = ۱۴۱۶\,\text{N}$$

ج.

کوپلی که باید در نتیجهٔ جابه‌جا کردن نیروی ۵۰۰ نیوتنی اضافه شود عبارت است از

$[\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}]$ $$\mathbf{M}_{۵۰۰} = (۰/۰۸\mathbf{i} + ۰/۱۲\mathbf{j} + ۰/۰۵\mathbf{k}) \times ۵۰۰(\mathbf{i} \sin ۴۰^\circ + \mathbf{j} \cos ۴۰^\circ \cos ۴۵^\circ + \mathbf{k} \cos ۴۰^\circ \sin ۴۵^\circ)$$ ➊

که **r** برداری از A به B است.

بازکردن جمله به جمله، یا دترمینان، نتیجه می‌دهد که

$$\mathbf{M}_{۵۰۰} = ۱۸/۹۵\mathbf{i} - ۵/۵۹\mathbf{j} - ۱۶/۹۰\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

➋ گشتاور ۶۰۰ نیوتنی حول نقطهٔ A با استفاده از مؤلفه‌های x و z آن حاصل می‌شود که

$$\mathbf{M}_{۶۰۰} = (۶۰۰)(۰/۰۶۰)\mathbf{i} + (۶۰۰)(۰/۰۴۰)\mathbf{k} = ۳۶/۰\mathbf{i} + ۲۴/۰\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

گشتاور نیروی ۷۰۰ نیوتنی حول نقطهٔ A به‌راحتی از گشتاور مؤلفه‌های x و z نیرو به‌دست می‌آید. در نتیجه

$$\mathbf{M}_{۷۰۰} = (۷۰۰ \cos ۶۰^\circ)(۰/۰۳۰)\mathbf{i} - [(۷۰۰ \sin ۶۰^\circ)(۰/۰۶۰) + (۷۰۰ \cos ۶۰^\circ)(۰/۱۰۰)]\mathbf{j} - (۷۰۰ \sin ۶۰^\circ)(۰/۰۳۰)\mathbf{k}$$
$$= ۱۰/۵\mathbf{i} - ۷۱/۴\mathbf{j} - ۱۸/۱۹\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

➌ همچنین کوپل متناظر با رنج داده شده را می‌توان چنین نوشت

$$\mathbf{M}' = ۲۵/۰(-\mathbf{i} \sin ۴۰^\circ - \mathbf{j} \cos ۴۰^\circ \cos ۴۵^\circ - \mathbf{k} \cos ۴۰^\circ \sin ۴۵^\circ)$$
$$= -۱۶/۰۷\mathbf{i} - ۱۳/۵۴\mathbf{j} - ۱۳/۵۴\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

بنابراین کوپل برایند (معادل) با جمع کردن بردارهای **i**، **j** و **k** برای **M** چنین است ➍

$$\mathbf{M} = ۴۹/۴\mathbf{i} - ۹۰/۵\mathbf{j} - ۲۴/۶\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

و

ج.

$$M = \sqrt{(۴۹/۴)^۲ + (۹۰/۵)^۲ + (۲۴/۶)^۲} = ۱۰۶/۰\,\text{N}\cdot\text{m}$$

راهنمایی‌های مفید

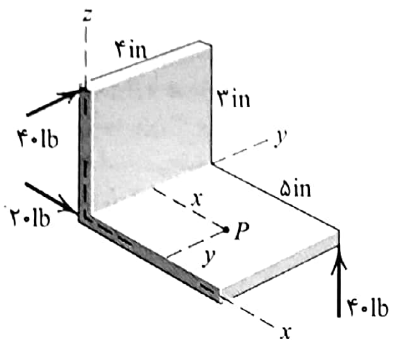
➊ در اینجا پیشنهاد می‌شود که صحت نتیجهٔ ضرب برداری را با بررسی گشتاورهای مؤلفه‌های نیروی ۵۰۰N حول نقطهٔ A، مستقیماً از روی شکل مقایسه کنید.

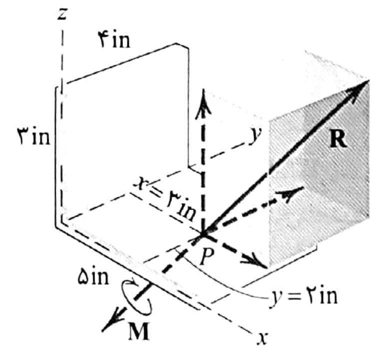
➋ برای نیروهای ۶۰۰N و ۷۰۰N ساده‌تر است که مؤلفه‌های گشتاور را حول جهت‌های مختصات گذرنده از نقطهٔ A از روی شکل، به‌دست آورید.

➌ بردار کوپل ۲۵N·m نشان می‌دهد که رنج در جهت مخالف با نیروی ۵۰۰N است و باید آن را بر روی محورهای x، y و z به مؤلفه‌هایش تجزیه کنیم تا بتوان با دیگر مؤلفه‌های کوپل جمع کرد.

➍ اگرچه بردار کوپل برایند **M** در شکل ترسیمی برایندهای گذرنده از نقطهٔ A نشان داده شده است، اما می‌دانیم که بردار کوپل یک بردار آزاد است و بنابراین دارای هیچ‌گونه خط اثری نیست.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۹.۲
برایند رنچ سه نیروی وارد شده بر دیوارکوب را تعیین کنید. مختصات نقطهٔ P را در صفحهٔ y-x، که همان نقطه‌ای است که نیروی برایند رنچ از آن می‌گذرد، به‌دست آورید. همچنین اندازهٔ کوپل $\mathbf{M}$ رنچ را محاسبه کنید.





۱ *حل:* کسینوس‌های هادی کوپل $\mathbf{M}$ متعلق به رنچ باید با کسینوس‌های هادی نیروی برایند $\mathbf{R}$ یکی باشد، با این فرض که رنچ دارای مقداری مثبت باشد. نیروی برایند برابر است با

$$\mathbf{R} = ۲۰\mathbf{i} + ۴۰\mathbf{j} + ۴۰\mathbf{k}\,\text{lb}$$
$$R = \sqrt{(۲۰)^۲ + (۴۰)^۲ + (۴۰)^۲} = ۶۰\,\text{lb}$$

و کسینوس‌های هادی آن

$$\cos\theta_x = ۲۰/۶۰ = ۱/۳$$
$$\cos\theta_y = ۴۰/۶۰ = ۲/۳$$
$$\cos\theta_z = ۴۰/۶۰ = ۲/۳$$

گشتاور کوپل رنچ باید با جمع گشتاورهای نیروهای داده شده حول نقطهٔ P (که $\mathbf{R}$ از آن می‌گذرد) برابر باشد. گشتاورهای سه نیرو حول نقطهٔ P برابرند با

$$(\mathbf{M})_{R_x} = ۲۰y\mathbf{k}\,\text{lb}\cdot\text{in}$$
$$(\mathbf{M})_{R_y} = -۴۰(۳)\mathbf{i} - ۴۰x\mathbf{k}\,\text{lb}\cdot\text{in}$$
$$(\mathbf{M})_{R_z} = ۴۰(۴-y)\mathbf{i} - ۴۰(۵-x)\mathbf{j}\,\text{lb}\cdot\text{in}$$

و گشتاور مجموع برابر است با

$$\mathbf{M} = (۴۰ - ۴۰y)\mathbf{i} + (-۲۰۰ + ۴۰x)\mathbf{j} + (-۴۰x + ۲۰y)\mathbf{k}\,\text{lb}\cdot\text{in}$$

و کسینوس‌های هادی $\mathbf{M}$ برابرند با

$$\cos\theta_x = (۴۰ - ۴۰y)/M$$
$$\cos\theta_y = (-۲۰۰ + ۴۰x)/M$$
$$\cos\theta_z = (-۴۰x + ۲۰y)/M$$

که M اندازهٔ $\mathbf{M}$ است. با مساوی قرار دادن کسینوس‌های هادی $\mathbf{R}$ و $\mathbf{M}$ داریم

$$۴۰ - ۴۰y = \frac{M}{۳}$$
$$-۲۰۰ + ۴۰x = \frac{۲M}{۳}$$
$$-۴۰x + ۲۰y = \frac{۲M}{۳}$$

با حل سه معادله خواهیم داشت

ج. $M = -۱۲۰\,\text{lb}\cdot\text{in}$ $\qquad x = ۳\,\text{in}$ $\qquad y = ۲\,\text{in}$

می‌توانیم ببینیم که برای M مقداری منفی به‌دست آمد، که مفهوم آن این است که بردار کوپل در جهتی مخالف با $\mathbf{R}$ بوده و درنتیجه رنچ منفی خواهد بود.

راهنمایی مفید

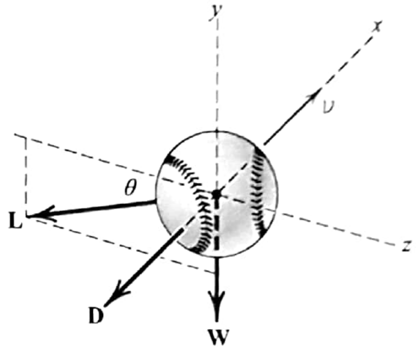
۱ در ابتدا فرض می‌کنیم که رنچ مثبت باشد. اگر $\mathbf{M}$ منفی به‌دست آمد، آن‌وقت متوجه می‌شویم که جهت بردار کوپل در خلاف جهت بردار برایند نیروهاست.

Scanned by CamScanner

مسائل

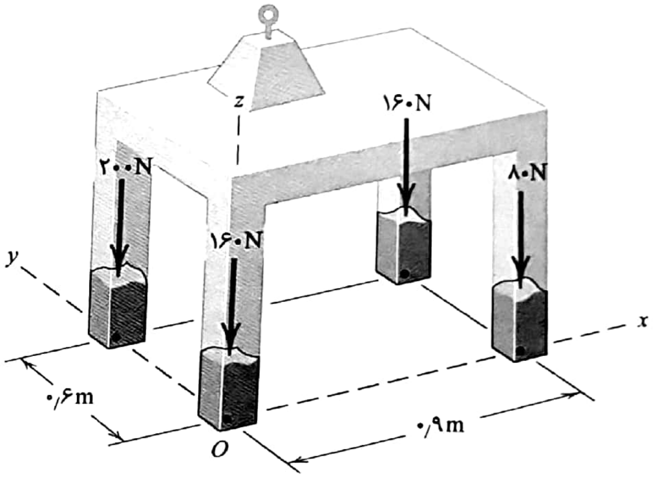
مسائل مقدماتی

۱۴۹.۲ یک توپ بیس‌بال با چرخشی پرتاب می‌شود که سه نیروی متقاطع مانند شکل به آن وارد می‌شود. وزن W برابر ۵oz، نیروی D برابر ۱٫۷oz و نیروی L بر سرعت توپ v عمود است. می‌دانیم که مؤلفهٔ y برایند معادل ۵٫۵oz− و مؤلفهٔ z آن ۰٫۱۶۶oz− است. L، θ و R را معین کنید.



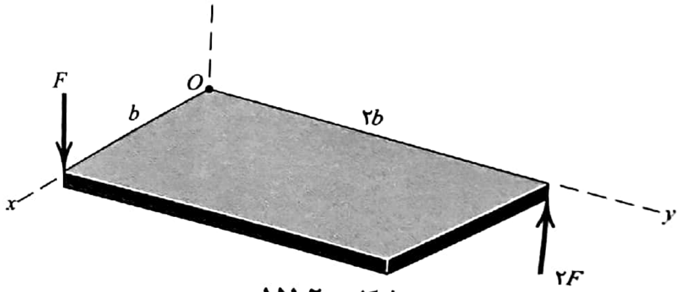
شکل م ۱۴۹.۲

۱۵۰.۲ یک میز مطابق شکل چهار نیروی نشان‌داده‌شده را بر سطح زمین وارد می‌کند. سیستم نیروها را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O جایگزین کنید. همچنین نشان دهید که $\mathbf{R}$ بر $\mathbf{M}_O$ عمود است.



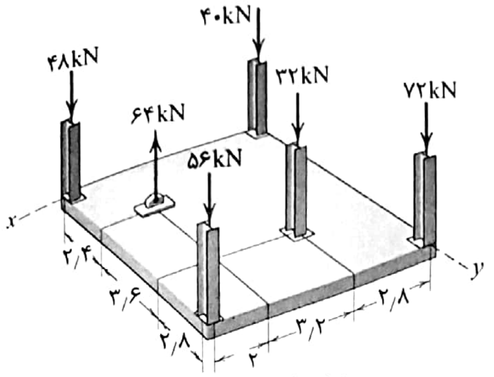
شکل م ۱۵۰.۲

۱۵۱.۲ دو نیروی نشان‌داده‌شده بر یک صفحهٔ مستطیلی‌شکل وارد می‌شوند. این سیستم نیرو را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O جایگزین کنید. سپس برایند سیستم را در صورت امکان با یک تک‌نیرو، همراه با راستای آن معین کنید.



شکل م ۱۵۱.۲

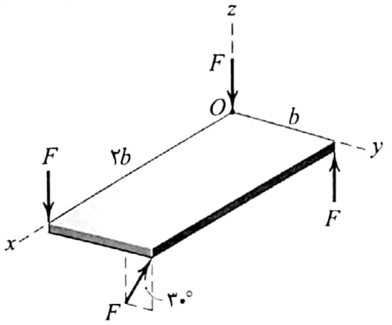
۱۵۲.۲ ورق بتنی نشان‌داده‌شده شش نیروی عمودی را مطابق شکل تحمل می‌کند. مؤلفه‌های x و y، نقطه‌ای بر روی ورق را که برایند سیستم نیروها از آن می‌گذرد، معین کنید.



اندازه‌ها برحسب متر است

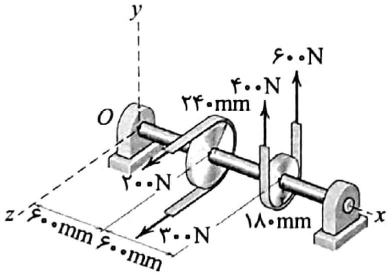
شکل م ۱۵۲.۲

۱۵۳.۲ صفحهٔ نازک مستطیلی تحت تأثیر چهار نیروی نشان‌داده‌شده در شکل قـ... می‌گیرد. سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O را تعیین کنید. آیا $\mathbf{R}$ بر $\mathbf{M}_O$ عمود اسـ...



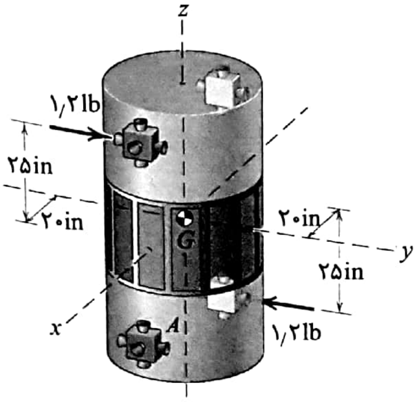
شکل م ۱۵۳.۲

۱۵۴.۲ به قرقره‌های سازوکار زیر نیروهای نشان‌داده‌شده وارد می‌شوند. سیسـ... کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O را تعیین کنید.



شکل م ۱۵۴.۲

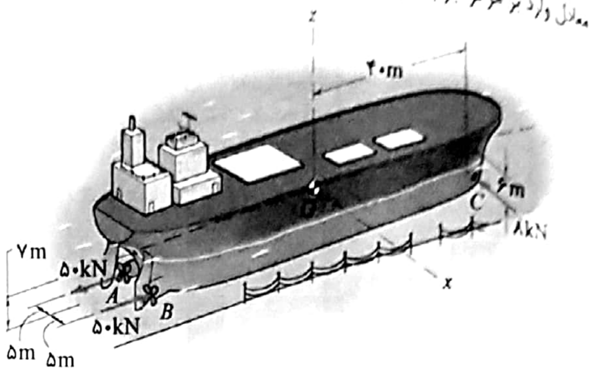
۱۵۵.۲ ماهوارهٔ مسئلهٔ ۱۳۵.۲ را در نظر بگیرید. قرار است که برای چرخاندن ماهوا... حول محور z آن، چهار پیش‌برندهٔ ۱٫۲lb نشان‌داده‌شده هم‌زمان شروع به کار کنند ول... پیش‌برندهٔ A خراب می‌شود. سیستم کوپل-نیروی معادل را در نقطهٔ G برای سـ... پیش‌برندهٔ باقی‌مانده به‌دست آورید.



شکل م ۱۵۵.۲

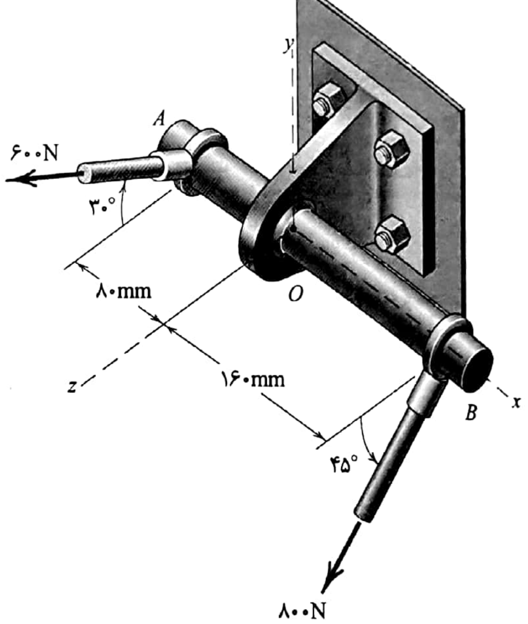
Scanned by CamScanner

۱۵۶.۲ یک نفت‌کش با رانش معکوس پروانهٔ A و رانش رو به جلوی پروانهٔ B و فشار جانبی وارد بر دماغهٔ C از وضعیت پهلو گرفتهٔ خود دور می‌شود. سیستم کوپل ـ نیروی معادل وارد بر مرکز جرم G را تعیین کنید.



شکل م ۱۵۶.۲

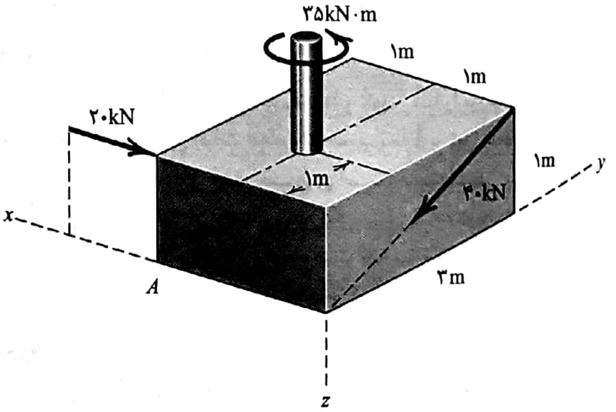
۱۵۷.۲ در شکل زیر دو نیروی وارد شده بر محور AOB را با یک سیستم کوپل ـ نیرو در نقطهٔ O جایگزین کنید. آیا $\mathbf{R}$ عمود بر $\mathbf{M}_O$ است؟



شکل م ۱۵۷.۲

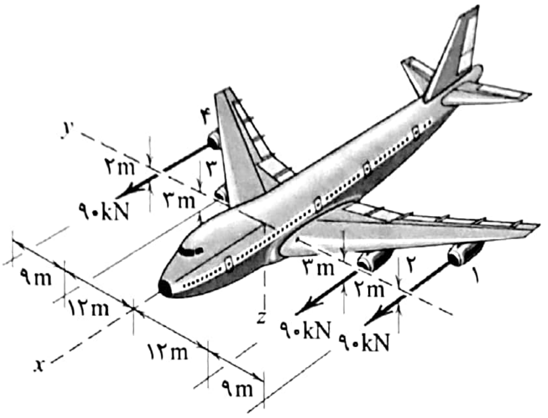
مسائل برگزیده

۱۵۸.۲ کوپل و دو نیروی نشان‌داده‌شده را با یک سیستم کوپل ـ نیروی معادل در نقطهٔ A جایگزین کنید.



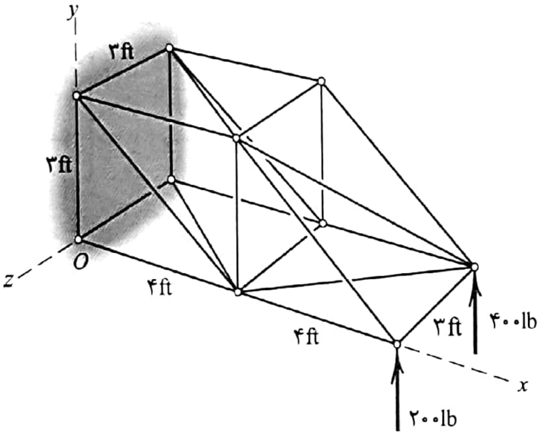
شکل م ۱۵۸.۲

۱۵۹.۲ هواپیمای مسافربری مسئلهٔ ۹۰.۲ را در نظر بگیرید. اگر موتور شمارهٔ ۳ ناگهان از کار بیفتد، برایند حاصل از نیروهای سه موتور باقی‌مانده را، که مقدار هریک ۹۰kN است، تعیین کنید. مختصات y و z را از نقطه‌ای که خط اثر نیروی برایند از آن می‌گذرد، تعیین کنید. این اطلاعات برای طراحی در زمینهٔ کارایی در وضعیت خرابی موتور، ضروری است.



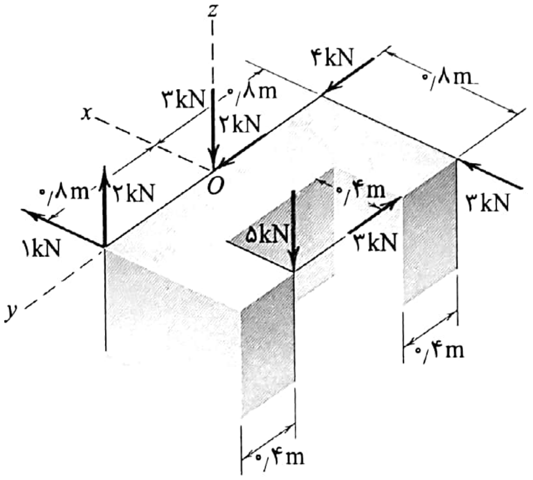
شکل م ۱۵۹.۲

۱۶۰.۲ دو نیروی بالاسوی نشان‌داده‌شده بر یک خرپای سه‌بعدی وارد می‌آیند. این دو نیرو را به یک سیستم کوپل ـ نیرو در نقطهٔ O کاهش دهید. همچنین نشان دهید که $\mathbf{R}$ بر $\mathbf{M}_O$ عمود است. سپس نقطه‌ای در صفحهٔ x-z را تعیین کنید که خط اثر بردار برایند از آن می‌گذرد.



شکل م ۱۶۰.۲

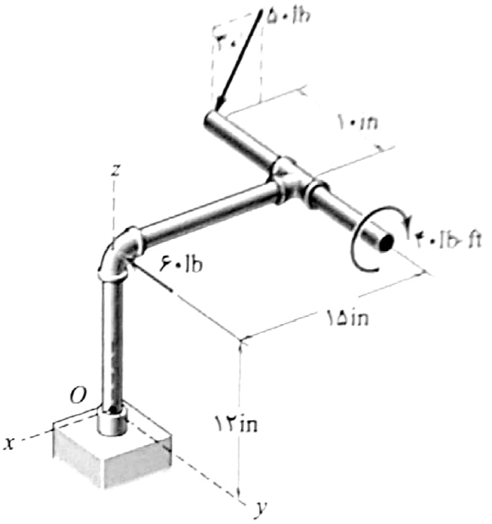
۱۶۱.۲ سطح افقی بالای یک ستون بتنی تحت تأثیر نیروهای نشان‌داده‌شده قرار می‌گیرد. برایند تمام نیروها را با یک نیروی $\mathbf{R}$ در نقطهٔ O و یک کوپل $\mathbf{M}$ نمایش دهید. همچنین اندازهٔ $\mathbf{R}$ و $\mathbf{M}$ را تعیین کنید.



شکل م ۱۶۱.۲

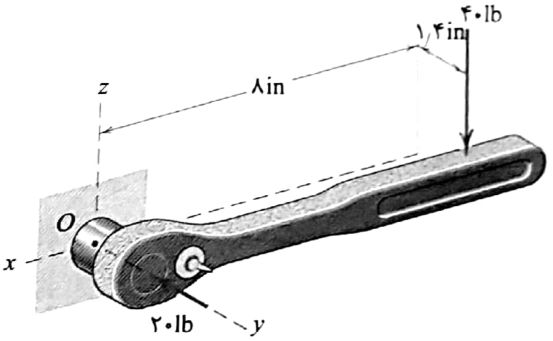
Scanned by CamScanner

۱۶۲.۲ دو نیرو و کوپل وارد شده بر لوله‌بندی را با یک تک‌نیروی برایند **R** وارده بر نقطهٔ O و یک کوپل $\mathbf{M}_O$ جایگزین کنید.



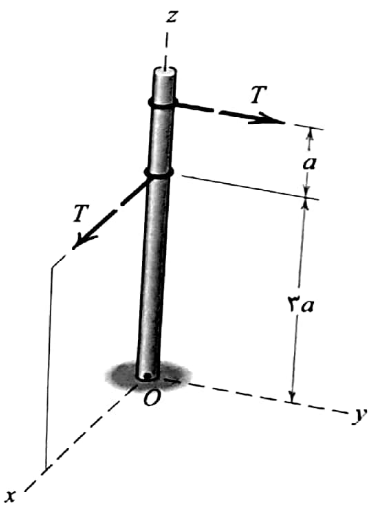
شکل م ۱۶۲.۲

۱۶۳.۲ در سفت کردن یک پیچ به مرکز O، شخصی نیرویی معادل ۴۰lb را با دست خود به دستهٔ آچار وارد می‌کند. علاوه بر آن با دست چپ خود یک نیروی ۲۰lb را همانند شکل برای نگه‌داشتن آچار بر روی پیچ وارد می‌کند. سیستم کوپل ـ نیروی معادل را در O تعیین کنید. سپس نقطه‌ای در سطح x-y را که خط اثر نیروی برایند رنج از آن می‌گذرد، پیدا کنید.



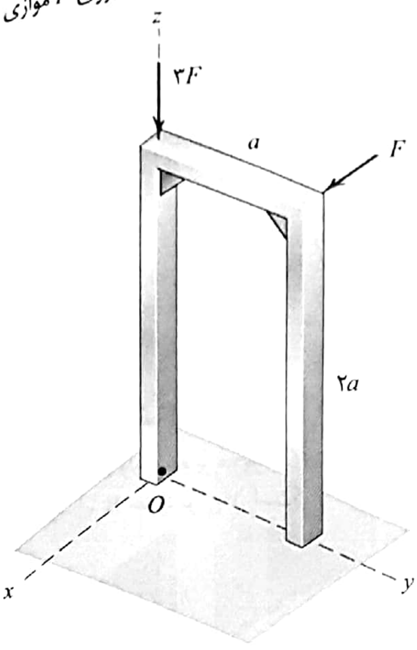
شکل م ۱۶۳.۲

۱۶۴.۲ دو نیروی وارد بر دیرک را توسط یک رنج جایگزین کنید. گشتاور **M** مربوط به رنج را به‌صورت یک بردار نوشته و مختصات نقطهٔ P در سطح y-z را، که خط اثر نیروی رنج از آن می‌گذرد، تعیین کنید.



شکل م ۱۶۴.۲

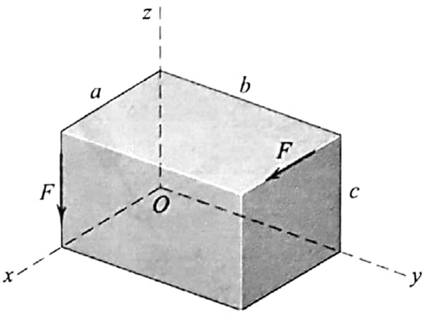
۱۶۵.۲ دو نیروی وارد بر قاب را با یک رنج جایگزین کنید. گشتاور **M** مربوط به رنج را به‌صورت یک بردار نوشته و مختصات نقطهٔ P در صفحهٔ y-z را، که خط اثر نیروی رنج از آن می‌گذرد، تعیین کنید. توجه کنید که نیروی F موازی محور x است.



شکل م ۱۶۵.۲

۱۶۶.۲ برای سیستم دونیرویی مسئلهٔ ۱۵۷.۲، مختصات نقطه‌ای در سطح x-z که خط اثر نیروی برایند از آن می‌گذرد، پیدا کنید.

◂ **۱۶۷.۲** دو نیروی وارد بر جسم مکعب‌مستطیلی‌شکل را با یک رنج جایگزین کنید. گشتاور **M** مربوط به رنج را به‌صورت یک بردار نوشته و مختصات نقطهٔ P در سطح x-y را، که خط اثر نیروی رنج از آن می‌گذرد، تعیین کنید.



شکل م ۱۶۷.۲

◂ **۱۶۸.۲** سیستم دو نیرو و کوپل نشان‌داده‌شده در مسئلهٔ ۱۵۸.۲ را توسط یک رنج جایگزین کنید. اندازهٔ گشتاور **M** متعلق به رنج و اندازهٔ نیروی **R** متعلق به رنج، همچنین مختصات نقطهٔ P، تقاطع سطح x-y، و خط اثر **R** را تعیین نمایید.

۱۰.۲ مروری بر فصل

در فصل ۲، ویژگی‌های نیروها، گشتاورها و کوپل‌ها را بررسی کردیم و راه درست برای نشان دادن اثرات آنها را آموختیم. تسلط بر این موضوعات، برای آموختن مطالب فصل‌های آینده ضروری است. علت اصلی بروز اشتباه در تحلیل برایندها استفادهٔ نادرست از روش‌های بیان شده در این فصل است. هنگام برخورد با مسائل دشوارتر، خوب است که با مراجعه به این فصل از درست نشان داده شدن نیروها، گشتاورها و کوپل‌ها اطمینان حاصل نمایید.

نیروها

بسیار پیش می‌آید که لازم است، نیروها را به‌صورت یک بردار نشان دهید تا بتوانیم آنها را در راستاهای موردنظرمان تجزیه کرده و یا دو یا چند نیرو

به یک نیروی برایند معادل تبدیل کنیم. در واقع شما باید قادر باشید:

۱. یک نیروی داده شده را به مؤلفه‌های آن در راستاهای داده شده تجزیه کرده و بردارهای حاصل را برحسب بردارهای یکه در راستای محورهای داده شده به‌دست آورید.

۲. با دانستن اندازه و خط اثر یک نیرو، بتوانید آن را به‌صورت یک بردار نشان دهید. دقت کنید که خط اثر ممکن است به‌صورت دو نقطهٔ واقع بر آن و یا زاویهٔ بین دو بردار داده شده باشد.

۳. با استفاده از ضرب داخلی، تصویر یک بردار را در راستای یک خط معین، به‌دست آورید و زاویهٔ بین دو بردار را تعیین کنید.

۴. برایند دو یا چند نیروی همرس در یک نقطه را به‌دست آورید.

گشتاورها

تمایل یک نیرو برای چرخاندن یک جسم حول یک محور را به‌عنوان گشتاور (یا لنگر) می‌شناسند، که کمیتی برداری است. همان‌طورکه در این فصل مشاهده کردید، به‌دست آوردن گشتاور یک نیرو عموماً با ترکیب گشتاورهای مؤلفه‌های آن نیرو به‌دست می‌آید. هنگام کار با گشتاورها، باید بتوانید:

۱. گشتاور را با استفاده از قانون بازویی گشتاور معین کنید.

۲. با استفاده از ضرب خارجی، گشتاور یک بردار را برحسب یک بردار نیرو و یک بردار مکان نشان‌دهندهٔ *خط اثر نیرو* به‌دست آورید.

۳. از قضیهٔ وارینون برای ساده‌سازی در محاسبهٔ گشتاورها، چه در شکل برداری و چه در شکل عددی، استفاده کنید.

۴. از ضرب سه‌گانهٔ عددی استفاده کرده و گشتاور یک بردار نیرو حول یک محور گذرنده از یک نقطهٔ داده شده را به‌دست آورید.

کوپل‌ها

یک کوپل ترکیب گشتاور دو نیروی مساوی، خلاف جهت، و نامنطبق است. اثر مخصوص کوپل، به‌وجود آوردن یک چرخش خالص صرف‌نظر از محل قرارگرفتن نیروهاست. کوپل در جایگزین کردن نیروی وارد بر یک نقطه با یک سیستم کوپل ـ نیرو در یک نقطهٔ دیگر مفید است. برای حل مسائل مربوط به کوپل شما باید بتوانید:

۱. گشتاور یک کوپل را، با داشتن نیروهای آن و فاصلهٔ آنها یا یک بردار مکان نشان‌دهندهٔ خط اثر آنها، محاسبه کنید.

۲. یک نیروی مفروض را با یک سیستم کوپل ـ نیروی معادل و یا برعکس جایگزین کنید.

برایندها

ما قادریم یک سیستم دلخواه از نیروها و کوپل‌ها را به یک تک‌نیروی برایند وارد بر یک نقطهٔ دلخواه و یک کوپل معادل، ساده کنیم. همچنین می‌توانیم این نیرو و کوپل معادل را به یک رنچ متشکل از یک نیروی برایند در راستای یک خط اثر یکتا تبدیل کرد. برای حل مسائل مربوط به برایندها شما باید بتوانید:

۱. اندازه، جهت و خط اثر را برای یک بردار برایند سیستم نیروهای هم‌صفحه به‌دست آورده و همچنین بتوانید گشتاور کوپل‌های حاصل را تعیین کنید.

۲. از اصول گشتاورها برای ساده‌سازی محاسبات گشتاورهای یک سیستم از نیروهای هم‌صفحه حول یک نقطهٔ داده شده، استفاده کنید.

۳. یک سیستم کلی از نیروها را با یک رنچ در راستای یک خط اثر مشخص جایگزین کنید.

تعادل

در فصل‌های آینده از مفاهیم و روش‌های زیر در آموختن تعادل استفاده خواهید کرد. تعادل به‌طور خلاصه به شرح زیر است:

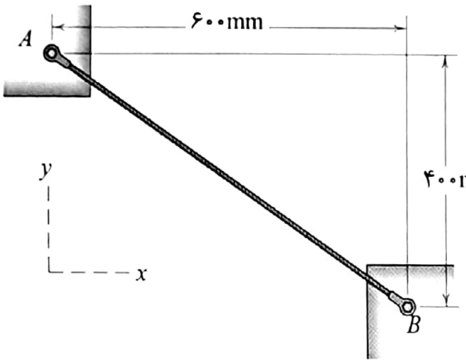
۱. هنگامی‌که برایند نیرو بر جسمی صفر باشد ($\Sigma \mathbf{F}=0$)، جسم در تعادل *انتقالی* است. بدین مفهوم که مرکز جرم آن یا در سکون قرار دارد و یا در راستای یک خط صاف با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

۲. علاوه بر آن اگر کوپل معادل صفر باشد ($\Sigma \mathbf{M}=0$)، جسم در تعادل چرخشی است، یعنی آنکه یا حرکت چرخشی ندارد و یا اینکه با سرعت زاویه‌ای ثابت در حال چرخش است.

۳. هنگامی‌که هر دو برایند صفر باشد، جسم در تعادل *کامل* خواهد بود.

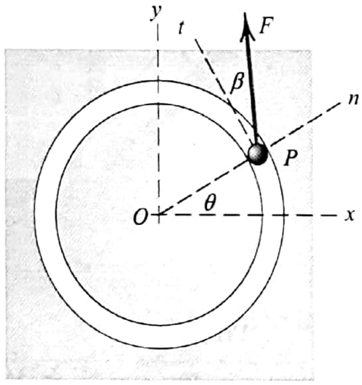
مسائل دوره‌ای

۱۶۹.۲ یک کابل در میان دو تکیه‌گاه ثابت A و B وصل شده است و کشش T معادل ۲kN در آن وجود دارد. این کشش را به‌صورت یک بردار برحسب بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$؛ یک‌بار به‌صورت $\mathbf{T}_A$ کشش وارد بر A و بار دیگر به‌صورت $\mathbf{T}_B$ کشش وارد بر B نشان دهید.



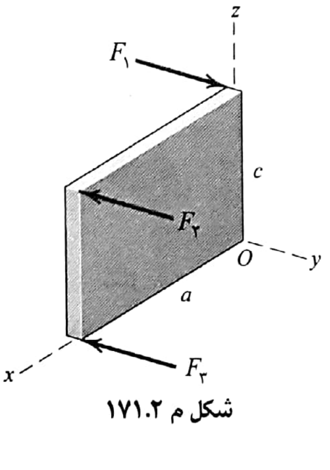
شکل م ۱۶۹.۲

۱۷۰.۲ می‌دانیم که مؤلفهٔ y نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر پین P برای $\theta=30°$ و $\beta=15°$ معادل ۲۰lb است. اندازهٔ نیروی F و مؤلفهٔ $\mathbf{F}$ در راستای x را تعیین کنید.



شکل م ۱۷۰.۲

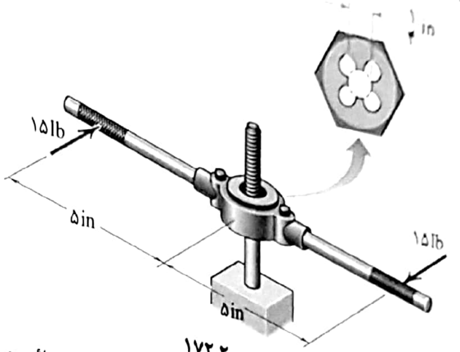
۱۷۱.۲ سه نیروی نشان‌داده‌شده عمود بر صفحهٔ مستطیلی وارد می‌شوند. گشتاورهای $\mathbf{M}_1$، $\mathbf{M}_2$ و $\mathbf{M}_3$ حاصل از نیروهای $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_3$ را حول نقطهٔ O تعیین کنید.



شکل م ۱۷۱.۲

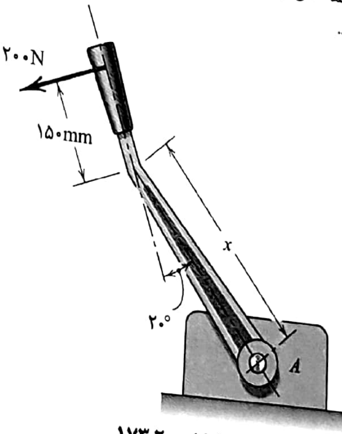
Scanned by CamScanner

۱۷۲.۲ از حدیدهٔ زیر برای دنده‌کردن یک میله استفاده می‌شود. اگر نیروهای ۱۵lb همانند شکل وارد شوند، اندازهٔ نیروی F معادل وارد شده بر میلهٔ ۱/۲ اینچی را بر روی هر سطح تراش طوری تعیین کنید که اثر خارجی آنها بر میله معادل با دو نیروی ۱۵ پوندی باشد.



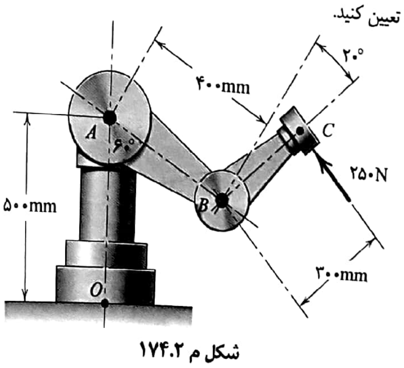
شکل م ۱۷۲.۲

۱۷۳.۲ اهرم کنترل تحت تأثیر یک کوپل ۸۰N·m ساعتگرد که به‌وسیلهٔ محور واقع در نقطهٔ A وارد می‌شود، قرار می‌گیرد و طوری طراحی شده تا بتواند یک نیروی کشش ۲۰۰ نیوتنی مانند شکل را تحمل کند. اگر برایند کوپل و نیرو از نقطهٔ A بگذرد، اندازهٔ x را تعیین کنید.



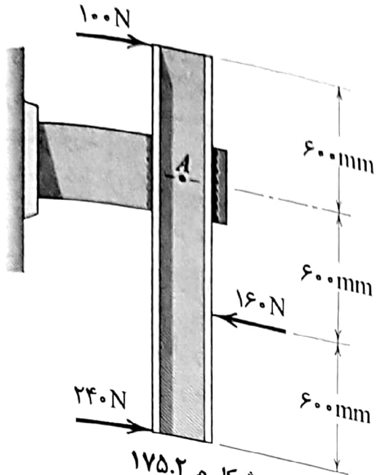
شکل م ۱۷۳.۲

۱۷۴.۲ گشتاور M_O حاصل از نیروی ۲۵۰ نیوتنی را حول نقطهٔ مرکزی O بر روی روبات زیر تعیین کنید.



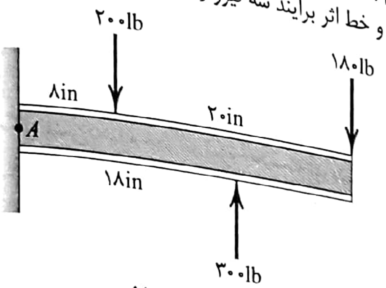
شکل م ۱۷۴.۲

۱۷۵.۲ سه نیروی نشان‌داده‌شده را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ A جایگزین کنید. اگر نیروها با یک تک‌نیروی معادل جایگزین شوند، اندازهٔ d، فاصلهٔ خط اثر آن از نقطهٔ A را معین کنید.



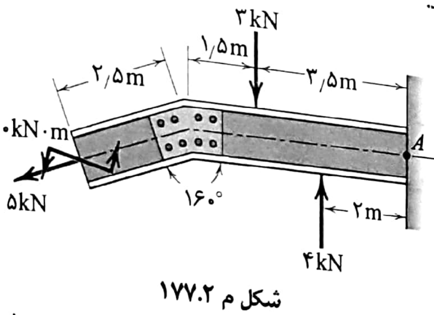
شکل م ۱۷۵.۲

۱۷۶.۲ سیستم بارگذاری زیر را به سیستم کوپل-نیرو در نقطهٔ A کاهش دهید. بـ
x فاصلهٔ بین A و خط اثر برایند سه نیرو را به‌دست آورید.



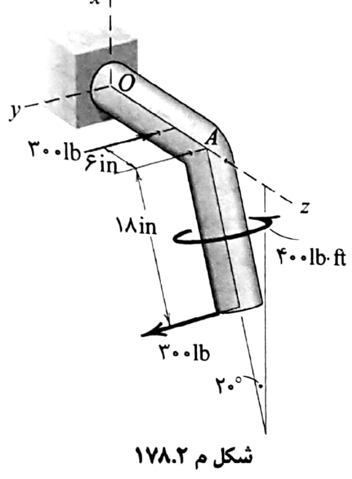
شکل م ۱۷۶.۲

۱۷۷.۲ کوپل و سه نیروی نشان‌داده‌شده را با یک سیستم کوپل-نیرو در نقط
جایگزین کنید.



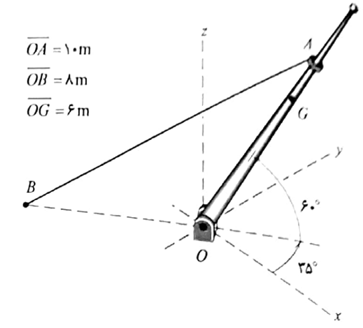
شکل م ۱۷۷.۲

۱۷۸.۲ دو نیرو و کوپل نشان‌داده‌شده بر یک محور خم‌شدهٔ صفحهٔ x-z
می‌شوند. برایند آنها را به‌دست آورید.



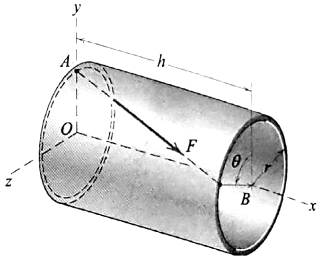
شکل م ۱۷۸.۲

۱۷۹.۲ هنگامی که دیرک OA در وضعیت نشان‌داده‌شده قرار دارد، کشش در کابل AB معادل ۲kN می‌باشد. (الف) نیروی کشش وارد شده بر اتصال واقع در نقطهٔ A را به‌صورت یک بردار در مختصات داده شده، به‌دست آورید. (ب) گشتاور این نیرو حول نقطهٔ O را به‌دست آورده و گشتاورها را حول محورهای x، y و z تعیین کنید. (ج) تصویر این نیروی کششی را در راستای خط AO تعیین کنید.



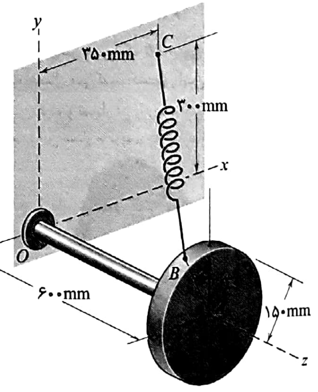
شکل م ۱۷۹.۲

۱۸۰.۲ نیروی **F** در راستای خط AB در استوانهٔ توخالی نشان‌داده‌شده وارد می‌شود. مقادیر r، h، θ و F معلوم می‌باشند. با استفاده از مختصات نشان‌داده‌شدهٔ x، y و z، **F** را به‌شکل یک بردار بیان کنید.



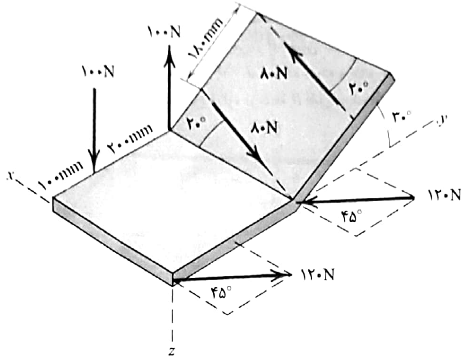
شکل م ۱۸۰.۲

۱۸۱.۲ فنری که نقطهٔ B از دیسک را به نقطهٔ C از سطح عمودی متصل می‌کند، تحت کشش ۵۰۰N قرار دارد. این کشش را به‌صورت نیرویی که بر نقطهٔ B وارد شده، برحسب بردارهای یکهٔ **i**، **j** و **k** بنویسید و همچنین M_z گشتاور این نیرو حول محور OA را به‌دست آورید.



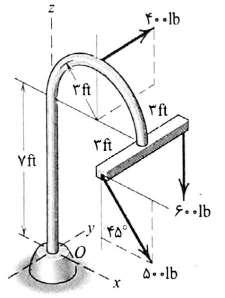
شکل م ۱۸۱.۲

۱۸۲.۲ سه کوپل به‌وسیلهٔ سه جفت نیروی مساوی و خلاف جهت تشکیل شده‌اند. **M** برایند حاصل از این سه کوپل را به‌دست آورید.



شکل م ۱۸۲.۲

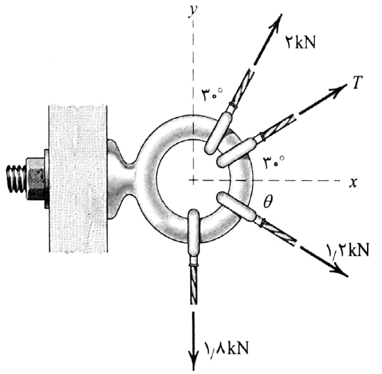
۱۸۳.۲ تأثیر سه نیرو در نقطهٔ O را می‌توان با به‌دست آوردن برایند آنها در O پیدا کرد. اندازه‌های **R** و کوپل همراه با آن یعنی **M** را تعیین کنید.



شکل م ۱۸۳.۲

مسائل کامپیوتری

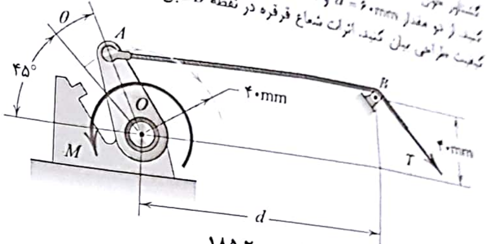
۱۸۴.۲• یک پیچ گوشواره‌ای چهار نیروی نشان‌داده‌شده را تحمل می‌کند. اگر برایند نیروهای وارد بر پیچ معادل یک کشش مستقیم ۳ کیلونیوتنی در راستای x باشد، مقادیر θ و T را تعیین کنید.



شکل م ۱۸۴.۲

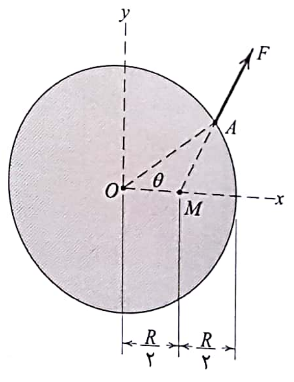
Scanned by CamScanner

۱۸۵.۲* اهرم کنترل OA در بازهٔ $0 \le \theta \le 90°$ می‌چرخد. یک فنر کششی داخلی گشتاور بازگرداننده‌ای حول O با رابطهٔ $M = K(\theta + \pi/4)$ وارد می‌کند که $K = 600 N \cdot mm/rad$ و θ به رادیان است. کشش T لازم برای آنکه برایند گشتاور حول O صفر باشد را به‌صورت تابعی از θ معین کرده و نمودار آن را رسم کنید. از دو مقدار $d = 60mm$ و $d = 160mm$ استفاده نموده و نظر خود را در مورد کمیت طراحی بیان کنید. اثرات شعاع قرقره در نقطهٔ B قابل صرف‌نظر می‌باشد.



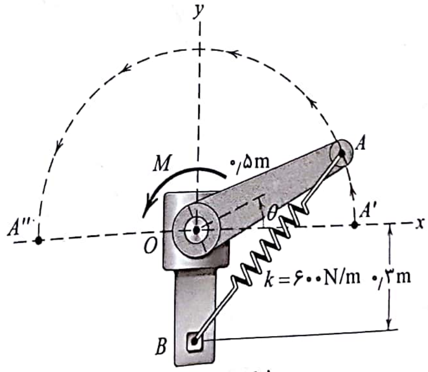
شکل م ۱۸۵.۲

۱۸۶.۲* با استفاده از شکل مسئلهٔ ۷۸.۲ که در اینجا آمده است، نیرویی با اندازهٔ F در راستای خط MA اعمال می‌شود که M در وسط شعاع در راستای محور x قرار گرفته است. گشتاور نیرو حول نقطهٔ O را به‌صورت تابعی از θ در بازهٔ $0° \le \theta \le 90°$ تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید. ماکزیمم مقدار M_O و مقدار θ متناظر با آن را به‌دست آورید.



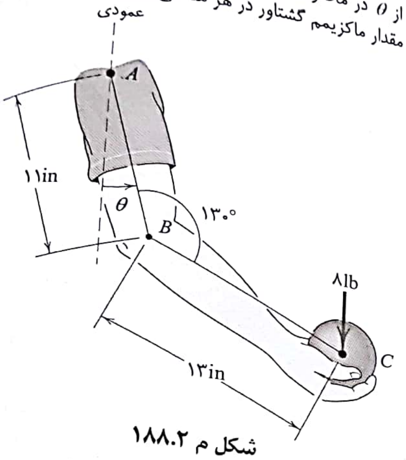
شکل م ۱۸۶.۲

۱۸۷.۲* موتوری متصل به محور در نقطهٔ O باعث چرخش بازوی OA در بازهٔ $0 \le \theta \le 180°$ می‌شود. طول آزاد فنر معادل $0{,}65m$ است و قادر است که هم نیروی کششی و هم نیروی فشاری را تحمل کند. اگر بخواهیم گشتاور حول نقطهٔ O صفر باشد، مقدار گشتاور مورد نیاز موتور را به‌صورت تابعی از θ تعیین کرده و نمودار آن را رسم نمایید.



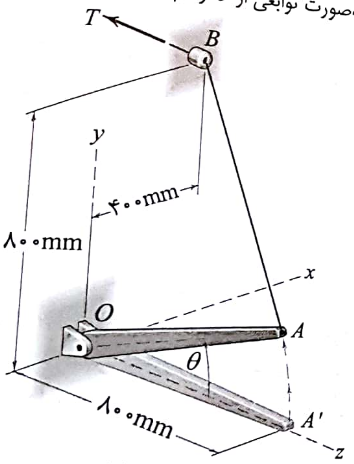
شکل م ۱۸۷.۲

۱۸۸.۲* شخصی آرنج خود را طوری قفل می‌کند که زاویهٔ ABC برابر ۱۳۰ درجه است و مفصل شانهٔ خود در A را طوری می‌چرخاند که دستش در سطح عمودی باقی بماند. مفصل شانه ثابت می‌ماند. گشتاورهای وزن $8lb$ کرهٔ حول نقاط A و B را به‌صورت تابعی از θ در محدودهٔ ۰ تا ۱۲۰° تعیین و رسم کنید. نظر خود را در مورد مفهوم فیزیکی مقدار ماکزیمم گشتاور در هر منحنی بیان کنید.



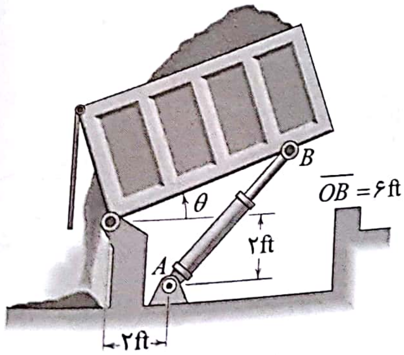
شکل م ۱۸۸.۲

۱۸۹.۲* کشش T در کابل AB در مقدار ثابت $120N$ نگه‌داشته می‌شود. گشتاور این کشش را حول نقطهٔ O در بازهٔ $0 \le \theta \le 90°$ تعیین کنید. مؤلفه‌های x و z گشتاور M_O را به‌صورت توابعی از θ رسم کنید.



شکل م ۱۸۹.۲

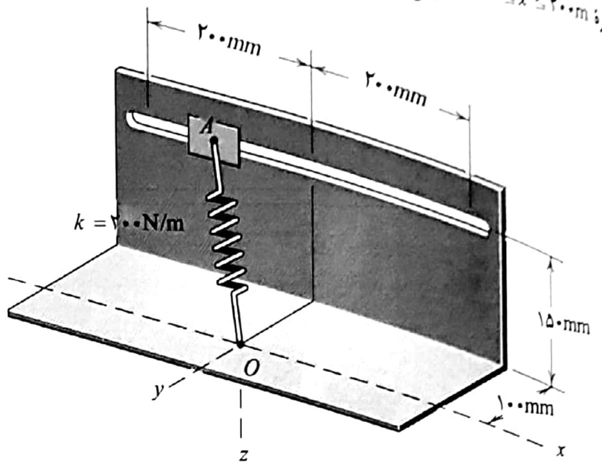
۱۹۰.۲* فرض کنید که سیلندر هیدرولیک AB نیروی $\mathbf{F}$ با مقدار ثابت $500lb$ را با بالا بردن محفظه اعمال می‌کند. گشتاور این نیرو حول نقطهٔ O را در بازهٔ $0 \le \theta \le 90°$ تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید. در چه زاویهٔ θ مقدار گشتاور ماکزیمم است و این مقدار ماکزیمم چه اندازه است؟



شکل م ۱۹۰.۲

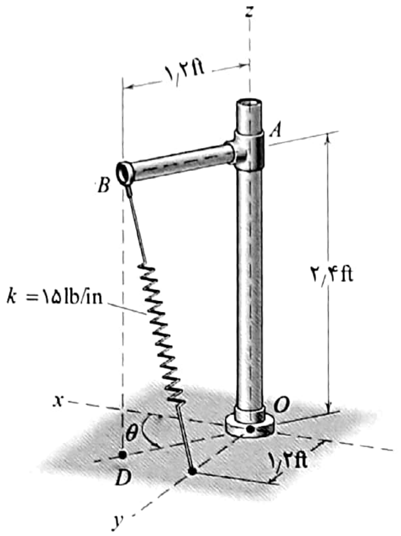
Scanned by CamScanner

۱۹۱.۲* در بخشی از طراحی یک سازوکار بزرگ، قسمت نشان‌داده‌شده در شکل را در نظر بگیرید. ثابت فنر معادل $k = ۲۰۰ N/m$ بوده و یک سر آن به نقطهٔ ثابت O و سمت دیگر آن به یک لغزنده که در مسیر حرکت می‌کند، متصل است. طول آزاد فنر برابر ۱۵۰mm بوده و نیروی داخل آن معادل k برابر تغییر شکل آن است. نمودار مؤلفه‌های x، y و z نیروی فنر وارد بر A را برای تغییر مکان لغزنده در بازهٔ $-۲۰۰ \le x \le ۲۰۰ m$ تعیین کنید.



شکل م ۱۹۱.۲

۱۹۲.۲* بازوی AB در بازهٔ $۰ \le \theta \le ۱۸۰°$ دوران می‌کند و هنگامی‌که $\theta = ۹۰°$ است، فنر در حالت آزاد قرار دارد. گشتاور حاصل از نیروی فنر وارد بر نقطهٔ B حول نقطهٔ O را به‌صورت تابعی از θ تعیین کنید. سه مؤلفهٔ عددی گشتاورهای $\mathbf{M}_O$ را رسم کرده و مقدار ماکزیمم هر مؤلفه را مشخص کنید.



شکل م ۱۹۲.۲

Scanned by CamScanner

۳

تعادل

۱.۳ مقدمه

قسمت (الف): تعادل در دو بعد

۲.۳ سیستم منفرد و نمودار جسم آزاد

۳.۳ شرایط تعادل

قسمت (ب): تعادل در سه بعد

۴.۳ شرایط تعادل

۵.۳ مروری بر فصل

۱.۳ مقدمه

استاتیک اصولاً با توصیف شرایط لازم و کافی نیروها برای حفظ حالت تعادل سازه‌های مهندسی سروکار دارد. بنابراین، این فصل که دربارهٔ تعادل است مهم‌ترین بخش استاتیک است، و روش‌هایی که در این فصل بررسی می‌شوند، اساس حل مسائل استاتیک و دینامیک را تشکیل می‌دهند. هنگام اعمال اصول تعادل، از مفاهیم طرح‌شده در فصل ۲ یعنی؛ نیروها، گشتاورها، کوپل‌ها و برایندها، همواره استفاده خواهیم کرد.

وقتی جسمی در تعادل است، برایند *کلیهٔ* نیروهای وارد بر جسم صفر است. بنابراین، نیروی برایند **R** و کوپل برایند **M**، هر دو صفر هستند و معادلات تعادل چنین است

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = 0 \qquad \mathbf{M} = \Sigma\mathbf{M} = 0 \qquad (۱.۳)$$

این معادلات شرایط لازم و کافی برای تعادل‌اند.

اگرچه اجسام فیزیکی سه‌بعدی‌اند، ولی وقتی اثر نیروهای وارد بر جسم در یک سطح مستقل اعمال می‌شود، می‌توان اکثر این نیروها را در نظر گرفت. اگر این ساده‌سازی امکان‌پذیر نباشد، باید با این نیروها به‌صورت سه‌بعدی رفتار کرد. ترتیب انجام کار را مانند فصل ۲ ادامه می‌دهیم، و در قسمت (الف) تعادل اجسام تحت تأثیر سیستم‌های نیرو را در دو بعد، و در قسمت (ب) تعادل اجسام تحت تأثیر سیستم‌های نیرو را در سه بعد مطرح می‌کنیم.

قسمت (الف): تعادل در دو بعد

۲.۳ سیستم منفرد و نمودار جسم آزاد

پیش از به‌کار بردن معادلات (۱.۳)، باید بدون هیچ ابهامی اجسام ویژه یا سیستم مکانیکی را تعریف کرده و *همهٔ* نیروهای وارد بر جسم را به‌طور واضح و کامل تحلیل نمود. حذف یا قلم‌افتادگی یک نیرو که باید بر جسم وارد شود و یا واردکردن نیرویی که نباید بر جسم وارد شود مسلماً خطاهایی را در نتیجه ایجاد خواهد کرد.

سیستم مکانیکی را به‌عنوان یک جسم یا گروه اجسامی که به‌گونه‌ای از همهٔ اجسام دیگر مجزا شده است، تعریف می‌کنیم. یک سیستم می‌تواند جسمی منفرد و یا ترکیبی از اجسام متصل‌به‌هم باشد. اجسام ممکن است صلب و یا غیرصلب باشند. همچنین سیستم می‌تواند جرم مشخصی از سیال مایع یا گاز و یا ترکیبی از مایعات و جامدات باشد. در استاتیک ابتدا نیروهایی که بر اجسام صلب و ساکن وارد می‌شوند، و همچنین همهٔ نیروهای وارد بر شاره‌های در حالت تعادل را مطالعه می‌کنیم.

بنابراین ابتدا تصمیم می‌گیریم کدام جسم یا ترکیبی از اجسام را موردتحلیل قرار دهیم، سپس این جسم یا ترکیب را به‌عنوان یک جسم مستقل و *منفرد* از همهٔ اجسام اطراف در نظر می‌گیریم. این مجزاسازی را به‌کمک ***نمودار جسم آزاد*** انجام می‌دهیم که نمایش نموداری از جسم یا ترکیب اجسام منفرد است که به‌صورت یک جسم منفرد در نظرگرفته می‌شود. این نمودار تمام نیروهای وارد بر سیستم را، که حاصل از تماس مکانیکی با سایر اجسام است و فرضاً از این سیستم حذف شده‌اند، نشان می‌دهد. اگر نیروهای غیر تماسی محسوسی مانند نیروهای گرانشی با جاذبهٔ مغناطیسی وجود داشته باشند، این‌گونه نیروها نیز در نمودار جسم آزاد باید نشان داده شوند. تنها پس از رسم دقیق چنین نموداری، باید معادلات تعادل را نوشت به‌دلیل اهمیت زیاد این مطلب، تأکید می‌کنیم که

نمودار جسم آزاد، اولین مرحلهٔ بسیار مهم در حل مسائل مکانیک است.

قبل از سعی در رسم نمودار یک جسم آزاد باید یادآور شویم که مشخصات پایه و اساسی نیرو باید روشن شود. این مشخصات در بخش ۲.۲ با تأکید بر تمرکز روی خواص برداری نیرو، شرح داده شد. نیروها را می‌توان خواه به‌واسطهٔ تماس فیزیکی مستقیم یا با تأثیر از راه دور اعمال کرد. نیروها می‌توانند نسبت به سیستم مورد بررسی، داخلی یا خارجی باشند. بسیاری از نیروها ممکن است متمرکز و یا به‌صورت گسترده باشند. اصل انتقال‌پذیری اجازه می‌دهد نیرو را تا آنجا که اثرات خارجی آن بر یک جسم صلب متمرکز مدنظر است، برداری لغزان در نظرگرفت.

اکنون از مشخصه‌های این نیرو برای در نظرگرفتن مدل‌های سیستم‌های مکانیکی جداشده استفاده می‌کنیم. به‌کمک این مدل‌ها می‌توان معادلات تعادل مربوطه را نوشته و سپس آنها را تحلیل کرد.

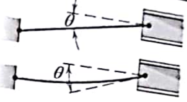
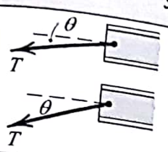
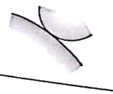
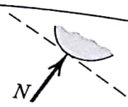
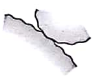
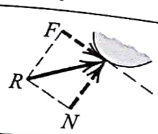
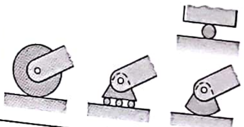
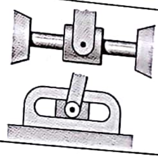
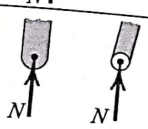
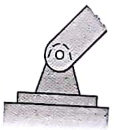
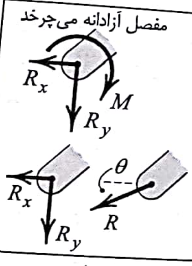
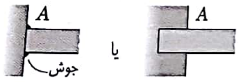
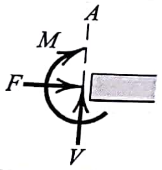
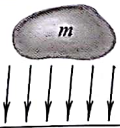
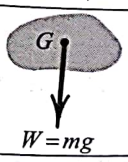
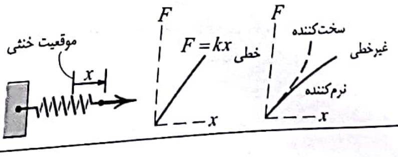
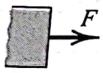
Scanned by CamScanner

در برابر کنش هر نیروست؛ در مقابل نیروی کنش، نیرویی برابر و در جهت
مخالف آن به‌نام نیروی واکنش وجود دارد که می‌باید به‌طور دقیق در
نظرگرفته‌شود. نیروی وارد بر یک جسم توسط عضو تکیه‌گاهی یا در تماس با
آن، همواره در جهت خلاف حرکت جسم مجزایی است که می‌توانست رُخ دهد

مدل‌سازی اثر نیروها

شکل ۱.۳ نمایشگر انواع اعمال نیرو بر روی سیستم‌های مکانیکی برای تحلیل در دو بعد است. در هر مثال، نیروی وارد بر جسم را که قبلاً به‌صورت منفرد نشان داده شده مشخص می‌کند. بنابر قانون سوم نیوتن که بیانگر وجود اثر متقابل

مدل‌سازی اثر نیروها در تحلیل دوبعدی

نوع تماس و منشأ نیرو		اثر بر جسمی که باید مجزا شود	
۱. کابل، تسمه، زنجیر یا طناب وزن کابل قابل صرف‌نظر کردن است. وزن کابل قابل صرف‌نظر کردن نیست.	 	نیروی واردشده توسط کابل انعطاف‌پذیر همواره به‌صورت کششی در جهت دور شدن از جسم و در امتداد کابل است.	
۲. سطوح صاف		نیروی تماسی، نیروی فشاری و عمودبرسطح است.	
۳. سطوح زبر		سطوح زبر می‌توانند مؤلفهٔ مماسی F (نیروی اصطکاکی) و نیز مؤلفهٔ عمودی N، ناشی از نیروی برایند تماسی R را تحمل کنند.	
۴. تکیه‌گاه غلتکی		تکیه‌گاه غلتکی، ساچمه‌ای، یا غلتشی نیروی فشاری عمودبرسطح تکیه‌گاه را منتقل می‌کند.	
۵. راهنمای کاملاً لغزان		طوقه یا کشویی که آزادانه در امتداد راهنمای صیقلی می‌لغزد، می‌تواند تنها نیروی عمود بر راهنما را تحمل کند.	
۶. اتصال مفصلی		اتصال مفصل آزاد می‌تواند در هر امتدادی در صفحهٔ عمود بر محور پین، تکیه‌گاه نیرو باشد. این نیرو را می‌توان با دو مؤلفهٔ R_x، R_y، یا اندازهٔ R و امتداد θ نشان داد. پینی که آزادانه می‌چرخد تکیه‌گاه کوپل M نیز هست.	
۷. تکیه‌گاه گیردار یا ثابت	 	تکیه‌گاه گیردار یا ثابت می‌تواند نیروی محوری F، نیروی عرضی (نیروی برشی) V، و کوپل (گشتاور خمشی) M را متحمل شود و از دوران جلوگیری کند.	
۸. جاذبهٔ گرانشی	 	برایند جاذبهٔ گرانشی وارد بر تمام اجزای جسمی به‌جرم m عبارت است از $W = mg$ و از مرکز جرم G می‌گذرد و به‌سمت مرکز کرهٔ زمین است.	
۹. اثر فنر	 	اگر فنر کشیده شود، نیروی فنر کششی است و اگر فشرده شود، فشاری است. برای یک فنر خطی کشسان، سختی k نیروی لازم برای تغییر شکل فنر به‌اندازهٔ طول واحد است.	

شکل ۱.۳

شکل ۱.۳ انعطاف‌پذیری کابل، تسمه، طناب، یا زنجیر بر روی جسمی که به آن وصل شده است را شرح می‌دهد. به‌علت انعطاف‌پذیر بودن، طناب یا کابل قادر به تحمل مقاومت و دوری از خمش یا فشار نیست و بنابراین تنها یک نیروی کشسانی در جهت مماس بر کابل در نقطهٔ اتصال وجود دارد. نیروی وارد از طرف کابل بر روی جسم متصل به آن همواره به‌سمت *خارج* است (دور شدن از جسم). وقتی کشش T کابل نسبت به وزن آن بیشتر است، می‌توان فرض کرد که کابل به‌شکل یک خط مستقیم است. اگر وزن کابل در مقایسه با کشش آن ناچیز باشد، شکم‌دادگی کابل اهمیت داشته و امتداد و مقدار کشش کابل در طول آن تغییر می‌کند.

وقتی سطوح تماس دو جسم مانند مثال ۲ *صاف* باشد، نیروی واردشده توسط یکی روی دیگری فشاری است و بر خط مماس بر سطح عمود است. اگرچه هیچ سطح واقعی کاملاً صیقلی نیست، اما می‌توانیم در اکثر موارد کاربردی از این فرض استفاده کنیم.

وقتی سطوح تماس مانند مثال ۳ زبر و مات باشند، نیروی تماس لزوماً عمود بر سطوح تماس نمی‌باشد، ولی ممکن است به دو *مؤلفهٔ مماسی* F (یا *اصطکاکی*) و *مؤلفهٔ عمودی* N تجزیه شود.

در مثال ۴ شماری از شکل‌های مکانیکی تکیه‌گاهی نشان داده شده که موجب حذف نیروهای اصطکاکی به‌طور مؤثر می‌شود. در این موارد واکنش بر سطوح تکیه‌گاه عمود است.

مثال ۵ اثر یک مسیر هدایت‌کننده را بر روی جسم هدایت‌شونده نشان می‌دهد، هیچ مقاومتی به‌موازات مسیر وجود ندارد.

مثال ۶ نشان‌دهندهٔ اثر یک اتصال مفصلی است. چنین اتصالی می‌تواند نیروی تکیه‌گاه را در هر جهتی عمود بر محور پین نگه‌دارد. معمولاً این اثر را با جملات دو مؤلفهٔ عمودبرهم نشان می‌دهیم. در مسائل ویژه جهت این مؤلفه‌ها بستگی به عضو بارگذاری‌شده دارد. از طرف دیگر درصورتی‌که جهت اولیه معلوم باشد، جهتی را به‌دلخواه مشخص کرده و معادلات تعادل را می‌نویسیم. چنانچه جواب مثبت به‌دست آمد، معلوم می‌شود علامت اولیه صحیح بوده و درصورتی‌که علامت جواب منفی بود، معلوم می‌شود که جهت اختیاری اولیه درست نبوده و باید جهت خلاف آن را در نظر بگیریم.

اگر مفصل برای حرکت حول پین آزاد باشد، اتصال می‌تواند تنها تکیه‌گاه نیروی R باشد و اگر مفصل برای چرخیدن آزاد نباشد، اتصال می‌تواند تحمل یک مقاومت کوپل M را نیز تحمل کند. در اینجا M به‌طور دلخواه نشان داده می‌شود ولی چرخش آن بستگی به چگونگی باردارشدن عضو دارد.

مثال ۷ برایند توزیع نسبتاً پیچیده‌تری از نیرو روی مقاطع یک میلهٔ بلند و باریک یا تیر در محل تکیه‌گاه گیردار یا ثابت را نشان می‌دهد. جهت واکنش F و V و کوپل خمشی M در یک مسئلهٔ مفروض بستگی به نحوهٔ بارگذاری جسم دارد.

یکی از نیروهای بسیار معمول مربوط به جاذبهٔ گرانشی مثال ۸ است. این نیرو بر همهٔ اجزای جرم در یک جسم اعمال می‌شود و بنابراین روی تمام اجزای جرم جسم گسترده است. برایند گرانشی نیروها بر روی تمام اجزا برابر وزن جسم $W = mg$ است که از نقطهٔ مرکز جرم G می‌گذرد و جهت آن به‌سمت مرکز گرانی زمین است. مکان G آشکارا به وضعیت هندسی جسم بستگی دارد، به‌ویژه وقتی در جسم حالت تقارن وجود دارد. هنگامی‌که موقعیت مرکز جاذبه مشخص نیست، می‌بایست آن را با تجربه یا محاسبه تعیین کرد.

همین نکات برای نیروهای مغناطیسی و الکتریکی که از دور اثر می‌کنند، صدق می‌کند. این نیروهای از راه دور، در مجموع دارای اثرات یکسان بر روی جسم صلب هستند، مانند نیروهایی که با مقدار و جهت برابر به‌صورت تماس مستقیم خارجی بر جسم اثر می‌کنند.

مثال ۹ اثر یک فنر کشسان *خطی* و یک فنر *غیرخطی* خواه با خاصیت نرم یا سخت را نشان می‌دهد. نیروی وارد توسط یک فنر خطی در کشش و یا فشار با رابطهٔ $F = kx$ داده می‌شود، که در آن k معرف *سختی* فنر و x میزان تغییر طول از حالت اولیه می‌باشد.

آنچه در شکل ۱.۳ نمایش داده شده نمودارهای جسم آزاد *نیستند*، بلکه اجزایی از ساختار نمودارهای جسم آزاد هستند. این نه مثال را مطالعه کنید و در مسائل مشخص کنید تا بتوانید نمودارهای صحیح جسم آزاد را رسم کنید.

این ابزار طوری طراحی شده که بتواند بدنهٔ اتومبیل را در زمان تولید در محدودهٔ وسیعی در تعادل نگه دارد.

مفاهیم کلیدی

ترسیم نمودارهای جسم آزاد

روش کلی برای رسم نمودار جسم آزادی که جسم یا سیستمی را مجزا می‌کند شامل مراحل زیر است:

مرحلهٔ ۱. تصمیم بگیرید که کدام سیستم را می‌خواهید مجزا و منفرد کنید. سیستم انتخاب‌شده، معمولاً شامل یک یا چند مقدار ناشناخته است.

مرحلهٔ ۲. بعد سیستم انتخاب‌شده را با رسم یک نمودار که نشان‌دهندهٔ *کامل اتصال‌ها و پیوندهای خارجی* است، مجزا کنید. این پیوندها سیستم منفرد را از *همهٔ* اتصال‌ها و یا پیوندهای اجسام دیگر، که باید حذف شوند، جدا می‌سازد. این مرحله اغلب بسیار مهم و اساسی‌تر از سایر موارد است. مطمئن شوید که به‌طور کامل سیستم را قبل از شروع به مراحل دیگر به‌صورت منفرد درآورده‌اید.

مرحلهٔ ۳. پیش از برداشتن اتصال‌ها و حذف دیگر اجسام همهٔ نیروهایی که *روی* سیستم منفرد وارد می‌شوند را مشخص کنید و آنها را در مکان خاص روی نمودار سیستم منفرد نشان دهید. بررسی منظم همهٔ محیط‌های مرزی، تمام نیروهای تماسی را مشخص خواهد کرد. در مواردی که وزن‌ها محسوس هستند، باید در نظر گرفته شوند. کلیهٔ نیروهای معلوم را با بردار پیکان‌دار و هریک را با مقدار مناسب، امتداد و جهت نشان دهید. هر نیروی مجهول می‌بایست با پیکانی نشان داده شده و مقدار و امتداد مجهول آن با نمادی مشخص شود. اگر جهت بردار نیز مجهول باشد، آن را می‌توان در جهت دلخواهی فرض کرد. اگر جهت فرض‌شده صحیح باشد، در محاسبات بعدی با استفاده از معادلات تعادل، جوابی با علامت مثبت حاصل می‌شود و اگر جهت درست را انتخاب نکرده باشیم، کمیتی منفی به‌دست خواهد آمد. در تمام محاسبات، باید بین مشخصات نیروهای مجهول، *سازگاری* وجود داشته باشد. در این‌صورت است که، جواب معادلات تعادل جهت‌های صحیح را مشخص خواهد کرد.

مرحلهٔ ۴. محورهای مختصات انتخاب‌شده را مستقیماً روی نمودار نشان دهید. برای سهولت ابعاد مناسب را نیز می‌توان نشان داد. با این وجود توجه کنید که نمودار جسم آزاد به‌کاررفته به قصد جلب‌توجه دقیق روی اثر تنش بر نیروهای خارجی است و بنابراین نمودار باید درهم‌ریخته باشد. همچنین نباید حاوی اطلاعات اضافی باشد. پیکان‌هایی که نیرو را نمایش می‌دهند از پیکان‌های نشان‌دهندهٔ کمیت‌های دیگر کاملاً متمایز کنید. برای این کار، می‌توان از مدادرنگی استفاده کرد.

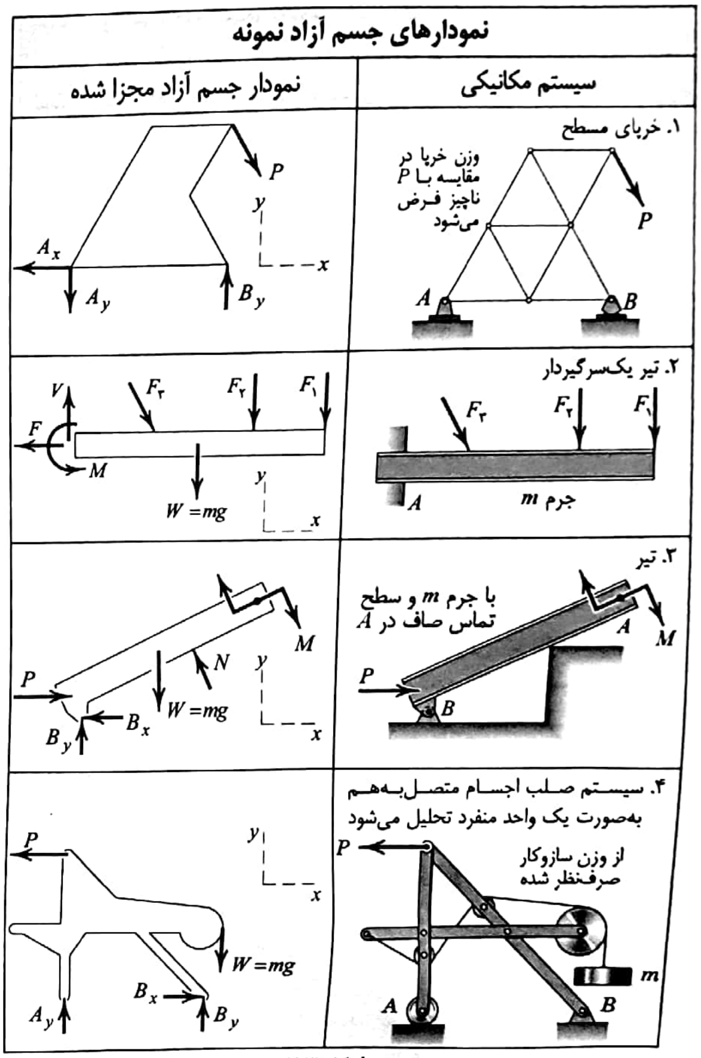
Scanned by CamScanner

با تکمیل کردن چهار مرحلهٔ بالا، نمودار جسم آزاد صحیحی به‌دست می‌آید که در هنگام استفاده از معادلات حاکم هم در استاتیک و هم در دینامیک، به کار می‌آید. دقت کنید مبادا، نیروهایی را که در نگاه اول در محاسبات ضروری به‌نظر نمی‌رسند، از نمودار جسم آزاد حذف کنید. تنها از راه مجزاسازی *کامل* و نمایش منظم همهٔ نیروهای خارجی است که اثرات تمام نیروهای کنشی و واکنشی را می‌توان در نظرگرفت. اغلب نیرویی که در لحظهٔ نخست تصور می‌شود اثری بر نتیجهٔ مطلوب ندارد واقعاً مؤثر است. بنابراین، تنها روش مطمئن این است که تمام نیروها با مقادیر غیرقابل صرف‌نظرکردن، در نمودار جسم آزاد نشان داده شوند.

روش نمودار جسم آزاد بی‌نهایت در مکانیک مهم است، زیرا توسط آن می‌توانیم تعریف دقیقی از سیستم مکانیکی داشته و توجه را روی مفهوم و کاربرد دقیق قوانین نیرو در استاتیک و دینامیک متمرکز کنیم. برای رسم نمودار جسم آزاد، چهار مرحلهٔ قبلی را مرور کنید و نمودارهای نمونهٔ نشان‌داده‌شده در شکل ۲.۳ و مسئله‌های نمونهٔ انتهای بخش بعد را مطالعه کنید.

مثال‌هایی از نمودارهای جسم آزاد

شکل ۲.۳ چهار مثال از سازوکارها و سازه‌ها را به‌همراه نمودارهای جسم آزاد آنها ارائه کرده است. برای وضوح بیشتر شکل، ابعاد و مقادیر حذف شده‌اند. در هر حالت تمام سیستم را به‌صورت یک جسم منفرد در نظرگرفته‌ایم، بنابراین نیروهای داخلی را نشان نداده‌ایم. مشخصات انواع مختلف نیروهای تماسی که در شکل ۱.۳ نشان داده شد، در این چهار مثال مورد استفاده قرارگرفته است.



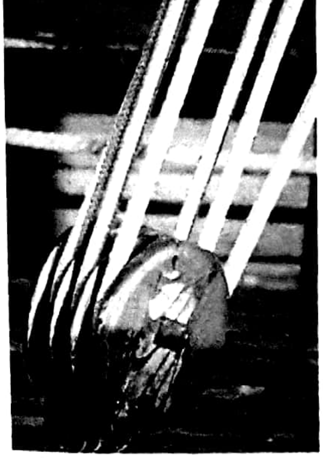
شکل ۲.۳

در مثال ۱ خرپا از اجزایی ساخته شده که همه با هم پیکربندی یک جسم صلب را تشکیل می‌دهند. بنابراین می‌توان کل خرپا را از تکیه‌گاهش جدا کرد و آن را به‌صورت یک جسم صلب منفرد در نظرگرفت. علاوه بر بار خارجی اعمال‌شدهٔ P، نمودار جسم آزاد باید شامل واکنش بر نقاط A و B خرپا هم باشد. تکیه‌گاه غلتکی در نقطهٔ B تنها یک نیروی قائم را تحمل می‌کند که این نیرو در نقطهٔ B به سازه منتقل می‌شود (مثال ۴ در شکل ۱.۳). اتصال مفصلی در نقطهٔ A (مثال ۶ از شکل ۱.۳) سبب نگهداری هم نیروی افقی و هم نیروی قائم در خرپا می‌شود. اگر وزن کل اعضای خرپا در مقایسه با P و نیروهای وارد بر نقاط A و B بیشتر باشد، در آن‌صورت وزن اعضای خرپا را هم باید در نمودار جسم آزاد مانند نیروهای خارجی منظور کرد.

در این مثال نسبتاً ساده واضح است که برای جلوگیری از چرخش ساعتگرد خرپا حول نقطهٔ B، مؤلفهٔ قائم A_y، باید به‌طرف پایین باشد. همچنین مؤلفهٔ افقی A_x باید به‌سمت چپ باشد تا مانع حرکت خرپا به‌سمت راست تحت تأثیر مؤلفهٔ افقی P شود. بنابراین در رسم نمودار جسم آزاد برای این خرپای ساده به‌سهولت می‌توانیم جهت صحیح هریک از مؤلفه‌های نیروی وارد بر خرپا را *توسط* تکیه‌گاه A تشخیص داده و روی نمودار مشخص نماییم. اگر جهت صحیح فیزیکی نیرویی یا مؤلفه‌اش با مشاهدهٔ مستقیم، به‌آسانی قابل تشخیص نباشد، باید یک جهت فرضی برای آن در نظرگرفت، و درستی یا نادرستی این فرض را بعداً با علامت جبری مقدار به‌دست‌آمده بررسی کرد.

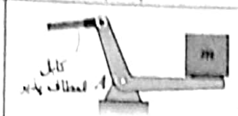
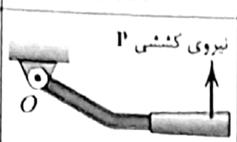
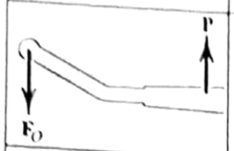
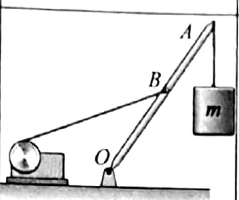
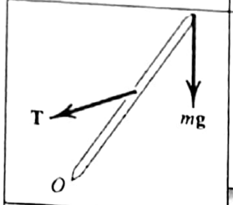
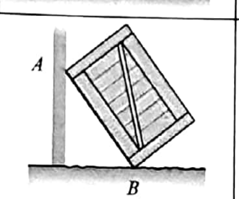
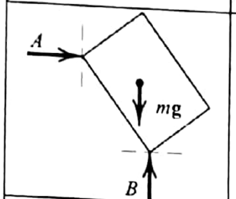
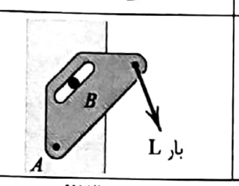
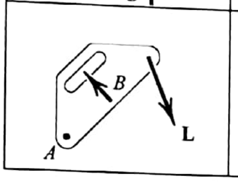
در مثال ۲ تیر یک‌سرگیرداری به دیوار محکم شده و سه بار بر آن وارد می‌شود. اگر بخش سمت راست مقطع واقع در A را مجزا کنیم، باید نیروهای واکنشی وارد *بر تیر توسط* دیوار را نیز در نمودار جسم آزاد بیاوریم. برایندهای این نیروهای واکنشی بر مقطع A وارد می‌شوند (مثال ۷ شکل ۱.۳). نیروی قائم V برای مقابله با نیروی واردشده به‌سمت پایین اضافی نشان داده شده، و نیروی کششی F برای ایجاد تعادل با نیروی واردشده به‌طرف راست باید منظور شود. برای برقراری تعادل و برای جلوگیری از چرخش تیر حول نقطهٔ A، همچنین یک کوپل M خلاف ساعتگرد مورد نیاز است. وزن mg تیر نیز باید به مرکز جرم وارد شود (مثال ۸، شکل ۱.۳).

در نمودار جسم آزاد مثال ۲، سیستم تقریباً پیچیده‌ای از نیروها را که بر مقطع بریدهٔ تیر اثر می‌کند، با یک سیستم معادل کوپل-نیرو نشان داده‌ایم و در آن، نیرو را به مؤلفهٔ عمودی V (نیروی برشی) و مؤلفهٔ افقی F (نیروی کششی) تجزیه کرده‌ایم. کوپل M، گشتاور خمشی در تیر است. اکنون نمودار جسم آزاد کامل است و تیر را در حالت تعادل تحت تأثیر کشش نیرو و یک کوپل نشان می‌دهد.



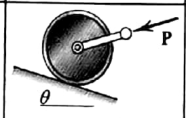
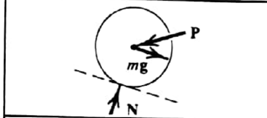
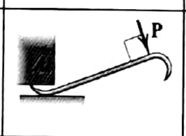
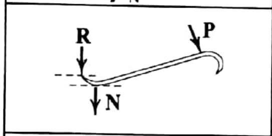
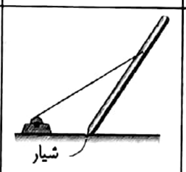
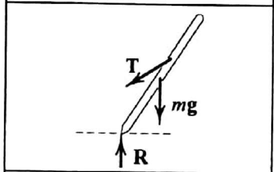
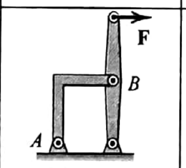
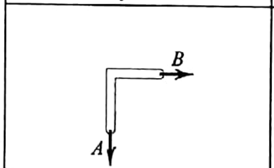
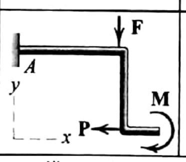
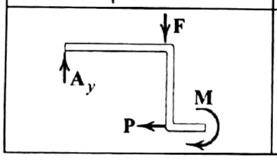
حتی مجموعهٔ قرقره‌های مرکب را می‌توان به‌آسانی با تحلیل روشمند تعادل، بررسی کرد.

Scanned by CamScanner

	جسم	نمودار جسم آزاد ناقص
۱. سیمک نگهدارندهٔ جرم m با اتصال مفصلی در A		
۲. اهرم کنترل که به O گشتاور اعمال می‌کند.		
۳. دکل OA، با جرم ناچیز در مقایسه با جرم m دکل در O مفصل شده و توسط کابل بالابر در B نگه‌داشته می‌شود.		
۴. صندوق یکنواختی به‌جرم m به سطح صاف دیوار قائم تکیه داشته و از پایین روی سطح زبر افقی قرار دارد.		
۵. دیوارکوب بارگذاری‌شده توسط اتصال مفصلی در A و پین ثابت B واقع در شیار، صاف نگه‌داشته شده است.		

تمرین ۳.الف

تمرین ۳.ب درهریک از پنج مثال زیر، جسمی که باید مجزا شود در تصویر سمت راست نشان داده شده و نمودار جسم آزاد آن به‌طور *غلط* یا *ناقص* در تصویر سمت چپ نشان داده شده است. در هر مورد برای رسم نمودار جسم آزاد کامل یا درست، هر تغییر یا افزایش لازم را اعمال کنید. وزن اجسام ناچیز است مگر خلاف آن گفته شده باشد. برای ساده‌شدن شکل‌ها، ابعاد و مقادیر عددی را حذف کرده‌ایم.

	جسم	نمودار جسم آزاد غلط یا ناقص
۱. غلتک چمن‌زنی به‌جرم m که روی شیب θ بالا می‌رود.		
۲. دیلمی با سطح افقی صاف که جسم A را بالا می‌برد. میله روی سطح افقی زبر تکیه دارد.		
۳. تیر عمودی به‌جرم m که با پیچ بالا برده می‌شود. سطح افقی تکیه‌گاهی دارای شکافی است که از لغزش تیر جلوگیری می‌کند.		
۴. گونیای نگهدارندهٔ قاب، اتصال‌های مفصلی دارد.		
۵. میلهٔ خمیده‌ای که در تکیه‌گاه A جوش خورده و دو نیرو و کوپل به آن وارد می‌شود.		

تمرین ۳.ب

در مثال ۳، اثر وزن $mg = W$ در مرکز تیر نشان داده شده است و فرض بر این است که مرکز جرم معلوم است (مثال ۸، شکل ۱.۳). نیرویی که گوشهٔ A به تیر وارد می‌کند عمود بر سطح صیقلی تیر است (مثال ۲، شکل ۱.۳). برای درک این نیرو، نمای بزرگ‌شدهٔ تماس A را در نظر بگیرید که تا حدودی گرد شده است و نیرویی که این گوشهٔ گرد بر سطح مستقیم تیر که بنا به فرض صیقلی است وارد می‌کند را تصور کنید. اگر سطح تماس در لبه صیقلی نبود، یک مؤلفهٔ نیروی مماسی اصطکاکی تولید می‌شد. علاوه بر نیروی واردشدهٔ P و کوپل M، اتصال مفصلی B نیرویی بر تیر وارد می‌کند که به یک مؤلفه در جهت x و یک مؤلفه در جهت y تجزیه می‌شود. جهت‌های مثبت این مؤلفه‌ها دلخواه انتخاب شده‌اند.

در مثال ۴ اگر نیروهای mg و P معلوم باشند، تمام سازوکار جداشده شامل سه مجهول است. هریک از پیکربندی‌های داخلی متعدد برای اتصال کابل که به وزنهٔ m منتهی می‌شود، امکان‌پذیر است، بدون آنکه بر پاسخ خارجی سازوکار، به‌طور کلی، اثر بگذارد، و این واقعیت را نمودار جسم آزاد نشان می‌دهد. این مثال فرضی را از آن جهت آوردیم که به مزیت واردکردن هرچه بیشتر نیرو در نمودار جسم آزاد تأکید کنیم و بی‌تأثیربودن نیروهای داخلی وارد بر مجموعهٔ متشکل از اعضا بر مقادیر واکنش‌های خارجی را نشان دهیم.

برای نوشتن معادلات تعادل، که در قسمت بعد بررسی می‌شوند، از نمودار جسم آزاد استفاده می‌کنیم. با حل این معادلات، ممکن است مقدار بعضی نیروها صفر باشد. چنین نتیجه‌ای حاکی از آن است که این نیروها وجود دارند. در مثال ۱ شکل ۲.۳، هریک از واکنش‌های A_x، A_y یا B_y ممکن است به‌ازای مقادیر خاص پارامترهای خرپا و اندازه، امتداد و جهت بار واردشدهٔ P، صفر باشند. اغلب نمی‌توان نیروی واکنشی صفر را با چشم مشخص کرد، اما آن را با حل معادلات تعادل می‌توان تعیین کرد.

نکات مشابهی در مورد اندازهٔ منفی نیروهای محاسبه‌شده حاکم است. چنین نتیجه‌ای حاکی از آن است که جهت واقعی مخالف جهت اختیار شده است. جهت مثبت B_x و B_y در مثال ۳ و B_y در مثال ۴ روی نمودارهای جسم آزاد فرضی است و درستی این فرض‌ها، را مثبت یا منفی‌بودن آنها در محاسبات انجام‌شده در مسائل واقعی اثبات یا نفی می‌کند.

مجزاسازی سیستم مکانیکی مورد نظر، گامی مهم در فرمول‌بندی مدل ریاضی است. مهم‌ترین جنبه در ترسیم صحیح نمودار بسیار مهم جسم آزاد، تصمیم‌گیری قاطع و روشن در مورد این مطلب است که چه چیزهایی باید در آن گنجانده شود و چه چیزهایی باید حذف شود. این تصمیم فقط وقتی واضح است که مرز نمودار جسم آزاد یک مسیر کامل از جسم یا سیستم اجسامی را که باید جدا شوند نشان دهد؛ این مسیر از نقطهٔ دلخواهی روی مرز آغاز شده و دوباره به همان نقطه می‌رسد. به این ترتیب جسم با این مرز بسته، جسم آزاد منفرد است و همهٔ نیروهای تماسی و همهٔ نیروهای حجمی (بدنی) که با عبور از این مرز به سیستم منتقل می‌شوند، باید در نظر گرفته شوند.

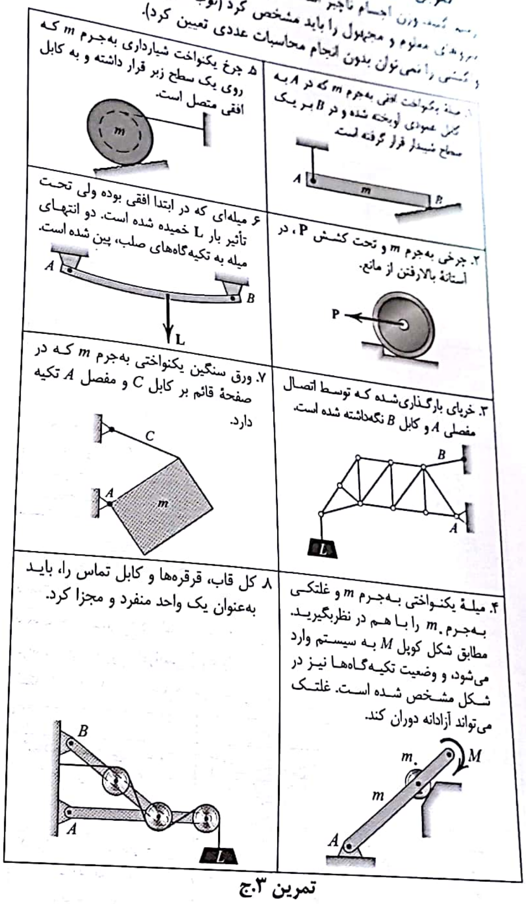
تمرین‌های زیر برای رسم نمودار جسم آزاد سودمند است. پیش از استفاده از نمودارهای جسم آزاد برای به‌کارگیری اصول تعادل نیرو در بخش بعد، این تمرین‌ها را انجام دهید.

تمرین‌های نمودار جسم آزاد

تمرین ۳.الف در هریک از پنج نمونهٔ زیر، جسمی که باید مجزا شده و به‌صورت یک جسم منفرد بررسی شود، در تصویر سمت راست و نمودار جسم آزاد آن به‌طور *ناقص* در تصویر سمت چپ نشان داده شده است. در هر مورد نیروهای لازم برای تکمیل نمودار جسم آزاد را اضافه کنید. وزن اجسام ناچیز است مگر خلاف آن گفته شده باشد. برای ساده‌شدن شکل‌ها، ابعاد و مقادیر عددی را حذف کرده‌ایم.

Scanned by CamScanner

تمرین ۳.ج برای هریک از اجسام زیر نمودار جسم آزاد کامل و صحیحی رسم کنید. وزن اجسام ناچیز است مگر آنکه جرم آنها گفته شده باشد. تمام نیروهای معلوم و مجهول را باید مشخص کرد (توجه: جهت بعضی از مؤلفه‌های ... کششی را نمی‌توان بدون انجام محاسبات عددی تعیین کرد).



تمرین ۳.ج

۳.۳ شرایط تعادل

در بخش ۱.۳ تعادل را به‌عنوان حالتی تعریف کردیم که در آن برایند همهٔ نیروهای وارد بر جسم صفرند. به بیان دیگر، جسم در تعادل است هرگاه تمام نیروها و گشتاورهای وارد بر آن متوازن باشند. این شرایط در معادلات برداری تعادل، معادلات (۱.۳)، گنجانده شده‌اند که در دو بعد، بیان عددی آنها عبارت است از

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0 \qquad (۲.۳)$$

معادلهٔ سوم نشان می‌دهد که مجموع گشتاور تمام نیروها نسبت به نقطه‌ای مانند O در روی جسم یا خارج از آن صفر است. معادلات (۲.۳) شرط‌های لازم و کافی برای تعادل کامل در دو بعد است. این شرایط لازم‌اند زیرا اگر برآورده نشوند، موازنهٔ نیرو یا گشتاور نمی‌تواند وجود داشته باشد. این شرایط کافی‌اند زیرا اگر برآورده شوند، عدم توازن نمی‌تواند وجود داشته باشد، و تعادل برقرار می‌شود.

معادلاتی که نیرو و شتاب را در حرکت جسم صلب به‌هم مربوط می‌کنند در کتاب دینامیک، از قانون دوم حرکت نیوتن به‌دست می‌آیند. این معادلات نشان می‌دهند که شتاب مرکز جرم یک جسم با نیروی برایند $\Sigma \mathbf{F}$ وارد بر آن متناسب است. بنابراین اگر جسمی با سرعت ثابت (شتاب صفر) حرکت کند نیروی برایند وارد بر آن باید برابر صفر باشد و جسم را می‌توان به‌عنوان جسم در حالت تعادل فرض کرد.

برای تعادل کامل در دو بعد، هر سه معادلهٔ (۲.۳) باید برقرار باشند اما این شرایط از هم مستقل‌اند و ممکن است یکی بدون دیگری برقرار باشد به‌عنوان مثال، جسمی را در نظربگیرید که تحت تأثیر نیروهای واردشده، با سرعت افزاینده روی یک سطح افقی بلغزد. معادلات تعادل نیرو در امتداد قائم، که در آن شتاب صفر است، برقرارند، اما در جهت افقی برقرار نیستند. بنابراین یک جسم همچون چرخ طیار که حول مرکز جرم ثابت خود با سرعت زاویه‌ای افزاینده دوران می‌کند در حالت تعادل دورانی نیست، اما دو معادلهٔ تعادل نیرو برقرار خواهد بود.

گروه‌های تعادل

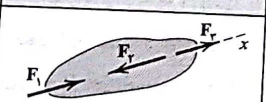
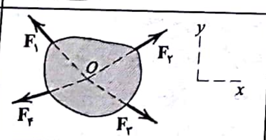
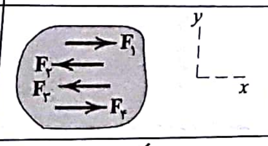
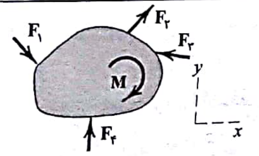
کاربردهای معادلات (۲.۳) به‌طور طبیعی به چند گروه تقسیم می‌شوند که به‌آسانی قابل تشخیص‌اند. در شکل ۳.۳ گروه‌بندی سیستم نیروهای مؤثر بر اجسام در تعادل دوبعدی نشان داده شده و به شرح زیراند:

گروه ۱. تعادل نیروهای هم‌خط تنها یک معادلهٔ نیرو در امتداد نیروها (امتداد x) را لازم دارد. چون معادلات دیگر به‌طور خودکار صدق می‌کنند.

گروه ۲. تعادل نیروهایی که در یک صفحه قرار دارند (صفحهٔ x-y) و همرس‌اند تنها به دو معادلهٔ نیرو نیاز دارند. زیرا مجموع گشتاور در نقطهٔ O یعنی حول محور z گذرنده از O، الزاماً صفر است. حالت تعادل یک ذره، در این گروه قرار می‌گیرد.

گروه ۳. تعادل نیروهای موازی در یک صفحه مستلزم معادلهٔ تعادل در امتداد نیروها (امتداد x) و یک معادلهٔ گشتاور حول یک محور (محور z) عمود بر صفحهٔ نیروهاست.

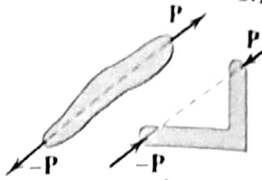
گروه ۴. تعادل در یک سیستم کل نیروها در یک صفحه (x-y) دو معادلهٔ نیرو در صفحه و یک معادلهٔ گشتاور حول یک محور (محور z) عمود بر صفحه لازم دارد.

گروه‌بندی‌های تعادل در دو بعد		
سیستم نیروها	**نمودار جسم آزاد**	**معادلات مستقل**
۱. هم‌خط		$\Sigma F_x = 0$
۲. متقاطع در یک نقطه		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$
۳. موازی		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$
۴. حالت کلی		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$

شکل ۳.۳

عضوهای دونیرویی و عضوهای سه‌نیرویی

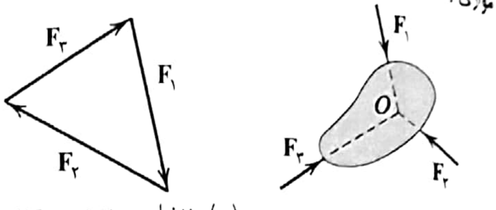
باید از دو حالت تعادل که اغلب پیش می‌آید مطلع باشید. اولین حالت، تعادل یک جسم تحت اثر تنها دو نیروست. دو مثال در شکل ۴.۳ نشان داده شده است. می‌بینیم که برای اینکه جسم دونیرویی در تعادل باشد، نیروها باید برابر و در خلاف جهت و هم‌خط باشند. شکل عضو تأثیری بر این شرط ساده ندارد. در شکل‌های نشان‌داده‌شده می‌بینیم که وزن عضوها نسبت به نیروهای واردشده ناچیز است.



عضوهای دونیرویی

شکل ۴.۳

حالت دوم برای *عضوهای سه‌نیرویی* است که جسم تحت تـأثیر سـه نیـرو [شکل ۵.۳ (الف)] قرار گرفته است. ملاحظه می‌کنیم که خطوط اثر این سه نیرو باید متقاطع باشند. اگر نیروها متقاطع نباشند، یکی از سه نیرو مـی‌بایسـت یـک گشتاور برایند حول نقطهٔ تقاطع دو نیروی دیگر وارد کند، که شرط صـفر بـودن گشتاورها را حول هر نقطه نقض می‌کند. تنها استثنا وقتی رخ می‌دهد که سه نیرو موازی باشند. در این مورد می‌توان نقطهٔ تلاقی را در بی‌نهایت در نظرگرفت.



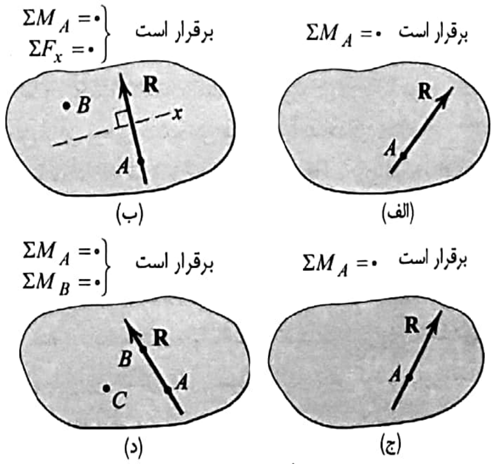
(الف) عضو سه‌نیرویی
(ب) چندضلعی بسته در $\Sigma\mathbf{F}=۰$ صدق می‌کند

شکل ۵.۳

اصل تلاقی سه نیرو در تعـادل کـاربرد گسـترده‌تـری در تحلیـل ترسـیمی معادلات نیرو دارد. در این مورد چندضلعی نیروها رسم می‌شـود کـه بایـد یـک چهارضلعی بسته مانند شکل ۵.۳ (ب) باشد. اغلب جسـمی را کـه تحـت تـأثیر بیش از سه نیرو در تعادل باشـد، مـی‌تـوان بـا ترکیـب دو یـا بیشـتر نیروهـای شناخته‌شده، به عضو سه‌نیرویی تبدیل کرد.

انواع دیگر معادلات تعادل

افزون بر معادلات تعادل (۲.۳)، دو روش دیگر برای بیـان شـرایط تعـادل کلـی نیروها در دو بعد وجود دارد. در مورد جسم نشان‌داده‌شده در شـکل ۶.۳ (الـف)، اگر $\Sigma M_A=۰$ باشد، برایند در صورت وجود نمی‌تواند یک کوپـل باشـد، بلکـه باید نیرویی چون $\mathbf{R}$ باشد که از نقطهٔ A می‌گذرد. حـال اگـر معادلـهٔ $\Sigma F_x=۰$



(الف) (ب) (ج) (د)

شکل ۶.۳

برقرار باشد، که در آن امتداد x دلخواه است، از شـکل ۶.۳ (ب) نتیجـه گرفتـه می‌شود که برایند نیروی $\mathbf{R}$، اگر هنوز وجود داشته باشد، نه‌تنها باید از نقطـهٔ A عبور کند، بلکه باید عمود بر محور x مطابق شکل باشد. حال از $\Sigma M_B=۰$ که در آن B هر نقطه‌ای روی خط AB عمود بر امتداد x نیسـت، نتیجـه مـی‌شـود که $\mathbf{R}$ باید صفر باشد و بنابراین جسم در وضعیت تعادل است. بنابراین مجموعهٔ دیگر معادلات تعادل عبارت‌اند از

$$\Sigma F_x=۰ \qquad \Sigma M_A=۰ \qquad \Sigma M_B=۰$$

که در آن دو نقطهٔ A و B نباید روی یک خط عمود بر امتداد x باشند.

فرمول سومی از شرایط تعادل را می‌توان برای سیستم نیروهای هم‌صـفحه نوشت که در شکل‌هـای ۶.۳ (ج) و (د) نشـان داده شـده اسـت. همچنـین اگـر برای هر جسمی مانند آنچه که در شکل ۶.۳ (ج) نشان داده شده داشـته باشـیم $\Sigma M_A=۰$، برایند درصورت وجود باید نیرویی مانـند $\mathbf{R}$ باشـد کـه از نقطـهٔ A عبور کند. در ضمن، اگر $\Sigma M_B=۰$ باشد، برایند در صورت وجود بایـد مطـابق شکل ۶.۳ (د) از B بگذرد. البته اگر $\Sigma M_C=۰$ باشـد، کـه در آن C بـا A و B هم‌خط نیست، چنین نیرویی نمی‌تواند وجـود داشـته باشـد. بنـابراین معـادلات تعادل را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\Sigma M_A=۰ \qquad \Sigma M_B=۰ \qquad \Sigma M_C=۰$$

که در این حالت A، B و C هر سه نقاطی‌اند که در امتداد یک خط نیستند.

وقتی معادلات تعادل به‌صورتی نوشته شوند که مستقل نباشند، اطلاع زایدی به‌دست می‌آید و حل معادلات به $۰=۰$ منجر می‌شود. برای مثال در یک مسئله به‌طورکلی دوبعدی با سه مجهول، سه معادلهٔ گشتاور نسبت به سه نقطه‌ای کـه روی یک خط راست قرار دارند، از یکدیگر مستقل نیستند. چنین معادلاتی شامل اطلاعات تکراری‌اند و حل دو تا از معادلات می‌تواند در بهترین حالت فقط منجر به تعیین دو مجهول شود و معادلهٔ سوم تنها معادلهٔ $۰=۰$ را ثابت می‌کند.

قیدها و سازه‌های معین استاتیکی

معادلات تعادل در این بخش شرایط لازم و کافی برای تعادل یـک جسـم را در برابر حرکت جسم ایجاد می‌کنند ولی با ایـن معـادلات لزومـاً نمـی‌تـوان تمـام نیروهای مجهول را تعیین کرد. این موضوع وابسته به نوع قیـدهای متصـل بـه جسم است. این مطلب که آیا معادلات تعادل برای تعیین همهٔ مجهولات کافی هستند یا خیر، به مشخصاتی که برای مقابله با حرکت احتمـالی جسـم، توسـط تکیه‌گاه‌ها اعمال می‌شوند، بستگی دارد. مقصود محدود کردن حرکت آنهاست.

در مثال ۴ از شکل ۱.۳ غلتک، گلوله، و ساچمه قیدی عمود بر سطح تماس ولی نه مماس بر سطح ایجاد می‌کنند؛ بنابراین یک نیـروی مماسـی نمـی‌توانـد تحمل شود. برای طوقهٔ لغزنده در مثال ۵، قید موجود تنها عمود بر هدایت‌کننده است. در مثال ۶ پین ـ اتصال مفصلی ثابت در هر دو جهت، قید ایجاد می‌کنـد، اما هیچ مقاومتی در برابر چرخش حول پین فراهم نمی‌کنـد؛ مگـر اینکـه پـین نتواند بچرخد. اما تکیه‌گاه ثابت مثـال ۷، هـم در مقابـل دوران و هـم در برابـر حرکت جانبی، قید ایجاد می‌کند.

اگر تکیه‌گاه غلتکی که خرپا را نگه می‌دارد، مثال ۱ در شکل ۲.۳، بـا یـک پین اتصال مانند نقطهٔ A جابه‌جا می‌شد در این‌صورت یک قید اضافی، علاوه‌بـر آنچه برای حفظ صورت تعادل لازم است، خـواهیم داشـت. سـه شـرط عـددی معادلات تعادل (۲.۳) نمی‌تواند اطلاعات کافی را برای تعادل همهٔ چهار مجهول فراهم سازد زیرا در واقع A_x و B_x را نمی‌توان به‌طور جداگانه حل کرد و تنهـا مجموعشان را می‌توان تعیین نمود. این دو مؤلفهٔ نیرو به تغییر شکل عضـوهای خرپا بستگی دارند که این تغییر شکل به‌نوبهٔ خود تحت تـأثیر خـواص سـختی

Scanned by CamScanner

... نیز ... واکنش‌های افقی A_x و B_x نیز به تغییر شکل اولیهٔ لازم ... ابعاد سازه با ابعاد نمونهٔ فونداسیون بین A و B بستگی دارد. پس ... A_x و B_x را توسط یک جسم صلب تعیین و تحلیل کرد.

... با مراجعه به شکل ۲.۳ می‌بینیم که اگر پین B در مثال ۳ برای ... آزاد نبود، تکیه‌گاه نمی‌توانست یک کوپل را به داخل پین روی تیر ... دهد. بنابراین چهار واکنش تکیه‌گاهی مجهول مؤثر بر تیر، یعنی نیرو در A، دو مؤلفهٔ نیرو در B و کوپل در B وجود دارند. در نتیجه سه معادلهٔ تعادل عددی اطلاعات کافی برای چهار مجهول فراهم نخواهند کرد.

یک جسم صلب یا ترکیبی از اجزایی که بتوان مانند یک جسم صلب منفرد در نظرگرفته شود، دارای تکیه‌گاه‌های زیاد خارجی یا قیدهای بیش از تعداد لازم برای نگهداری یک وضعیت تعادل است. این جسم یا ترکیب را، *استاتیکی نامعین* می‌نامند. به تکیه‌گاه‌هایی که بتوان آنها را حذف کرد بدون اینکه شرایط تعادل جسم از بین برود، *زاید (مازاد بر احتیاج)* گفته می‌شود. تعداد تکیه‌گاه‌های زاید موجود با درجهٔ *نامعین بودن استاتیکی* متناظر است و برابر است با تعداد کل نیروهای مجهول خارجی منهای تعداد معادلات مستقل موجود. از طرف دیگر اجسامی که متکی بر حداقل تعداد قیدهای لازم برای حفظ یک پیکربندی تعادل هستند را، *استاتیکی معین* می‌نامیم. برای چنین اجسامی معادلات تعادل برای نیروهای خارجی مجهول کافی است.

مسائل تعادل در این قسمت و در تمام این کتاب عموماً به اجسام معین استاتیکی محدود می‌شوند، که در آنها قیدها دقیقاً برای برقراری وضعیت تعادل پایدار کافی هستند و در این مسائل نیروهای تکیه‌گاهی مجهول را می‌توان از روی معادلات تعادل مستقل تعیین کرد.

باید از طبیعت قیدها پیش از کوشش در حل مسئلهٔ تعادل دوری کرد. جسمی را نامعین استاتیکی در نظر می‌گیریم که تعداد واکنش‌های خارجی مجهول آن، بیش از تعداد معادلات مستقل باشند. بهتر است همیشه تعداد نیروهای مجهول وارد بر جسم مفروض را شمارش کرده و مطمئن شویم که همان تعداد معادلهٔ مستقل هم می‌توان نوشت؛ در غیر این‌صورت، تلاش برای پیداکردن یک پاسخ غیرممکن فقط به‌کمک معادلات تعادل بیهوده است. مجهولات احتمالی می‌تواند نیرو، کوپل، فاصله یا زاویه باشد.

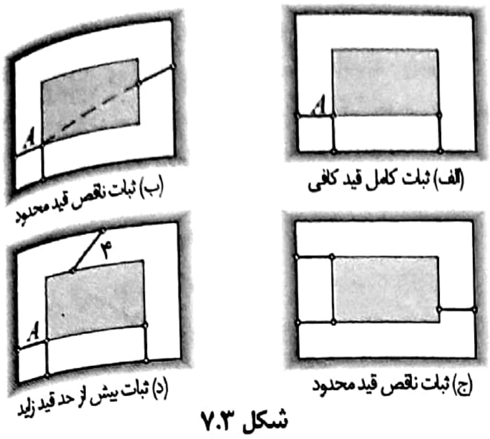
کفایت[1] قیدها

در بحث ارتباط بین قیدها و تعادل لازم بود بیشتر به کفایت قیدها توجه کرد. وجود سه قید برای حل مسئله در دو بعد همیشه ضمانت یک تعادل پایدار را نمی‌کند. شکل ۷.۳ چهار نوع متفاوت قید را نشان می‌دهد. در شکل ۷.۳ (الف)، نقطهٔ A مربوط به جسم صلب توسط دو اتصال ثابت شده و نمی‌توانند حرکت کند، و سومین اتصال از هرگونه چرخش جسم حول نقطهٔ A جلوگیری می‌کند؛ پس این جسم *کاملاً مقید* است، با سه *قید کافی (مناسب)*.

در قسمت (ب)، از شکل، اتصال سوم طوری قرارگرفته که نیروی متصل‌شده از نقطهٔ A می‌گذرد، در حالی‌که دو قید دیگر نیرو وارد می‌کنند. پس این شکل قیدها، وقتی‌که بارهای خارجی بر جسم وارد می‌شوند، در برابر چرخش حول A مقاومتی ندارند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که چنین جسمی تحت تأثیر *قیدهای جزئی* به‌صورت *ناقص مقید* شده است.

وضعیت نشان‌داده‌شده در قسمت (ج)، از شکل، حالت قید ناکافی مشابهی را ارائه می‌دهد، زیرا سه اتصال موازی نمی‌توانند برای حرکت کوچک عمودی جسم در برابر بار خارجی واردشده بر آن مقاومت اولیه‌ای به‌وجود آورند. قیدهایی از این دو نوع را اغلب *نامناسب* می‌نامند.

۱. منظور، کافی و بس بودن است. ـ م.



شکل ۷.۳

در قسمت (د) از شکل ۷.۳ حالتی از ثبات کامل نشان‌داده‌شده که در آن اتصال ... که به‌عنوان چهارمین قید اضافه شده است، برای حفظ موقعیت ثابت جسم لازم نیست. بنابراین قید ۴ یک *قید زاید* است و جسم نامعین استاتیکی است.

همانند چهار مثال شکل ۷.۳، به‌طور کلی با مشاهدهٔ مستقیم می‌توان تشخیص داد که آیا قیدهای روی جسم در تعادل دوبعدی، کامل (مناسب)، ناقص (نامناسب)، یا زاید است. همان‌گونه که قبلاً گفته‌شد، بسیاری از مسائل این کتاب معین استاتیکی با قیدهای کامل هستند.

مفاهیم کلیدی

راه‌حل مسائل

مسائل نمونه در انتهای این بخش، کاربرد نمودار جسم آزاد و معادلات تعادل برای مسائل معین استاتیکی را شرح می‌دهد. حل این مسائل باید به‌طور کامل مورد مطالعه قرارگیرد. در مسائل این فصل و کل مسائل مکانیک، این نکته دارای اهمیت است که شیوه‌ای منطقی و منظم را برای حل مسائل درپیش‌گیریم که شامل مراحل زیر است:

۱. به‌طور آشکار مقادیر داده‌های معلوم و مجهول مسئله را مشخص کنید.

۲. جسمی (یا مجموعهٔ اجسام متصل که یک جسم به‌حساب می‌آیند) را که باید مجزا شود به‌وضوح انتخاب کرده و نمودار جسم آزاد کامل آن را رسم کنید و همهٔ نیروهای خارجی معلوم و مجهول به غیر از نیروها و کوپل‌های قابل شناسایی که بر آن اثر می‌گذارند را نام‌گذاری کنید.

۳. یک دستگاه محور مختصات مرجع مناسب انتخاب کرده و هنگام عملیات ضرب برداری از محورهای راستگرد استفاده کنید. مراکز گشتاورها را انتخاب نموده و در این گزینش به ساده‌بودن محاسبات توجه داشته باشید. به‌طورکلی بهترین نقطه آن است که بیشترین تعداد نیروهای مجهول ممکن از آن بگذرد. اغلب حل هم‌زمان دستگاه معادلات تعادل ضروری است اما با انتخاب آگاهانه و مناسب محورهای مرجع و مراکز گشتاورگیری، می‌توان از آن پرهیز کرد و حل دستگاه را به حداقل رساند.

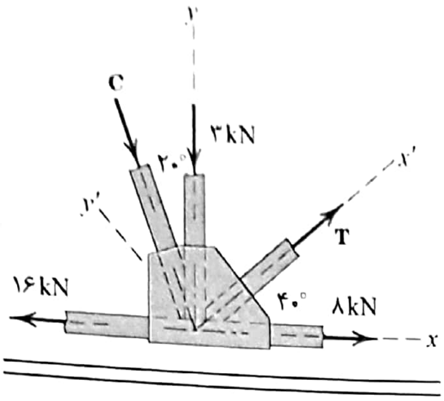
۴. اصول یا معادلات نیرو و گشتاور را که حاکم بر شرایط تعادل مسئله هستند، مشخص و بیان کنید. در مسائل نمونه‌ای که در پیش دارید، این روابط در کروشه و قبل از هر محاسبهٔ مهم آمده‌اند.

۵. در هر مسئله، تعداد معادلات مستقل را با تعداد مجهولات کنترل کنید.

۶. حل را ادامه داده و نتیجه را وارسی کنید. در بسیاری از مسائل مهندسی می‌توان با اولین قیاس قابل قبول، اظهار نظر کرد و براورد نتایج قبلی را در محاسبه پیش‌بینی کرد و سپس مقادیر تخمینی و مقادیری که از محاسبه به‌دست‌آمده را مقایسه و براورد نمود.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۳ مقدار نیروهای C و T را که با سه نیروی دیگر نشان‌داده شده، بر مفصل خرپای پل وارد می‌شوند، تعیین کنید.



حل: در شکل نمودار جسم آزاد مقطع مفصل مجزاشدهٔ مورد نظر و پنج نیرویی که در تعادل هستند نشان داده می‌شود.

حل ۱ (جبر عددی): در سیستم مختصات x-y مطابق شکل داریم

$$[\Sigma F_x = ۰] \qquad ۸+T\cos۴۰^\circ + C\sin۲۰^\circ - ۱۶ = ۰$$
$$۰/۷۶۶T + ۰/۳۴۲C = ۸ \qquad \text{(الف)}$$

$$[\Sigma F_y = ۰] \qquad T\sin۴۰^\circ - C\cos۲۰^\circ - ۳ = ۰$$
$$۰/۶۴۳T - ۰/۹۴۰C = ۳ \qquad \text{(ب)}$$

با ساده‌کردن حل معادلات (الف) و (ب) به‌دست می‌آید

$$T = ۹/۰۹\text{kN} \qquad C = ۳/۰۳\text{kN}$$

ج.

حل ۲ (جبر عددی): برای پرهیز از حل هم‌زمان معادلات، می‌توان از محورهای ❷ x'-y' استفاده نموده و با نوشتن مجموع نیروها در جهت y'، T را حذف کرد. پس

$$[\Sigma F_{y'} = ۰] \qquad -C\cos۲۰^\circ - ۳\cos۴۰^\circ - ۸\sin۴۰^\circ + ۱۶\sin۴۰^\circ = ۰$$
$$C = ۳/۰۳\text{kN}$$

ج.

$$[\Sigma F_{x'} = ۰] \qquad T + ۸\cos۴۰^\circ - ۱۶\cos۴۰^\circ - ۳\sin۴۰^\circ - ۳/۰۳\sin۲۰^\circ = ۰$$
$$T = ۹/۰۹\text{kN}$$

ج.

حل ۳ (جبر برداری): با کمک بردارهای یکهٔ **i** و **j** در دو جهت x و y، مجموع نیروها را برای تعادل برابر با صفر قرار داده و معادلهٔ برداری زیر را به‌دست می‌آوریم

$$[\Sigma \mathbf{F} = ۰] \qquad ۸\mathbf{i} + (T\cos۴۰^\circ)\mathbf{i} + (T\sin۴۰^\circ)\mathbf{j} - ۳\mathbf{j} + (C\sin۲۰^\circ)\mathbf{i}$$
$$-(C\cos۲۰^\circ)\mathbf{j} - ۱۶\mathbf{i} = ۰$$

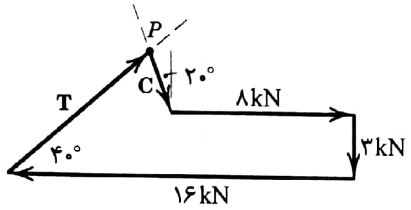
با قراردادن ضرایب بردارهای **i** و **j** برابر با صفر نتیجه می‌شود

$$۸ + T\cos۴۰^\circ + C\sin۲۰^\circ - ۱۶ = ۰$$
$$T\sin۴۰^\circ - ۳ - C\cos۲۰^\circ = ۰$$

که همان معادلات (الف) و (ب) هستند که قبلاً آنها را حل کردیم.

حل ۴ (هندسی): چندضلعی بسته‌ای که مجموع برداری صفر را برای پنج نیرو نشان می‌دهد، در شکل نشان داده شده است. به‌سرعت ملاحظه می‌شود که معادلات (الف) و (ب)، تصاویر بردارها را در امتدادهای x و y می‌دهند. به‌همین‌ترتیب، تصویر بردارها بر جهت‌های x' و y' معادلات موجود در حل ۲ را به‌دست می‌دهند.

حل ترسیمی به‌آسانی انجام می‌شود. بردارهای معلوم را با مقیاس معین رسم می‌کنیم ❸ به‌طوری‌که انتهای یکی به ابتدای دیگری وصل شود و پس از آن **T** و **C** در جهات داده‌شده رسم می‌شوند تا چندضلعی بسته به‌دست آید. با به‌دست آوردن نقطهٔ P محل تقاطع امتدادهای معلوم T و C، حل مسئله به پایان می‌رسد و به این ترتیب می‌توانیم مستقیماً از روی شکل و در حد دقتی که در رسم داشتیم، مقادیر **T** و **C** را به‌دست آوریم.



راهنمایی‌های مفید

❶ از آنجاکه این مسئله دارای نیروهای متقاطع در یک نقطه‌اند، به هیچ معادلهٔ گشتاوری نیاز نیست.

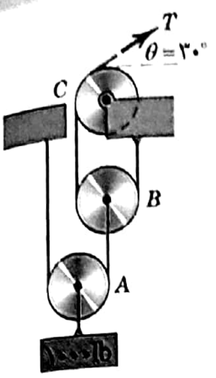
❷ انتخاب محورهای مرجع برای سهولت محاسبه همواره بسیارمهم است. در این مثال می‌توانستیم محورها را در امتداد و عمود بر **C** اختیار کرده و جمع نیروها را در امتداد عمود بر **C** بنویسیم تا آن را حذف کنیم.

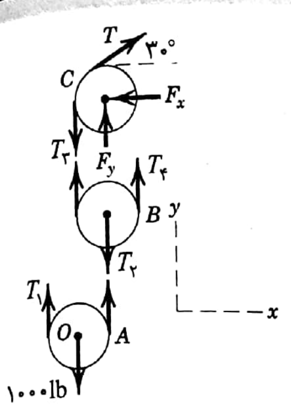
❸ بردارهای معلوم را می‌توان در هر جهت دلخواه جمع کرد، ولی باید جمع بردارهای معلوم قبل از بردارهای مجهول باشد.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۳

در کابلی که بار ۱۰۰۰lb را با چیدمان قرقرهٔ مطابق شکل نگهداری می‌کند، کشش T را محاسبه کنید. هریک از قرقره‌ها می‌توانند آزادانه حول یاتاقان خود دوران کنند و وزن همهٔ اجزا نسبت به بار اعمال شده ناچیز است. مقدار کل نیروی وارد بر یاتاقان قرقرهٔ C را تعیین کنید.





حل: نمودار جسم آزاد هر قرقره نسبت به ارتباط با سایر قسمت‌ها رسم شده است. با قرقرهٔ A که شامل تنها نیروی معلوم است شروع می‌کنیم. شعاع نامعلوم قرقره را r در نظر می‌گیریم. گشتاورهای تعادل حول مرکز O و تعادل نیروها در امتداد قائم ایجاب می‌کند که

❶
$$[\Sigma M_O=۰] \qquad T_۱ r - T_۲ r = ۰ \qquad T_۱ = T_۲$$
$$[\Sigma F_y=۰] \qquad T_۱ + T_۲ - ۱۰۰۰ = ۰ \qquad ۲T_۱ = ۱۰۰۰ \qquad T_۱ = T_۲ = ۵۰۰\text{lb}$$

بنابر مثال قرقرهٔ A، تعادل نیروها روی قرقرهٔ B را با وارسی می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$T_۳ = T_۴ = T_۲/۲ = ۲۵۰\text{lb}$$

برای قرقرهٔ C، زاویهٔ $\theta=۳۰°$، هیچ تأثیری بر گشتاور T نسبت به مرکز قرقره ندارد. از کاربرد معادلهٔ گشتاور برای این قرقره نتیجه می‌شود

$$T = T_۳ \quad \text{یا} \quad T = ۲۵۰\text{lb} \qquad \text{ج.}$$

از تعادل قرقره در امتداد x و y داریم

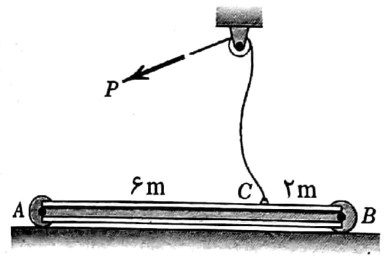
$$[\Sigma F_x=۰] \qquad ۲۵۰\cos ۳۰° - F_x = ۰ \qquad F_x = ۲۱۷\text{lb}$$
$$[\Sigma F_y=۰] \qquad F_y + ۲۵۰\sin ۳۰° - ۲۵۰ = ۰ \qquad F_y = ۱۲۵\text{lb}$$
$$[F=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}] \qquad F=\sqrt{(۲۱۷)^۲+(۱۲۵)^۲} = ۲۵۰\text{lb} \qquad \text{ج.}$$

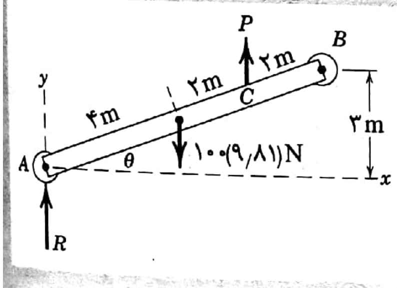
راهنمایی مفید

❶ روشن است که شعاع r اثری در نتایج ندارد. پس از تحلیل یک قرقرهٔ ساده، نتایج را به‌وضوح می‌توان با چشم تشخیص داد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۳

تیر یکنواخت I ـ شکلی به‌جرم ۱۰۰kg، ابتدا بر غلتک‌های انتهایی خود در نقاط A و B متکی است و بر روی یک سطح افقی قرار دارد. به‌وسیلهٔ کابلی در نقطهٔ C می‌خواهند انتهای B را به‌فاصلهٔ ۳m نسبت به نقطهٔ A بالاتر ببرند. کشش لازم P، واکنش در نقطهٔ A، و زاویهٔ θ را که تیر نسبت به سطح افقی پس از بالابردن ایجاد می‌کند معین کنید.





حل: با رسم نمودار جسم آزاد متوجه می‌شویم که واکنش در غلتک A و وزن، نیروهای عمودی‌اند. در نتیجه، در غیاب سایر نیروهای افقی، نیروی P نیز باید عمودی باشد. از مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۳ می‌بینیم که کشش P در کابل برابر کشش کابل P وارد بر تیر در نقطهٔ C است.

تعادل گشتاور در نقطهٔ A نیروی R را از بین برده و داریم

$$[\Sigma M_A=۰] \qquad P(۶\cos\theta) - ۹۸۱(۴\cos\theta) = ۰ \qquad P = ۶۵۴\text{N} \qquad \text{ج.} ❶$$

تعادل نیروها در امتداد قائم ایجاب می‌کند که

$$[\Sigma F_y=۰] \qquad ۶۵۴ + R - ۹۸۱ = ۰ \qquad R = ۳۲۷\text{N} \qquad \text{ج.}$$

زاویهٔ θ تنها به هندسهٔ مشخص‌شدهٔ شکل بستگی دارد و برابر است با

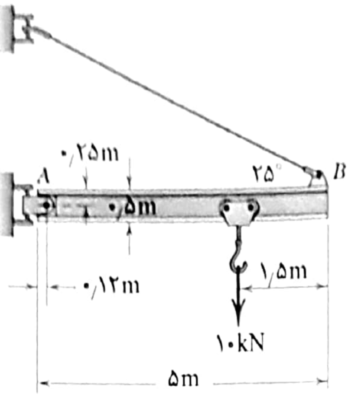
$$\sin\theta = ۳/۸ \qquad \theta = ۲۲٫۰°$$

راهنمایی مفید

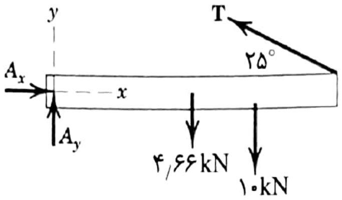
❶ روشن است که تعادل این سیستم نیروهای موازی مستقل از θ است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴.۲

مقدار کشش T در کابل نگهدارنده و مقدار نیرو در پین A جرثقیل سقفی نشان‌داده‌شده را تعیین کنید. طول تیر AB برابر ۰٫۵m و جرم آن ۹۵kg/m است. تکیه‌گاه A مفصلی است.



حل جبری: این ترسیم را می‌توان در صفحهٔ $(x\text{-}y)$ گذرا از مرکز تقارن تیر در نظرگرفت، به‌طوری که مسئله را می‌توان مانند سیستم نیروهای هم‌صفحه تحلیل کرد. نمودار جسم آزاد تیر در شکل نشان داده شده و واکنش پین در نقطهٔ A برحسب دو مؤلفهٔ متعامد بیان شده است. وزن تیر برابر است با $۴٫۶۶\text{kN} = (۹٫۸۱)(۵)(۱۰^{-۳})۹۵$ که بر مرکز تیر وارد می‌شود. توجه کنید که دارای سه مجهول هستیم، A_x، A_y و T که می‌توان با سه معادلهٔ تعادل آنها را به‌دست آورد. با معادلهٔ گشتاور حول نقطهٔ A شروع کرده که دو تا از سه مجهول را از معادله حذف می‌کند. با به‌کاربردن معادلهٔ گشتاور حول نقطهٔ A، ساده‌تر است که گشتاورهای مؤلفه‌های x و y بردار $\mathbf{T}$ را محاسبه کنیم نه اینکه فاصلهٔ عمودی از $\mathbf{T}$ تا A را. پس در جهت پادساعتگرد مثبت داریم ❶



نمودار جسم آزاد

❷

$$[\Sigma M_A = ۰] \qquad (T\cos ۲۵°)۰٫۲۵ + (T\sin ۲۵°)(۵ - ۰٫۱۲)$$
$$-۱۰(۵ - ۱٫۵ - ۰٫۱۲) - ۴٫۶۶(۲٫۵ - ۰٫۱۲) = ۰$$

که از آن داریم ج.

$$T = ۱۹٫۶۱\text{kN}$$

با مساوی صفر قرار دادن جمع نیروها، در امتداد x و y، نتیجه می‌شود

$$[\Sigma F_x = ۰] \qquad A_x - ۱۹٫۶۱\cos ۲۵° = ۰ \qquad A_x = ۱۷٫۷۷\text{kN}$$

$$[\Sigma F_y = ۰] \qquad A_y + ۱۹٫۶۱\sin ۲۵° - ۴٫۶۶ - ۱۰ = ۰ \qquad A_y = ۶٫۳۷\text{kN}$$

$$\left[A = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲}\,\right] \qquad A = \sqrt{(۱۷٫۷۷)^۲ + (۶٫۳۷)^۲} = ۱۸٫۸۸\text{kN}$$ ❸ج.

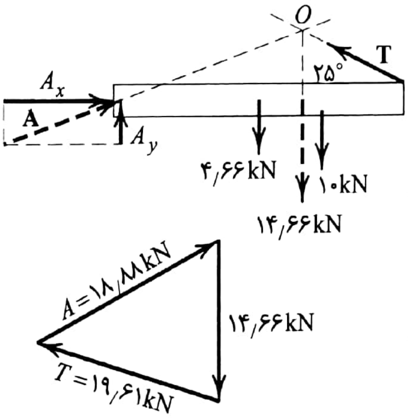
حل ترسیمی: توجه کنید برای اینکه سه نیروی وارد بر جسم در تعادل باشند، باید سه نیرو در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند. با استفاده از اصل بالا برای حل ترسیمی با ترکیب دو نیروی معلوم عمودی ۴٫۶۶kN و ۱۰kN و تبدیل آن به یک نیروی منفرد ۱۴٫۶۶kN که در امتداد نمودار جسم آزاد پایین تیر مطابق شکل نشان داده شده است، مکان این نیروی برایند را می‌توان به‌آسانی به‌طریق ترسیمی یا جبری تعیین کرد. واکنش نیروی ۱۴٫۶۶kN نسبت به خط اثر کشش مجهول $\mathbf{T}$ در نقطهٔ تلاقی آن O معین می‌شود که واکنش پین در نقطهٔ $\mathbf{A}$ باید از آن عبور کند. حال می‌توان مقدار اندازهٔ $\mathbf{T}$ و $\mathbf{A}$ را با جمع نیروها از یک سر به انتهای دیگر برای تشکیل یک چندضلعی بستهٔ تعادل نیروها به‌دست آورد، و بنابراین شرط صفر بودن جمع بردارها نیز برآورده می‌شود. پس از ترسیم نیروی قائم با یک مقیاس مناسب، که در پایین‌ترین شکل نشان داده شده است، خطی که جهت کشش $\mathbf{T}$ را نشان می‌دهد، از نوک بردار ۱۴٫۶۶kN رسم می‌کنیم. به‌همین‌ترتیب، از انتهای بردار نمایندهٔ بردار ۱۴٫۶۶kN، خطی به‌موازات امتداد نیروی $\mathbf{A}$ (واکنش پین) رسم می‌کنیم تا تقاطع سه‌بردار براساس نمودار جسم آزاد، تعیین شود. محل برخورد خط‌های نشان‌دهندهٔ بردارهای $\mathbf{T}$ و $\mathbf{A}$، مقادیر مورد نیاز T و A را برای اینکه جمع برداری نیروها صفر شوند به‌دست می‌دهند. این مقادیر از روی نمودار و با توجه به مقیاس آن به‌دست می‌آیند. مؤلفه‌های x و y نیروی $\mathbf{A}$ را می‌توان بر روی چندضلعی نیروها نشان داد.

راهنمایی‌های مفید

❶ این مرحله را می‌توان با توجه به قضیهٔ وارینون که در بخش ۴.۲ تشریح شد، توجیه کرد. برای استفاده از مزیت کامل این اصل همیشه آماده باشید.

❷ برای محاسبهٔ گشتاور در مسائل دوبعدی معمولاً بهتر است از روش جبر عددی استفاده شود و در مسائل سه‌بعدی از ضرب برداری $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$.

❸ جهت نیرو در A را درصورت لزوم می‌توان به‌آسانی تعیین کرد. البته برای طراحی پین A، یا هنگام وارسی مقاومت آن، تنها اندازهٔ نیرو اهمیت دارد.



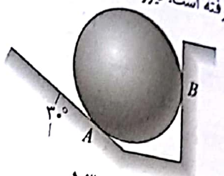
حل ترسیمی

Scanned by CamScanner

مسائل

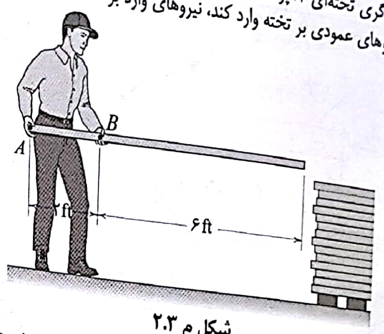
مسائل مقدماتی

۱.۳ کرهٔ همگن صاف ۵۰ کیلوگرمی روی سطح مایل ۳۰° در نقطهٔ A ساکن، و در برابر دیوار قائم B قرارگرفته است. نیروهای تماس نقاط A و B را محاسبه کنید.



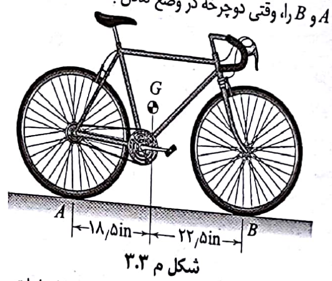
شکل م ۱.۳

۲.۳ دروددگری تختهٔ ۱۲پوندی ۴×۲ اینچی را مطابق شکل نگه‌داشته است. اگر دروددگر نیروهای عمودی بر تخته وارد کند، نیروهای وارد بر نقاط A و B را تعیین کنید.



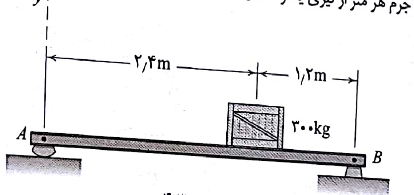
شکل م ۲.۳

۳.۳ وزن دوچرخه‌ای ۲۹lb است که بر مرکز جرم آن نقطهٔ G وارد می‌شود. نیروهای عمودی در نقاط A و B را، وقتی دوچرخه در وضع تعادل باشد، معین کنید.



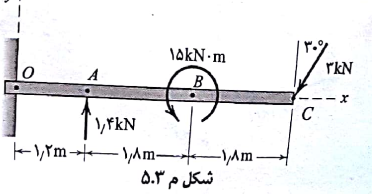
شکل م ۳.۳

۴.۳ جرم هر متر از تیری یکنواخت ۵۰kg است. واکنش تکیه‌گاه‌ها را تعیین کنید.



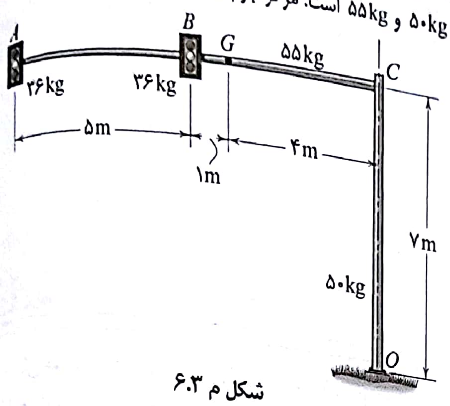
شکل م ۴.۳

۵.۳ تیر یکنواخت ۵۰۰ کیلوگرمی مطابق شکل تحت تأثیر سه بار خارجی قرارگرفته است واکنش تکیه‌گاه در نقطهٔ O را محاسبه کنید. (صفحهٔ x-y قائم است.)



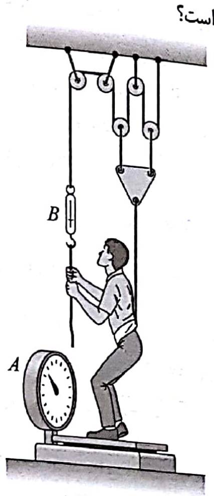
شکل م ۵.۳

۶.۳ واکنش‌های نیرو و گشتاور را در پایهٔ پیچی O از مجموعهٔ چراغ راهن
محاسبه کنید. وزن هر چراغ راهنمایی ۳۶kg و وزن عضوهای OC و
به‌ترتیب ۵۰kg و ۵۵kg است. مرکز جرم AC، نقطهٔ G است.



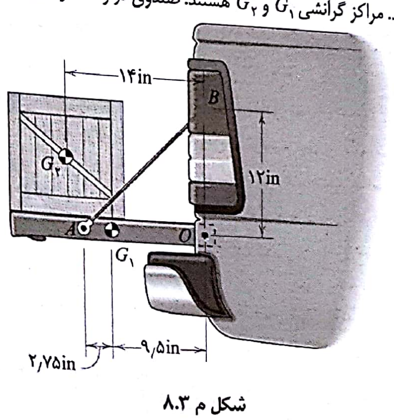
شکل م ۶.۳

۷.۳ یک دانشجوی مکانیک می‌خواهد وزنش را اندازه‌گیری کند، اما تنها دستر
یک اندازه‌گیر A با ظرفیت محدود ۱۰۰lb و یک فنر کوچک اندازه‌گیر ۲۰ پون
برای اندازه‌گیری دارد. او با حلقهٔ نشان‌داده‌شده متوجه شد که وقتی قرقره‌ای
طناب وصل کند، آن‌وقت B اندازهٔ ۱۹lb، و درجهٔ A اندازهٔ ۶۷lb را نشان می
مقدار صحیح وزن او چقدر است؟



شکل م ۷.۳

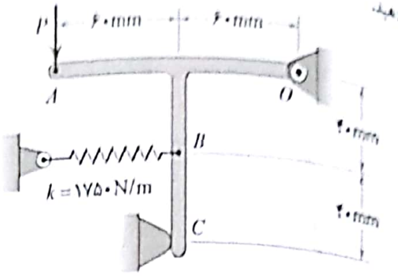
۸.۳ روی درب عقب وانتی به‌جرم ۶۰lb، صندوقی به‌جرم ۱۲۰lb قرار گرفته ا
کشش T در هریک از دو کابل نگهدارنده‌ای که یکی از آنها در شکل دیده می‌ش
محاسبه کنید. مراکز گرانشی G_1 و G_2 هستند. صندوق در وسط دو کابل واقع شده



شکل م ۸.۳

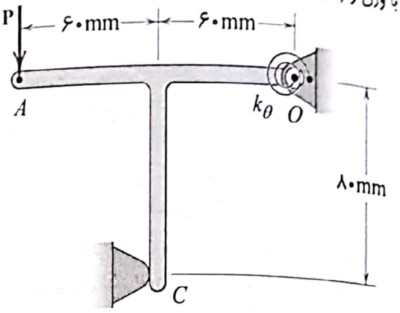
Scanned by CamScanner

۹.۳ وقتی جسمی ۵٫۰ کیلوگرمی در وضع نشان‌داده‌شده قرار گرفته، طول فنر از حالت آزاد به‌اندازهٔ ۱۰mm متراکم شده است. نیروی P لازم را برای آنکه در نقطهٔ C تماس قطع شود، پیدا کنید. محاسبات خود را (الف) همراه با وزن و (ب) با نادیده‌گرفتن وزن انجام دهید.



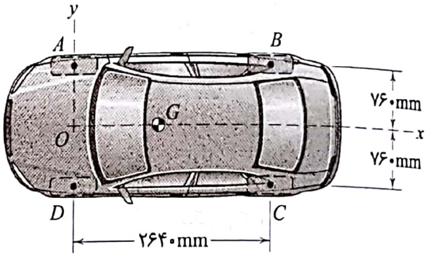
شکل م ۹.۳

۱۰.۳ وقتی جسمی ۰٫۵ کیلوگرمی در وضع نشان‌داده‌شده قراردارد، فنر پیچشی در نقطهٔ O لازم است تا گشتاور ساعتگردی معادل ۰٫۷۵N·m بر جسم وارد کند. نیروی P لازم را برای آنکه در نقطهٔ C تماس قطع شود، پیداکنید. محاسبات خود را (الف) همراه با وزن و (ب) با نادیده‌گرفتن وزن، انجام دهید.



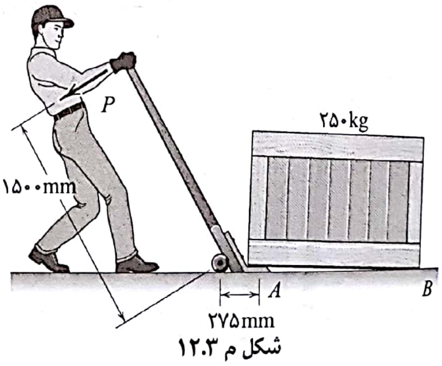
شکل م ۱۰.۳

۱۱.۳ اتومبیلی روی زمین روی چهار چرخ به‌طور مجزا قرار گرفته است. اندازه‌گیر درجهٔ فشار، درجهٔ فشار هوا در هریک از چرخ‌های جلو را ۴۴۵۰N و هریک از چرخ‌های عقب را ۲۹۵۰N نشان می‌دهد. مختصهٔ x، مرکز جرم G و جرم کل اتومبیل را تعیین کنید.



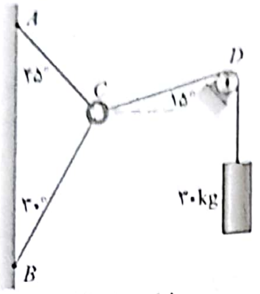
شکل م ۱۱.۳

۱۲.۳ مقدار نیروی لازم P برای بالابردن انتهای یک صندوق ۲۵۰ کیلوگرمی را با اهرمی مطابق شکل تعیین کنید.



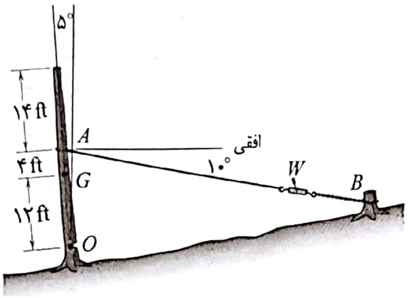
شکل م ۱۲.۳

۱۳.۳ سه کابل با هم به حلقهٔ C متصل شده‌اند. کشش در کابل‌های AC و BC را که سبب نگهداری استوانه‌ای به‌وزن ۳۰kg شده‌اند تعیین کنید.



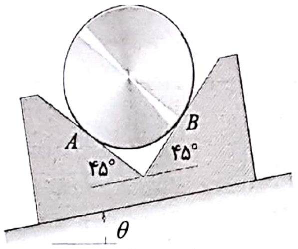
شکل م ۱۳.۳

۱۴.۳ چوب‌بری می‌خواهد تنهٔ درختی که به‌سمت پایین شیب متمایل است، پس از قطع، به‌طرف بالای آن بیفتد. بدین‌منظور او از وینچ W استفاده می‌کند. کشش لازم T در کابل را تعیین کنید. وزن تنهٔ درخت ۱۲۰۰lb و مرکز گرانی آن در نقطهٔ G است. شکافی به‌اندازهٔ کافی بزرگ در نقطهٔ O وجود دارد، به‌طوری‌که مقاومت گشتاور در این حال ناچیز می‌باشد.



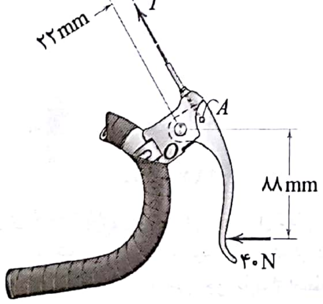
شکل م ۱۴.۳

۱۵.۳ زاویهٔ شیب θ را نسبت به افق طوری پیدا کنید که نیروی تماس در نقطهٔ B برابر با نصف آن در نقطهٔ A در برابر استوانهٔ صیقلی باشد.



شکل م ۱۵.۳

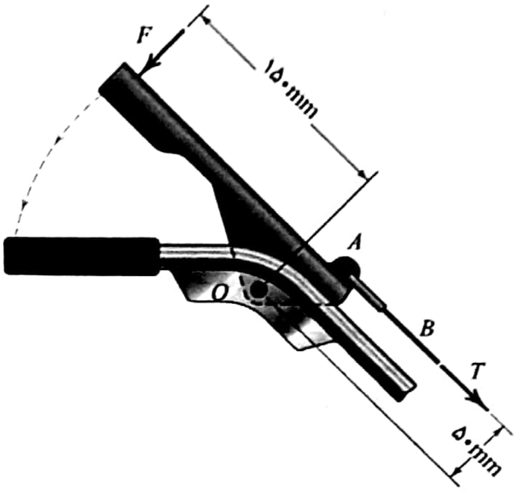
۱۶.۳ دوچرخه‌سواری مطابق شکل، نیروی ۴۰N را به اهرم ترمز دوچرخه وارد می‌کند. کشش متناظر T انتقال‌یافته به کابل ترمز را تعیین کنید. از اصطکاک محور O چشم‌پوشی کنید.



شکل م ۱۶.۳

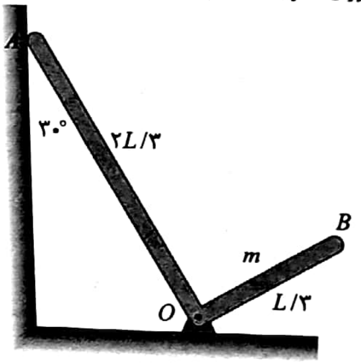
Scanned by CamScanner

۱۷.۳ اهرم نشان‌داده‌شده ماریپچ‌های برف‌روب را تنظیم می‌کند. اگر برای شروع چرخش اهرم حول محور ایده‌آل نقطهٔ O نیروی $F = 30\text{N}$ احتیاج باشد، کشش نظیر T در کابل کنترل AB و مقدار واکنش پین در نقطهٔ O را تعیین کنید. از وزن اهرم صرف‌نظر کنید.



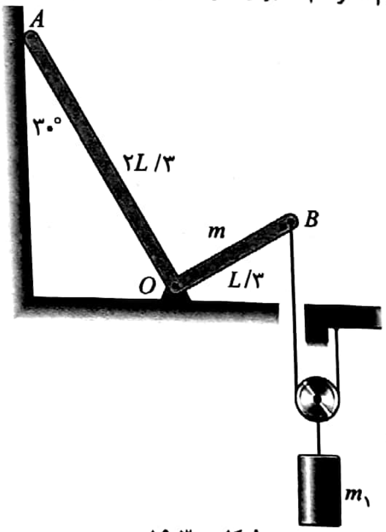
شکل م ۱۷.۳

۱۸.۳ میلهٔ بلند یکنواخت با زاویهٔ قائم AOB دارای جرم m است. اگر اصطکاک در محور O ناچیز باشد، مقدار نیروی عمودی در A و مقدار واکنش در نقطهٔ O را تعیین کنید.



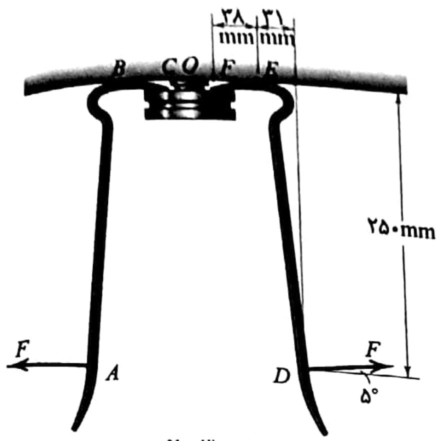
شکل م ۱۸.۳

۱۹.۳ کمترین جرم استوانهٔ m_1 برای جلوگیری از قطع تماس در نقطهٔ A را تعیین کنید.



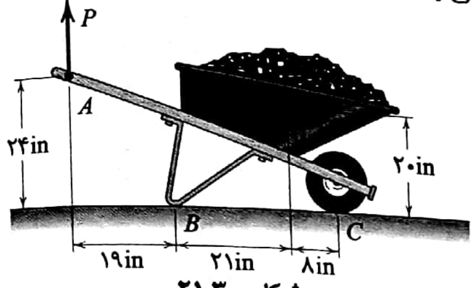
شکل م ۱۹.۳

۲۰.۳ نیروی محوری 700N برای برداشتن قرقره از میل‌گردان لازم است. چه‌مقدار نیروی F باید بر دستهٔ هریک از دو اهرم وارد کرد؟ اصطکاک در نقاط تماس B و E به اندازهٔ کافی برای جلوگیری از اصطکاک لغزشی وجود دارد. از اصطکاک در نقاط تماس C و F با قرقره صرف‌نظر کنید.



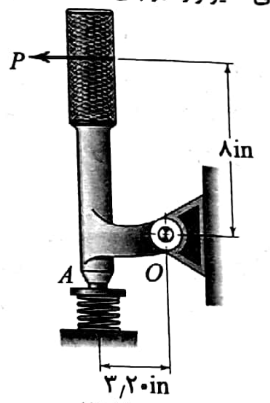
شکل م ۲۰.۳

۲۱.۳ چه‌مقدار نیروی عمودی P برای بلندکردن چرخ‌دستی از زمین در نقطهٔ B لازم است. وزن چرخ و بار برابر 240lb است که بر نقطهٔ G وارد می‌شود.



شکل م ۲۱.۳

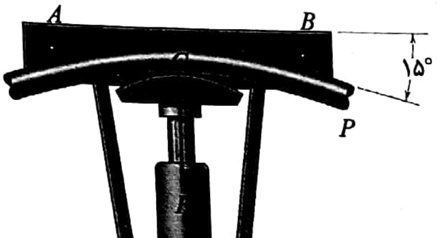
۲۲.۳ نیروی P بر دستهٔ اهرم سبب می‌شود که در فنر لوله‌ای مطابق شکل، نیروی برابر 60lb وارد شود. نیروی نظیر وارد بر پین در نقطهٔ O روی اهرم را تعیین کنید.



شکل م ۲۲.۳

مسائل برگزیده

۲۳.۳ مطابق شکل، لولهٔ P در حال خم‌شدن توسط لوله‌خم‌کن است. اگر سیلندر هیدرولیکی نیرویی برابر $F = 24\text{kN}$ بر لوله در نقطهٔ C وارد کند، اندازهٔ واکنش‌های غلتک‌ها در نقطهٔ A و B را تعیین کنید.

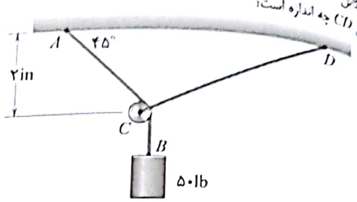


شکل م ۲۳.۳

Scanned by CamScanner

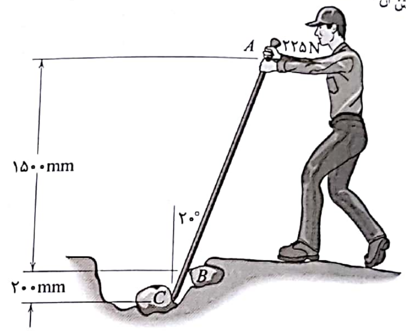
تعادل

۲۴.۳ کابل AB بدون تغییر در کشش آن، از روی قرقرهٔ کوچک C عبور می‌کند. چه طول از کابل CD برای تعادل استاتیکی در وضعیت نشان‌داده‌شده لازم است؟ کشش در کابل CD چه اندازه است؟



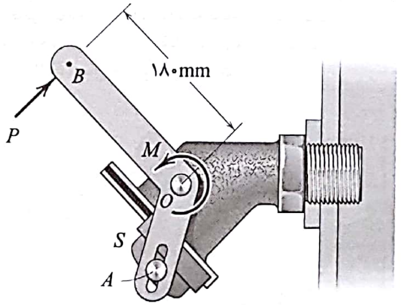
شکل م ۲۴.۳

۲۵.۳ شخصی در حین حفر سوراخی کوچک برای کاشتن یک درخت در خانه، با چند قطعه سنگ روبه‌رو می‌شود. اگر یک نیروی افقی برابر با ۲۲۵N مطابق شکل بر دیلم وارد کند، نیروی افقی واردشده بر قطعه‌سنگ C چقدر است؟ توجه داشته باشید که لبهٔ کوچک قطعه‌سنگ C تکیه‌گاه نیروی واکنش عمودی است. از اصطکاک در نقطهٔ B صرف‌نظر کنید. (الف) با در نظر گرفتن وزن ۱۸kg دیلم یکنواخت و (ب) بدون در نظر گرفتن آن مسئله را حل کنید.



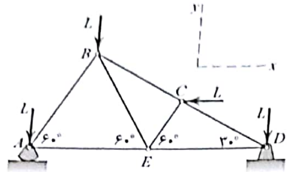
شکل م ۲۵.۳

۲۶.۳ اجزای یک شیر سیال مقاوم مطابق شکل نشان داده شده است. وقتی عضو OB حول محور ثابت O، تحت تأثیر نیروی P در جهت ساعتگرد دوران می‌کند، جزء S آزادانه به‌سمت بالای شکاف می‌لغزد و مایع به‌راحتی خارج می‌شود. اگر فنر پیچشی داخلی گشتاوری برابر $M = ۲۰\text{N}\cdot\text{m}$ را وارد کند، نیروی لازم P برای بازکردن دریچه را تعیین کنید. از تمام نیروهای اصطکاک صرف‌نظر کنید.



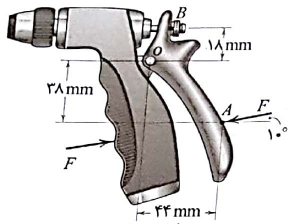
شکل م ۲۶.۳

۲۷.۳ خرپای سادهٔ نامتقارن مطابق شکل بارگذاری شده است. واکنش در نقاط A و D را تعیین کنید. از وزن سازه نسبت به بار واردشده صرف‌نظر کنید. آیا اطلاع از اندازهٔ سازه ضروری است؟



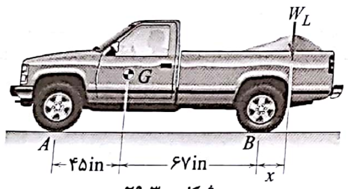
شکل م ۲۷.۳

۲۸.۳ برای بازکردن پیستون فنری سر لولهٔ آب‌پاش، نیروی محوری ۳۵N در نقطهٔ B لازم است. نیروی F لازم وارد بر دسته در نقطهٔ A و مقدار واکنش پین در نقطهٔ O را تعیین کنید. توجه کنید که این پیستون از سوراخی در نقطهٔ B که در راستای قائم امتداد یافته است می‌گذرد، به‌طوری‌که نیروی عمودی ناچیز در آن تغییر مکان می‌یابد.



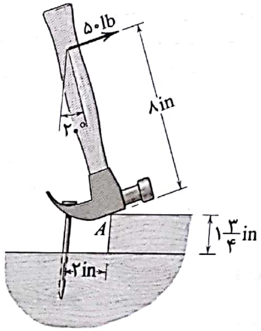
شکل م ۲۸.۳

۲۹.۳ مرکز جرم وانت‌بار ۳۶۰۰ پوندی برای شرایط بدون بار در شکل نشان داده شده است. اگر مرکز جرم باری که به وانت اضافه می‌شود $x = ۱۶\text{in}$ عقب‌تر از محور چرخ‌های عقب باشد، وزن بار W_L را طوری تعیین کنید که نیروهای عمودی زیر چرخ‌های جلو و عقب برابر باشند.



شکل م ۲۹.۳

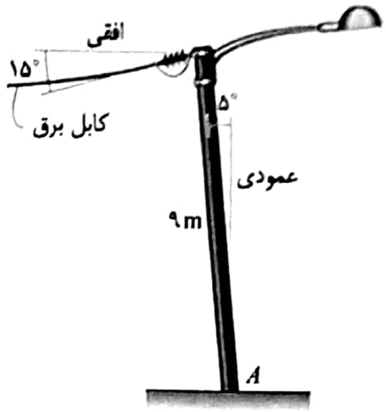
۳۰.۳ قطعه‌ای زیر تکیه‌گاه چکشی مطابق شکل قرار داده شده، و بیرون‌کشیدن میخ را بسیار آسان می‌کند. اگر برای بیرون کشیدن میخ به نیروی کششی ۵۰lb بر دستهٔ چکش لازم باشد، نیروی کشش T در میخ و اندازهٔ نیروی وارد بر نقطهٔ A که دستهٔ چکش بر قطعه اعمال می‌کند را محاسبه کنید. سطح تماس در نقطهٔ A به‌حدی زبر است که از لغزیدن آن جلوگیری می‌کند.



شکل م ۳۰.۳

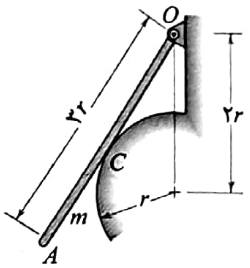
Scanned by CamScanner

۳۱.۳ به‌دلیل بارگذاری طولانی‌مدت ناشی از کشش ۹۰۰N کابل برق، تیر یکنواخت چراغ برق به‌میزان °۵ منحرف شده است. اگر جرم یکای طول تیر چراغ‌برق ۹ متری برابر ۲۴kg/m و جرم تجهیزات روشنایی ناچیز باشد، واکنش‌ها در تکیه‌گاه زمینی A را تعیین کنید.



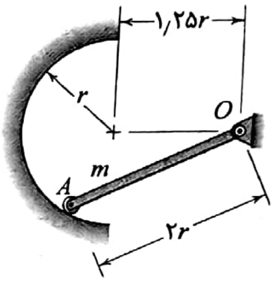
شکل م ۳۱.۳

۳۲.۳ میلهٔ بلند یکنواختی به‌طول ۳r و جرم m روی سطح کروی مطابق شکل قرار دارد. نیروی عمودی در نقطهٔ تماس C و مقدار واکنش در محور O را تعیین کنید.



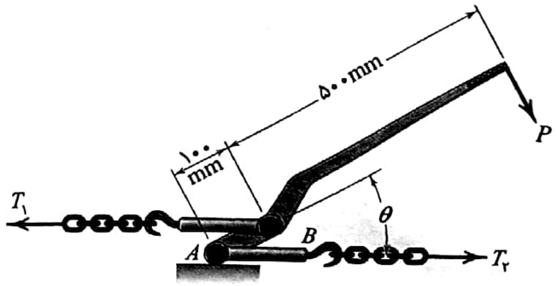
شکل م ۳۲.۳

۳۳.۳ میلهٔ باریک یکنواخت به‌طول ۲r و جرم m روی سطح کروی مطابق شکل قرار گرفته است. نیروی قائم در غلتک A و مقدار واکنش محور در O را تعیین کنید.



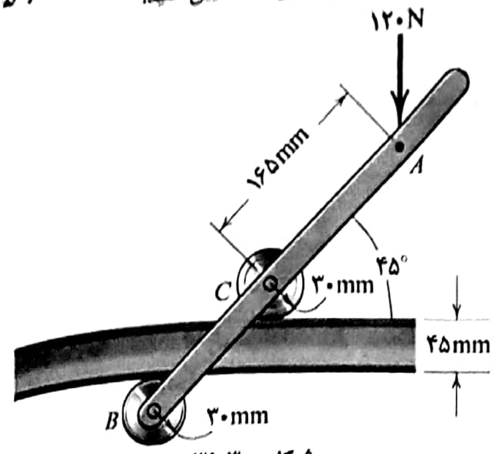
شکل م ۳۳.۳

۳۴.۳ از گیرهٔ زنجیری زیر برای محکم نگه‌داشتن محموله‌هایی همچون تنهٔ درخت، الوار، لوله و غیره در کنار یکدیگر استفاده می‌شود. اگر در $\theta = 30°$، کشش T_1 مساوی ۲kN باشد، نیروی مورد نیاز P وارد بر دستهٔ اهرم و نیز کشش متناظر T_2 را در این وضعیت تعیین کنید. فرض کنید که سطح زیر A کاملاً صاف است.



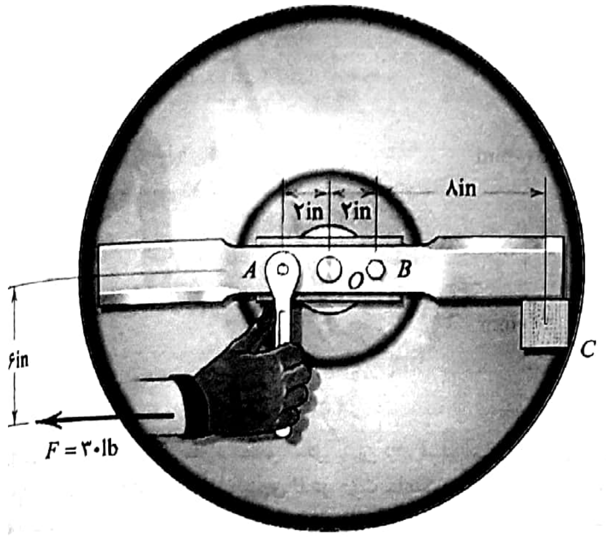
شکل م ۳۴.۳

۳۵.۳ از وسیلهٔ نشان‌داده‌شده برای اعمال فشار در هنگام رویه‌کوبی در دو سوی میز استفاده می‌شود. اگر نیرویی برابر ۱۲۰N بر دسته وارد شود، نیرویی را که هریک از غلتک‌ها بر سطح مربوط به خود وارد می‌کند، تعیین کنید.



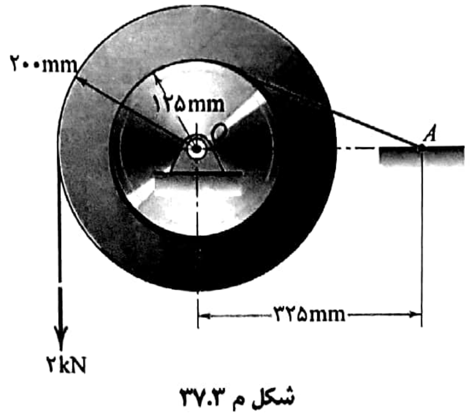
شکل م ۳۵.۳

۳۶.۳ مکانیکی یک تیغهٔ دستگاه چمن‌زنی را که به‌تازگی تیز شده است، دوباره نصب می‌کند. قطعه چوب گوه‌ای در نقطهٔ C از چرخش تیغه در لحظهٔ اعمال نیروی ۳۰lb دستهٔ آچار جلوگیری می‌کند. تیغه به نگهدارندهٔ متصل به محور O موتور پیچ شده، پیچ‌ها از تیغه و نگهدارنده عبور می‌کنند. نیروی عمودی در C را تعیین کنید. فرض خود را بیان کنید. آیا نصب پیچ B حائز اهمیت است؟



شکل م ۳۶.۳

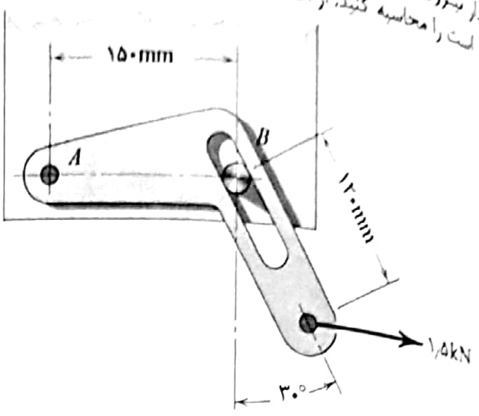
۳۷.۳ دو قرقرهٔ سبک را با هم محکم می‌کنیم به‌طوری‌که حکم واحد دارند. کابلی محکم دور قرقرهٔ کوچکتر پیچیده‌شده و به نقطهٔ A محکم است از چرخش قرقره حول یاتاقان O جلوگیری می‌کند. مقدار نیروی R را که توسط یاتاقان برای اعمال بار ۲kN بر نقطهٔ O اعمال می‌شود، محاسبه کنید.



شکل م ۳۷.۳

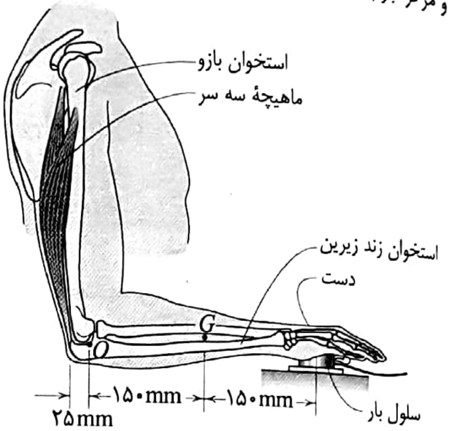
Scanned by CamScanner

۳۸.۳ مقدار نیروی تکیه‌گاهی که بر پین در نقطهٔ A وارد شده و تحت تأثیر بار ۱/۸kN است را محاسبه کنید. از اصطکاک در شکاف صرف‌نظر کنید.



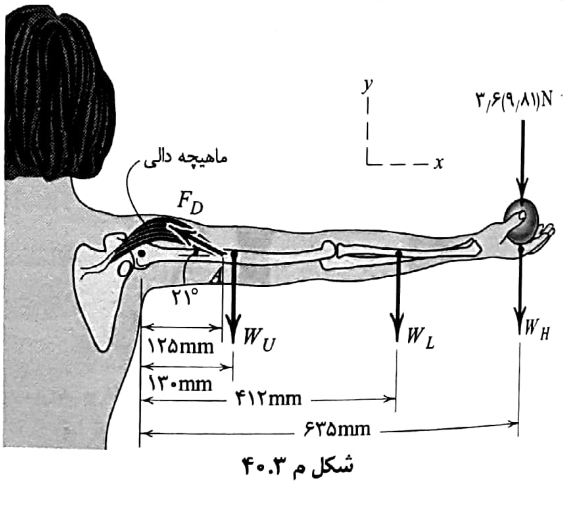
شکل م ۳۸.۳

۳۹.۳ در جریان ارزیابی مقاومت ماهیچهٔ سه‌سر، شخصی با کف دست چپ خود، مطابق شکل سلول بار را فشار می‌دهد. اگر سلول بار ۱۶۰ نیوتن را نشان دهد، نیروی کششی عمودی F ایجاد شده توسط ماهیچهٔ سه‌سر را تعیین کنید. جرم پایین بازو ۱/۵kg و مرکز جرم آن در نقطهٔ G است. فرضیات خود را بیان کنید.



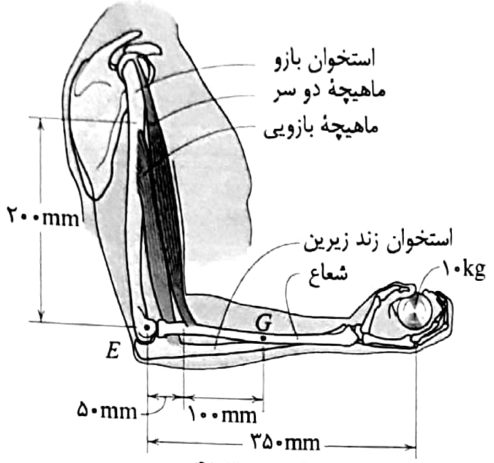
شکل م ۳۹.۳

۴۰.۳ شخصی مطابق شکل درحالی‌که ساعد و بازویش در امتداد افق است، کره‌ای به‌جرم ۳/۶kg را در دست راستش نگه‌داشته است. یک نیروی کششی در ماهیچهٔ شانه مانع چرخش بازو حول مفصل O شانه می‌گردد. این نیرو تحت زاویهٔ ۲۱° وارد می‌شود. نیروی وارد شده توسط ماهیچه در نقطهٔ A بر بازوی او و نیز مؤلفه‌های x و y نیروی واکنش در مفصل O را معین کنید. جرم بالای بازو m_U =۱/۹kg، جرم پایین بازو m_L =۱/۱kg و جرم دست m_H =۰/۴kg است. همهٔ وزن‌های نظیر در مکان‌های نشان‌داده‌شده در شکل وارد می‌شوند.



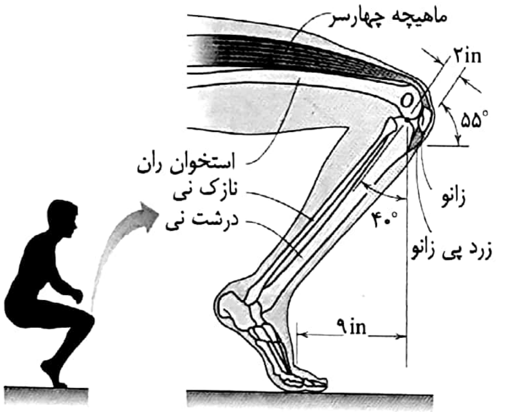
شکل م ۴۰.۳

۴۱.۳ مطابق شکل شخصی با آهسته بالاآوردن وزنهٔ ۱۰ کیلوگرمی بازوی خود را منقبض می‌کند. مجموعهٔ ماهیچه‌های بازو (ماهیچهٔ دوسر و ماهیچهٔ بازویی) در این تمرین مهم‌ترین نقش را دارند. مقدار F نیروی مجموعهٔ ماهیچه‌های بازو و نیز اندازهٔ E واکنش مفصل آرنج در نقطهٔ E را وقتی ساعد در موقعیت نشان داده شده است، تعیین کنید. به‌کمک ابعاد مشخص‌شده روی شکل، نقاط مؤثر کاربرد دو مجموعهٔ ماهیچه را تعیین کنید. این نقاط عبارت‌اند از: ۲۰۰mm مستقیماً بالای E و ۵۰mm مستقیماً در سمت راست E. وزن ساعد را ۱/۵kg در نظر بگیرید که در نقطهٔ G وارد می‌شود. فرضیات خود را بیان کنید.



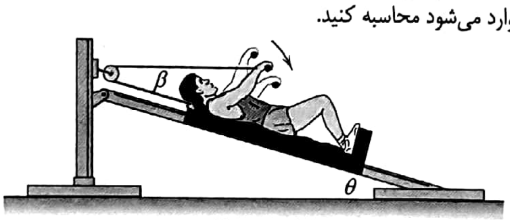
شکل م ۴۱.۳

۴۲.۳ مطابق شکل، مردی درحالی‌که وزن W او به‌طور مساوی روی دو پایش توزیع شده است، به‌آهستگی از حالت چمباتمه بلند می‌شود. نیروی کششی F در زردپی زانوی مرد و نیز مقدار نیروی واکنش در نقطهٔ O را که ناحیهٔ تماس بین درشت‌نی و استخوان ران است، تعیین کنید. توجه کنید خط اثر نیروی زردپی زانو در امتداد تار میانی آن است. از وزن ساق پا صرف‌نظر کنید.



شکل م ۴۲.۳

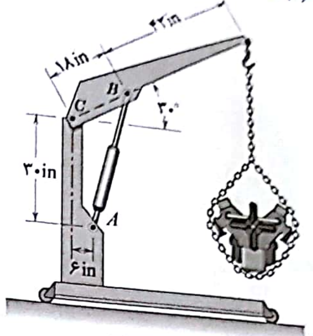
۴۳.۳ یک دستگاه تمرین بدن‌سازی متشکل از یک تشک کشویی سبک که به غلتک‌هایی سوار است، می‌تواند آزادانه در امتداد سطح شیبدار حرکت کند. دو رشته کابل به‌گونه‌ای به سکوی متحرک وصل‌اند که انتهای هر رشته در یک دست قرار می‌گیرد. اگر دست‌ها طوری حرکت کنند که کابل‌ها موازی باشند و هر کابل کاملاً در یک صفحهٔ قائم قرار داشته باشد، نیروی P واردشده توسط هر دست بر کابل مربوطه را به‌گونه‌ای تعیین کنید که موجب حفظ حالت تعادل شود. جرم شخص ۷۰kg، زاویهٔ شیب θ برابر ۱۵° و زاویهٔ β برابر ۱۸° است. درضمن نیروی R را که از سطح شیبدار بر تشک وارد می‌شود محاسبه کنید.



شکل م ۴۳.۳

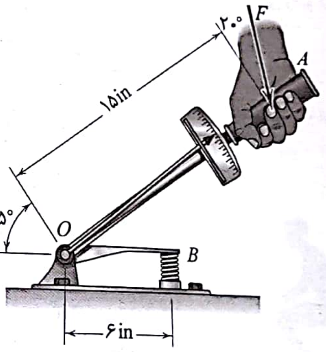
Scanned by CamScanner

۴۴.۳ جرثقیل متحرکی در یک کارگاه مکانیکی در حال بالابردن موتور ۲۲۰ پوندی است. برای وضعیت نشان‌داده‌شده، اندازهٔ نیروی تکیه‌گاهی توسط پین در نقطهٔ C را حساب کرده و [illegible] بر روی پیستون به‌قطر ۳٫۲in سیلندر هیدرولیک AB را تعیین کنید.



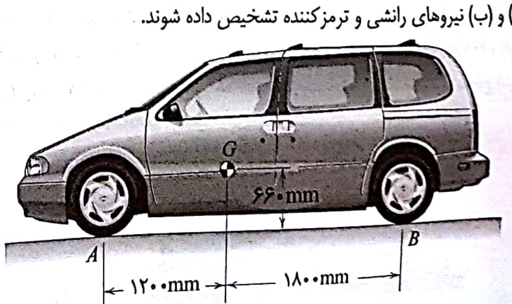
شکل م ۴۴.۳

۴۵.۳ ابزار نشان‌داده‌شده، در آزمایش فنرهای سوپاپ اتومبیل به‌کار می‌رود. آچار پیچشی مستقیماً به بازوی OB متصل می‌شود. مشخصات فنی سوپاپ بنزین به‌گونه‌ای است که نیروی ۸۳lb می‌تواند طول آن را از ۲in (در حالت آزاد) به $1\frac{11}{16}$in کاهش دهد. مقدار M که روی آچار پیچشی خوانده می‌شود و نیز مقدار نیروی F را که باید بر دستهٔ آچار اعمال کرد تا این مقدار M خوانده‌شود، چقدر است؟ از تغییرات زاویه‌ای بازوی OB که بسیار ناچیز است صرف‌نظر کنید.



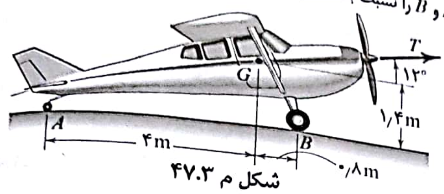
شکل م ۴۵.۳

۴۶.۳ نیروهای عمودی جفت چرخ‌های جلو و عقب اتومبیل با چهار چرخ محرکه به‌جرم ۱۶۰۰kg را حساب کنید. سپس محاسبات خود را در حالت‌های زیر تکرار کنید:
(الف) در زمان بالارفتن از شیب ۱۰ درصد با سرعت ثابت و (ب) در زمان پایین‌آمدن از شیب ۱۰ درصد با سرعت ثابت. درصد تغییرات n_A و n_B نیروهای عمودی محاسبه‌شده را نسبت به مقادیر اسمی حساب کنید. توجه داشته باشید که در حالت‌های (الف) و (ب) نیروهای رانشی و ترمزکننده تشخیص داده شوند.



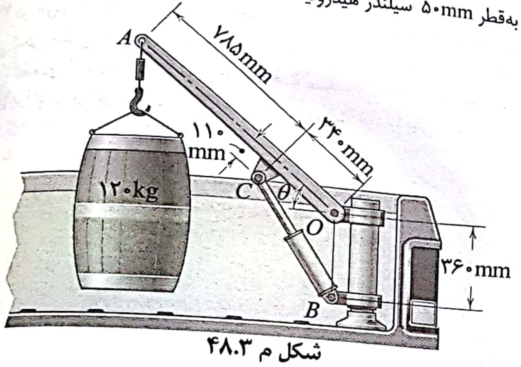
شکل م ۴۶.۳

۴۷.۳ در طول آزمایش موتور بر روی زمین، نیروی جلوبرندهٔ $T = ۳۰۰۰N$ بر هواپیمای ۱۸۰۰ کیلوگرمی با مرکز گرانی G وارد می‌شود. چرخ‌های اصلی در نقطهٔ B قفل شده و نمی‌توانند حرکت کنند. چرخ عقب کوچک در نقطهٔ A آزاد است. درصد تغییر n در نیروهای عمودی در A و B را نسبت به مقادیر آنها به هنگامی‌که "موتور خاموش" است، محاسبه کنید.



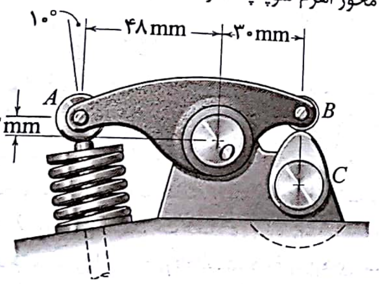
شکل م ۴۷.۳

۴۸.۳ جرثقیل کوچکی در یک سمت پشت کامیون در وضعیت $\theta=۴۰°$ قرارگرفته‌است. مقدار نیروی واردشده بر پین در O و درصد فشار روغن P در برابر پیستونی به‌قطر ۵۰mm سیلندر هیدرولیک BC را تعیین کنید.



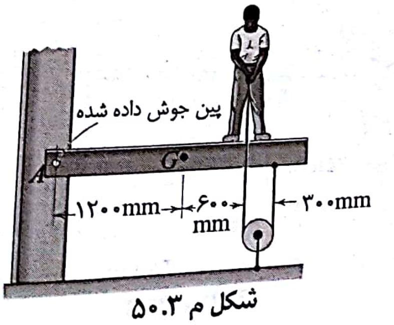
شکل م ۴۸.۳

۴۹.۳ اهرم سوپاپ با غلتک‌هایی در نقطهٔ A و B در وضعیتی که دریچهٔ سوپاپ باز و فنر دریچه کاملاً متراکم است، نشان داده شده است. در این حال نیروی فنر ۹۰۰N می‌باشد. نیرویی که اهرم بر میل سوپاپ C وارد می‌کند را تعیین کنید. همچنین اندازهٔ نیروی واردشده از محور اهرم سوپاپ O را محاسبه کنید.



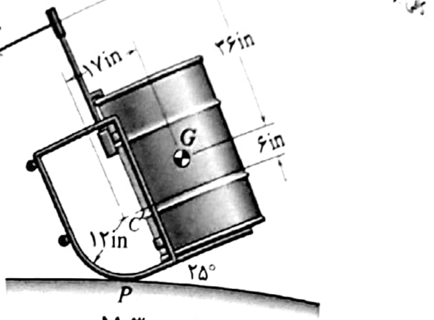
شکل م ۴۹.۳

۵۰.۳ تیر فولادی ۲۰۰kg با مرکز گرانی G نسبت به ستون قائم متصل به پین A است. این پین با تیر فولادی و ستون قائم جوش داده شده است. برای امتحان جوش، شخصی به‌وزن ۸۰kg با واردکردن نیروی ۳۰۰N بر طنابی که از سوراخی در تیر فولادی عبور کرده است، مطابق شکل آن را بارگذاری می‌کند. کوپل M را که جهت نگهداری پین به‌کاررفته محاسبه کنید.



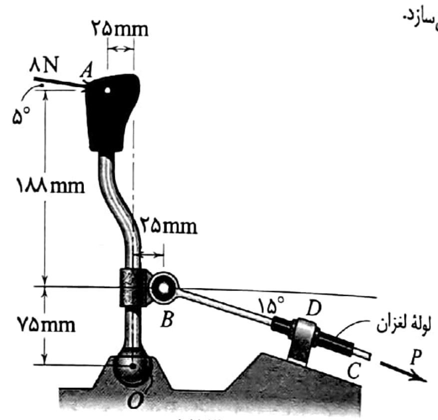
شکل م ۵۰.۳

۵۱.۳ ارابهٔ نشان‌داده‌شده برای بلندکردن بشکه‌های ۵۵ گالنی مناسب است. نیروی F مورد نیاز برای نگهداشتن بشکه در موقعیت نشان‌داده‌شده را تعیین کنید. می‌توانید از وزن ارابه در مقایسه با وزن ۵۰۰lb بشکه با مرکز گرانی G، صرف‌نظر کنید. اصطکاک کافی برای پیشگیری از لغزیدن در نقطهٔ تماس P وجود دارد.



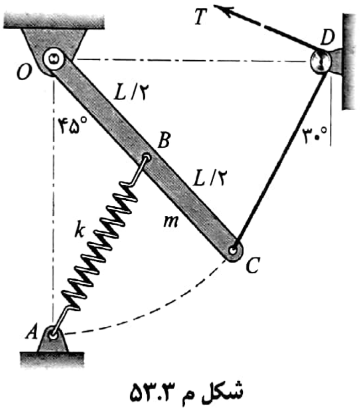
شکل م ۵۱.۳

۵۲.۳ بخشی از سازوکار تعویض دندهٔ اتومبیلی با جعبه‌دندهٔ معمولی در شکل نشان داده شده است. برای نیروی ۸ نیوتنی واردشده بر دستهٔ دنده، نیروی متناظر P را که میلهٔ BC بر جعبه‌دنده (در شکل نشان‌داده‌شده) اعمال می‌کند، تعیین کنید. از اصطکاک در مفصل کاسه-ساچمه‌ای O، در مفصل B، و در لولهٔ لغزان نزدیک تکیه‌گاه D صرف‌نظر کنید. یادآور می‌شود که بوش لاستیکی نقطهٔ D، هم‌راستایی لوله را با اتصال BC برقرار می‌سازد.



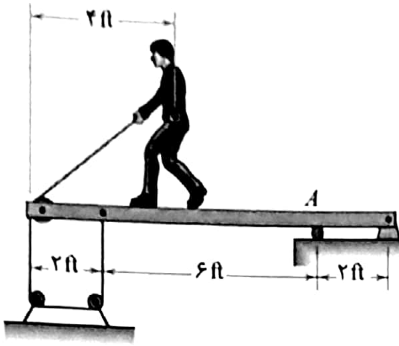
شکل م ۵۲.۳

۵۳.۳ میلهٔ یکنواخت OC به‌طول L آزادانه حول محور افقی که از نقطهٔ O عبور می‌کند می‌چرخد. اگر ضریب فنر در حالت غیرمتراکم، هنگامی‌که C با A منطبق می‌شود، برابر با k باشد، کشش لازم T برای نگهداری میله را در وضع ۴۵° نشان‌داده‌شده تعیین کنید. قطر قرقره در نقطهٔ D ناچیز است.



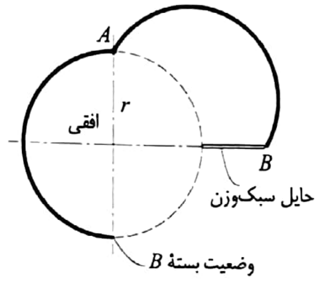
شکل م ۵۳.۳

۵۴.۳ در آزمون انحراف تیر یکنواخت ۲۰۰lb، پسربچه‌ای ۱۲۰ پوندی، نیروی کشش ۴۰lb را بر طناب اعمال می‌کند. نیروی تکیه‌گاهی را که پین بر لولای O وارد می‌کند تعیین کنید.



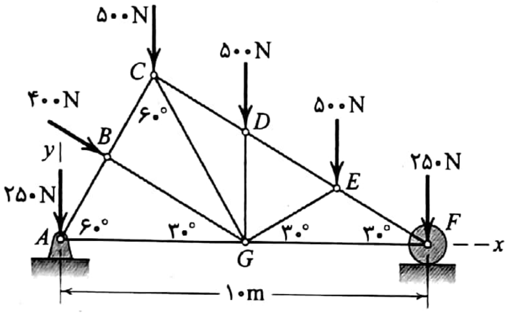
شکل م ۵۴.۳

۵۵.۳ درب محفظهٔ باریک هواپیمای باربری با مقطع دایره‌ای، قطعهٔ نیم‌دایره‌ای یکنواخت AB با جرم m است. نیروی فشاری C موجود در حایل افقی B را برای بازنگه‌داشتن درب هواپیما در وضعیت نشان‌داده‌شده تعیین کنید. همچنین عبارتی برای نیروی کل وارد بر لولای A بیابید (برای تعیین موقعیت مرکز هندسی یا مرکز جرم قطعهٔ AB به جدول د.۳ مراجعه کنید).



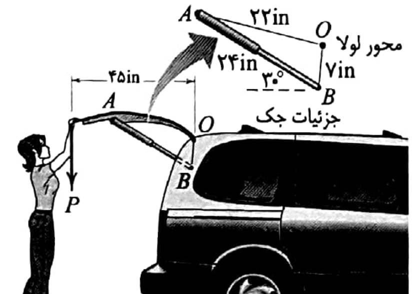
شکل م ۵۵.۳

۵۶.۳ واکنش‌های خارجی در نقاط A و F را برای خرپای سقفی که مطابق شکل بارگذاری شده است، تعیین کنید. بار عمودی نشان‌دهندهٔ اثر تکیه‌گاه‌های مواد ساختمانی در سقف و نیروی ۴۰۰N نشان‌دهندهٔ تأثیر بار است.



شکل م ۵۶.۳

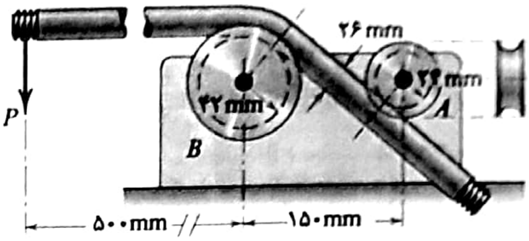
۵۷.۳ می‌خواهیم که شخص بتواند درب عقب اتومبیل را از حالت باز نشان‌داده‌شده، با نیروی عمودی P برابر ۱۰lb ببندد. به‌عنوان تمرین طراحی، نیروی لازم را در هریک از دو جک هیدرولیکی AB تعیین کنید. مرکز گرانی درب ۹۰ پوندی به‌طور مستقیم ۱٫۵in زیر نقطهٔ A قرار دارد. مسئله را در دوبعد حل کنید.



شکل م ۵۷.۳

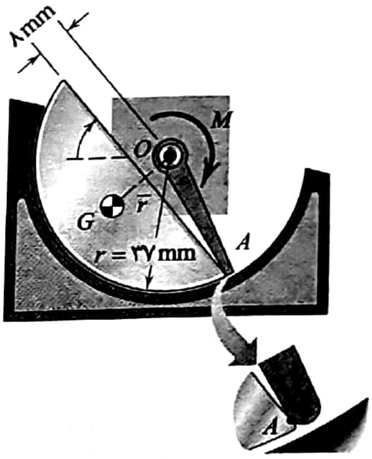
Scanned by CamScanner

۵۸.۳ لوله‌خم‌کنی شامل دو قرقرهٔ شیاردار است که آزادانه روی یک قاب ثابت می‌چرخند. لوله به‌کمک نیروی $P = ۳۰۰\text{N}$ به‌صورت شکل نشان‌داده‌شده خم شده است. نیروهای وارد بر یاتاقان‌های قرقره را حساب کنید.



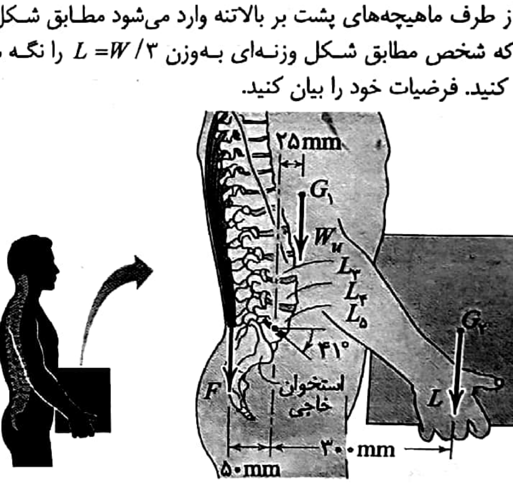
شکل م ۵۸.۳

۵۹.۳ در شکل، برخی از بخش‌های یخ‌ساز یک یخچال نشان داده شده است (قطعات یخ ساخته‌شده توسط این یخ‌ساز به‌شکل استوانه‌اند!). وقتی قطعه‌یخ تولید می‌شود، گرمکن کوچکی (نشان داده نشده) بین یخ و سطح تکیه‌گاه لایهٔ نازکی از آب ایجاد می‌کند و الکتروموتوری بازوی بیرون‌ریز OA را دوران می‌دهد تا یخ بیرون بریزد. اگر هشت قطعه‌یخ و هشت بازوی بیرون‌ریز موجود باشد، گشتاور مورد نیاز M را به‌صورت تابعی از θ تعیین کنید. وزن هشت قطعه‌یخ، $۰٫۲۵\text{kg}$ و فاصلهٔ مرکز گرانی $\bar{r} = ۰٫۵۵r$ است. از اصطکاک صرف‌نظر کنید و فرض کنید برایند نیروی عمودی گستردهٔ واردشده بر قطعه‌یخ از نقطهٔ O عبور می‌کند.



شکل م ۵۹.۳

۶۰.۳ بخش پایینی ستون فقرات، کل وزن بالاتنه و بار وارد بر آن را تحمل می‌کند. در اینجا دیسک (ناحیهٔ سایه‌دار) بین پایین‌ترین مهرهٔ ناحیهٔ کمر (L_5) و بالاترین ناحیهٔ استخوان خاجی را در نظر می‌گیریم. (الف) در حالت $L = ۰$، نیروی فشاری C و نیروی برشی S وارد بر دیسک را برحسب وزن بدن، W تعیین کنید. وزن W_u بالاتنه (در بالای این دیسک) برابر ۶۸٪ کل وزن بدن، W، بوده و در G_1 اعمال می‌شود. نیروی عمودی F که از طرف ماهیچه‌های پشت بر بالاتنه وارد می‌شود مطابق شکل است. (ب) در حالتی که شخص مطابق شکل وزنه‌ای به‌وزن $L = W/۳$ را نگه می‌دارد، مسئله را تکرار کنید. فرضیات خود را بیان کنید.



شکل م ۶۰.۳

قسمت (ب): تعادل در سه‌بعد

۴.۳ شرایط تعادل

حال می‌توانیم اصول و روشهای تعادل در دو بعد را توسعه دهیم تا به مسائل تعادل در سه‌بعد برسیم. در بخش ۱.۳ شرایط کلی برای تعادل یک جسم را با معادلات (۱.۳) بیان کردیم که مستلزم این بود که برایند نیرو و برایند کوپل روی یک جسم در حالت تعادل صفر باشد. این دو معادلهٔ برداری تعادل و مؤلفه‌های عددی آنها را می‌توان چنین نوشت

$$\Sigma\mathbf{F} = ۰ \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \Sigma F_x = ۰ \\ \Sigma F_y = ۰ \\ \Sigma F_z = ۰ \end{cases} \qquad (۳.۳)$$

$$\Sigma\mathbf{M} = ۰ \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \Sigma M_x = ۰ \\ \Sigma M_y = ۰ \\ \Sigma M_z = ۰ \end{cases}$$

سه معادلهٔ اول بیان می‌کند که نیروی برایندی وارد بر یک جسم در وضع تعادل در هیچ‌یک از سه امتداد مختصات وجود ندارد. سه معادلهٔ عددی دوم شرط دیگر تعادل را بیان می‌کند به‌گونه‌ای که هیچ گشتاور برایندی وارد بر جسم حول هر یک از محورهای مختصات یا حول محورهای موازی با محورهای مختصات بر جسم اثر نکند.

این شش معادله شرایط لازم و کافی برای تعادل کامل است. محورهای مختصات را به‌طور دلخواه به ساده‌ترین شکل می‌توان فرض کرد، و تنها شرط این است که حین استفاده از عملیات برداری، دستگاه محورهای مختصات باید راستگرد باشند.

شش رابطهٔ عددی معادلات (۳.۳) شرایط مستقل‌اند، زیرا هریک از آنها می‌توانند مستقل از روابط دیگر باشند. به‌عنوان مثال برای اتومبیلی که در حال شتاب‌گرفتن بر روی یک جادهٔ مستقیم و تراز در امتداد x است، طبق قانون دوم نیوتن نیروی برایند وارد بر آن برابر است با حاصلضرب جرم در شتاب. بنابراین $\Sigma F_x \neq ۰$. ولی دو معادلهٔ باقی‌ماندهٔ تعادل کافی‌اند، زیرا شتاب دیگر مؤلفه‌ها صفرند. به‌طور مشابه اگر چرخ طیار موتور شتاب‌دهندهٔ اتومبیل با افزایش سرعت زاویه‌ای حول محور x در چرخش باشد، حول این محور تعادل دورانی وجود ندارد. بنابراین برای چرخ لنگر به‌تنهایی $\Sigma M_x \neq ۰$ و $\Sigma F_x \neq ۰$ است، ولی چهار معادلهٔ تعادل باقی‌مانده برای چرخ لنگر برای محورهای گذرنده از مرکز جرم آن برقرار هستند.

با به‌کاربردن شکل برداری معادلات (۳.۳)، امتداد هریک از نیروها برحسب بردارهای یکه در مختصات برداری $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ را توصیف می‌کنیم. برای اولین معادله، $\Sigma\mathbf{F}_x = ۰$، تنها اگر ضرایب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ در عبارت به‌ترتیب صفر باشند، جمع برداری صفر خواهد بود. این سه مجموع وقتی هریک برابر صفر باشند، دقیقاً سه معادلهٔ عددی تعادل $\Sigma F_x = ۰$، $\Sigma F_y = ۰$ و $\Sigma F_z = ۰$ می‌باشند.

برای دومین معادله، $\Sigma\mathbf{M} = ۰$، که در آن مجموع گشتاورها حول هر نقطهٔ مناسب O می‌تواند باشد. گشتاورهای هر نیرو را مانند حاصلضرب $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$، که در آن $\mathbf{r}$ بردار مکان از O تا نقطه‌اثر نیروی $\mathbf{F}$ است، توصیف می‌کنیم. پس $\Sigma\mathbf{M} = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = ۰$. وقتی ضرایب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ در گشتاور برایند به‌ترتیب برابر صفر باشند، سه معادلهٔ عددی گشتاور $\Sigma M_x = ۰$، $\Sigma M_y = ۰$ و $\Sigma M_z = ۰$ را خواهیم داشت.

Scanned by CamScanner

بحث دربارهٔ همهٔ نیروها و گشتاورهای مورد نیاز در معادلات تعادل، می‌باشد. نمودار جسم آزاد به‌همان‌شکل که در دوبعد به‌کار می‌رفت، در سه‌بعد نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد و همواره باید رسم شود. می‌توانیم تصویری از جسم مجزاشده را به‌همراه تمام نیروهای خارجی، یا تصاویر قائم نمودار جسم آزاد رسم کنیم. در مسائل انتهایی این بخش، از هر دو روش نمایش استفاده خواهد شد.

نمایش صحیح نیروها در نمودار جسم آزاد مستلزم اطلاع از خصوصیات سطوح تماس است. این خصوصیات را در شکل ۱.۳ برای مسئله‌های دوبعدی و تعمیم آنها، برای مسئله‌های سه‌بعدی را در شکل ۸.۳ برای متداول‌ترین حالت‌های انتقال نیرو نشان داده‌ایم. در تحلیل سه‌بعدی از هر دو نمایش شکل‌های ۱.۳ و ۸.۳ استفاده خواهیم کرد.

هدف اصلی از رسم نمودار جسم آزاد این است که تصویر مطمئنی از اثر فیزیکی تمام نیروها (و در صورت وجود کوپل‌ها)ی وارد بر جسم به‌دست آید. بنابراین بهتر است این نیروها در جهت درست فیزیکی‌شان، نشان داده شوند. به‌این‌ترتیب، نمودار جسم آزاد، مدلی نزدیک‌تر به مسئلهٔ فیزیکی واقعی خواهد بود تا اینکه نیروها در جهت‌های دلخواه انتخاب شوند و یا همیشه جهت مثبت برای آنها، همان جهت مثبت محورهای مختصات در نظرگرفته شود.

در مثال ۴ شکل ۸.۳ جهت صحیح مجهول‌های R_x و R_y ممکن است معلوم باشند یا در جهت مخالف با جهت مشخص شده در محورهای مختصات در نظرگرفته شوند. مشابه این شرایط در مورد جهت بردارهای کوپل مثال‌های ۵ و ۶ به‌کاربرده شده که در آنجا جهت‌های آنها با قانون دست راست مخالف با آنچه که جهت محور مختصات نشان می‌دهد می‌باشد. در این حال تشخیص خواهید داد که جواب منفی با آنچه که در روی نمودار جسم آزاد نشان می‌دهد، مخالف است. البته موارد زیادی وجود دارند که جهت صحیح فیزیکی در ابتدا معلوم نمی‌شود. بنابراین یک آزمون مشخص در نمودار جسم آزاد لازم می‌شود.

گروه‌بندی تعادل

کاربردهای معادلات (۳.۳) در چهار گروه قرار می‌گیرند که به‌کمک شکل ۹.۳ می‌توان آنها را تشخیص داد. این گروه‌بندی‌ها از نظر مقدار و نوع (نیرو و گشتاور) معادلات مستقل تعادل لازم برای حل مسئله‌ها با هم تفاوت دارند.

گروه ۱. تعادل نیروهایی که همگی در نقطه‌ای مانند O همدیگر را قطع می‌کنند، نیازمند هر سه معادلهٔ نیروست؛ اما معادلات گشتاور لازم نیستند، چون گشتاور نیروها حول هر محور گذرنده از O برابر صفر است.

گروه ۲. تعادل نیروهایی که نسبت به یک خط همرس‌اند، نیازمند همهٔ معادلات به‌استثنای معادلهٔ گشتاور حول آن خط است، که خودبه‌خود برقرار است.

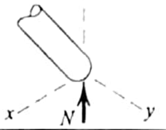
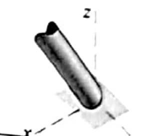
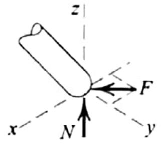
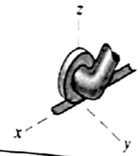
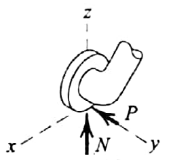
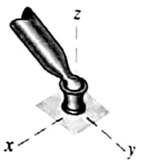
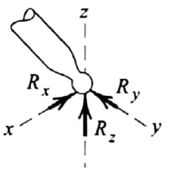
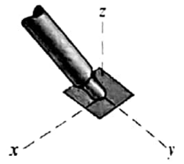
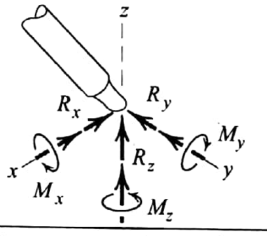
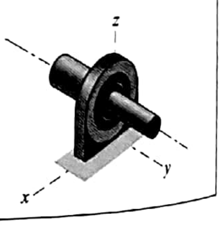
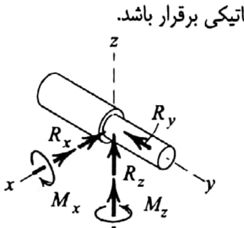
گروه ۳. تعادل نیروهای موازی تنها مستلزم یک معادلهٔ نیرو آن‌هم در جهت نیروها (در جهت x نشان‌داده‌شده در شکل) و دو معادلهٔ گشتاور حول محورهای (y و z) است که عمود بر سطح در امتداد نیروها باشد.

گروه ۴. تعادل کلی سیستم نیروها مستلزم کل معادلات سه نیرو و هر سه معادلات گشتاور است.

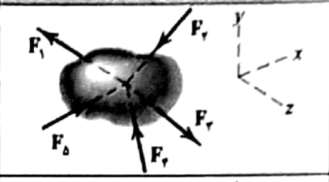
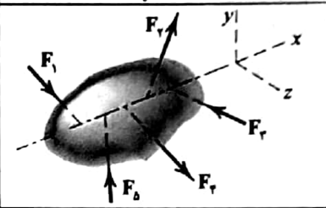
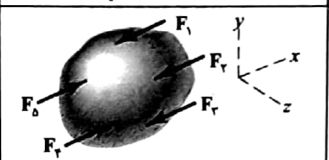
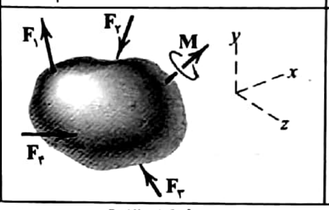
نکات بیان‌شده در این گروه‌ها معمولاً با حل مسائل کاملاً روشن می‌شوند.

نمودارهای جسم آزاد

... معادلات (۳.۳) شامل اثرات همهٔ نیروها روی جسم مورد بررسی ... در بخش گذشته آموختیم که نمودار جسم آزاد تنها روش مطمئن برای

مدل‌سازی اثر نیروها در تحلیل سه‌بعدی	
نوع تماس و منشأ نیرو	اثر جسمی که باید مجزا شود
۱. عضو در تماس با سطح صاف، یا عضو با تکیه‌گاه ساچمه‌ای	نیرو باید بر سطح عمود و به‌طرف عضو باشد. 
۲. عضو در تماس با سطح زبر 	احتمال وجود نیروی F در راستای مماس بر سطح (نیروی اصطکاک) و نیروی قائم N که بر عضو وارد می‌شود، وجود دارد. 
۳. تکیه‌گاه غلتکی یا چرخ با قید جانبی 	علاوه بر نیروی عمودی N، نیروی جانبی P که از راهنما بر چرخ وارد می‌شود، می‌تواند وجود داشته باشد. 
۴. مفصل کاسه ـ ساچمه‌ای 	مفصل کاسه ـ ساچمه‌ای که آزادانه حول مرکز ساچمه می‌چرخد، می‌تواند نیروی **R** را با هر سه مؤلفهٔ آن تحمل کند. 
۵. اتصال ثابت (جازده‌شده یا جوشکاری‌شده) 	اتصال ثابت علاوه بر سه مؤلفهٔ نیرو، می‌تواند کوپل **M** را با سه مؤلفهٔ نمایش داده شده تحمل کند. 
۶. تکیه‌گاه یاتاقان محوری 	یاتاقان ثابت، می‌تواند نیروی محوری R_y و نیز نیروهای شعاعی R_x و R_z را تحمل کند. در بعضی موارد کوپل‌های M_x و M_z، باید صفر فرض شوند تا معین بودن استاتیکی برقرار باشد. 

شکل ۸.۳

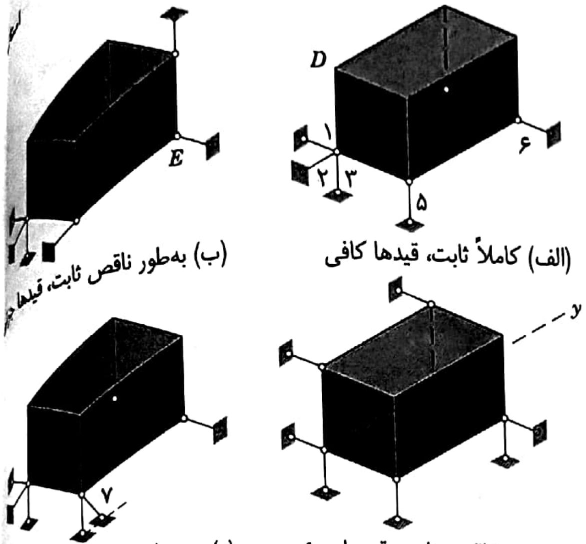
دسته‌بندی‌های تعادل در سه‌بعد		
سیستم نیرو	**نمودار جسم آزاد**	**معادلات مستقل**
۱. متقاطع در یک نقطه		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$
۲. متقاطع با یک خط راست		$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_z = 0$
۳. موازی		$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
۴. کلی		$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_x = 0$ $\Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_z = 0 \quad \Sigma M_z = 0$

شکل ۹.۳

قیدها و حالات استاتیکی معین در مسائل

شش رابطهٔ عددی معادلات (۳.۳)، اگرچه شرایط لازم و کافی برای پایداری تعادل می‌باشند، اما همهٔ اطلاعات لازم برای محاسبهٔ اثر نیروهای مجهول وارد بر جسم در حال تعادل سه‌بعدی را ارائه نمی‌کنند. شبیه مسائل دوبعدی، در اینجا نیز باید تشخیص داد که آیا قیدهای حاصل از تکیه‌گاه‌ها کافی‌اند، ناقص‌اند و یا اینکه تعداد آنها بیش از تعداد مورد نیاز برای تعادل جسم هستند. برای این منظور از یک روش تحلیلی استفاده می‌شود[1]، که در این کتاب آن روش را وارسی نکرده‌ایم و به‌جای آن روش شکل ۱۰.۳ را بررسی می‌کنیم.

شکل ۱۰.۳ (الف) جسم صلبی را نشان می‌دهد که گوشهٔ A آن توسط میله‌های ۱، ۲ و ۳ ثابت شده است. میله‌های ۴، ۵ و ۶ به‌ترتیب از چرخش جسم حول میله‌های ۱، ۲ و ۳ جلوگیری می‌کنند، به‌گونه‌ای که جسم کاملاً *ثابت* است و گفته می‌شود که قیدهای *کافی* دارد. شکل ۱۰.۳ (ب) همان تعداد قیدها را دارد اما این قیدها در برابر گشتاور وارده نسبت به محور AE مقاومت نمی‌کند. در این حالت جسم دارای *تعادل ناکامل* است و قیدهای *ناقص* دارد.



(الف) کاملاً ثابت، قیدها کافی — (ب) به‌طور ناقص ثابت، قیدها ج...

(ج) به‌طور ناقص ثابت، قیدها جزئی — (د) بیش از حد ثابت، قیدها اضافی

شکل ۱۰.۳

به همین ترتیب در شکل ۱۰.۳ (ج) قیدها در برابر نیروی وارده در جهت y مقاومت نمی‌کنند، بنابراین جسم در این حالت نیز دارای تعادل ناقص ... قیدهای ناقص دارد. در شکل ۱۰.۳ (د) با حذف میلهٔ شمارهٔ ۷ تعادل جسم ... نمی‌کند، بنابراین تکیه‌گاه‌های این جسم بیش از تعداد مورد نیاز برای نگهدا... تعادل آن است. بدین‌معنی که میلهٔ شمارهٔ ۷ *زاید* است و دراین‌صورت می‌گو... جسم در حالت *نامعین استاتیکی* است. به‌غیر از چند مورد محدود در این کتا... اجسام صلبی بررسی می‌شوند که معین استاتیکی هستند و قیدهای کافی دارند.

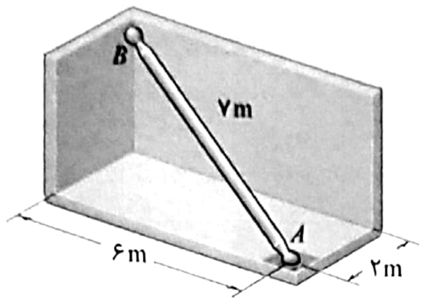
تعادل در سه‌بعد این برج مربوط به پل را باید به‌طور دقیق در فرایند طراحی تحلیل کرد تا از واردشدن نیروی افقی خالص اضافی توسط مجموعهٔ کابل‌ها که تمایل به خمش برج دارند، جلوگیری شود.

---

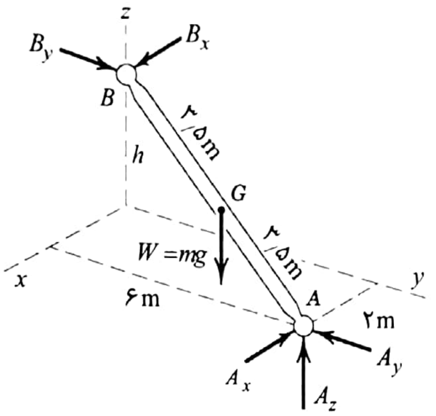
۱. به ویراست دوم همین کتاب، ۱۹۷۵، بخش ۱۶ مراجعه شود.

مسئلهٔ نمونهٔ ۵.۳

میل‌گردان فولادی به‌طول ۷m دارای جرم ۲۰۰kg و متکی بر مفصل کاسه ـ ساچمه‌ای در نقطهٔ A به سطح افقی متصل شده است. توپی B در انتهای دیگر میل‌گردان به دیوار عمودی صاف تکیه داده شده است. نیروهای وارد شده از طرف دیوارها و کف بر دو سر این میل‌گردان را تعیین کنید.



حل: ابتدا نمودار جسم آزاد میل‌گردان را رسم می‌کنیم که در آن تمام نیروهایی که بر میل‌گردان در نقطهٔ B وارد می‌شود، عمود بر سطح دیواره نشان داده می‌شود. علاوه بر وزن $W=mg=۲۰۰(۹/۸۱)=۱۹۶۲N$، نیرویی که از طرف سطح بر توپی در مفصل A وارد می‌شود با مؤلفه‌هایش x، y و z نشان‌داده‌شده‌اند. این مؤلفه‌ها در جهت صحیح فیزیکی خود ❶ نشان داده‌شده‌اند، که با توجه به قرارداشتن A در جای خود، روشن است. مکان عمودی نقطهٔ B از رابطهٔ $۷=\sqrt{۲^۲+۶^۲+h^۲}$، $h=۳m$، به‌دست می‌آید. در شکل دستگاه مختصات راستگرد نشان داده شده است.



حل برداری: نقطهٔ A را به‌عنوان مرکز گشتاور انتخاب می‌نماییم، تا از ظاهرشدن نیروهای اعمال‌شده بر A در معادلات جلوگیری شود. بردارهای مکان لازم برای محاسبهٔ گشتاورها حول A عبارت‌اند از

$$\mathbf{r}_{AG}=-۱\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۱/۵\mathbf{k}\,\text{m} \quad \text{و} \quad \mathbf{r}_{AB}=-۲\mathbf{i}-۶\mathbf{j}+۳\mathbf{k}\,\text{m}$$

که در آن مرکز جرم G در میانهٔ بین نقطهٔ A و B واقع شده است.

معادلهٔ برداری گشتاور چنین می‌شود

$$[\Sigma\mathbf{M}_A=۰] \qquad \mathbf{r}_{AB}\times(\mathbf{B}_x+\mathbf{B}_y)+\mathbf{r}_{AG}\times\mathbf{W}=۰$$

$$(-۲\mathbf{i}-۶\mathbf{j}+۳\mathbf{k})\times(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j})+(-\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۱/۵\mathbf{k})\times(-۱۹۶۲\mathbf{k})=۰$$

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -۲ & -۶ & ۳\\ B_x & B_y & ۰\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -۱ & -۳ & ۱/۵\\ ۰ & ۰ & -۱۹۶۲\end{vmatrix}=۰$$

$$(-۳B_y+۵۸۹۰)\mathbf{i}+(۳B_x-۱۹۶۲)\mathbf{j}+(-۲B_y+۶B_x)\mathbf{k}=۰$$

با مساوی قراردادن ضرایب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ با صفر و حل‌کردن آنها

❷ ج. $$B_x=۶۵۴N \quad \text{و} \quad B_y=۱۹۶۲N$$

نیرو در A به‌طور ساده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$[\Sigma\mathbf{F}=۰] \qquad (۶۵۴-A_x)\mathbf{i}+(۱۹۶۲-A_y)\mathbf{j}+(-۱۹۶۲+A_z)\mathbf{k}=۰$$

ج. $$A_x=۶۵۴N,\ A_y=۱۹۶۲N,\ A_z=۱۹۶۲N$$

سرانجام $$A=\sqrt{A_x^۲+A_y^۲+A_z^۲}=\sqrt{(۶۵۴)^۲+(۱۹۶۲)^۲+(۱۹۶۲)^۲}=۲۸۵۰N$$

حل عددی: با نوشتن معادلات گشتاور حول محور گذرنده از نقطهٔ A و به‌ترتیب موازی با محورهای x و y داریم

❸
$$[\Sigma M_{A_x}=۰] \qquad ۱۹۶۲(۳)-۳B_y=۰ \qquad B_y=۱۹۶۲N$$
$$[\Sigma M_{A_y}=۰] \qquad -۱۹۶۲(۱)+۳B_x=۰ \qquad B_x=۶۵۴N$$

معادلات نیروها به‌سهولت نتیجه می‌دهد

$$[\Sigma F_x=۰] \qquad -A_x+۶۵۴=۰ \qquad A_x=۶۵۴N$$
$$[\Sigma F_y=۰] \qquad -A_y+۱۹۶۲=۰ \qquad A_y=۱۹۶۲N$$
$$[\Sigma F_z=۰] \qquad A_z-۱۹۶۲=۰ \qquad A_z=۱۹۶۲N$$

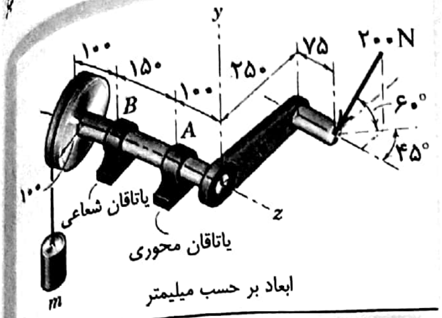
راهنمایی‌های مفید

❶ می‌توانستیم همهٔ مؤلفه‌های نیرو را در جهت مثبت ریاضی علامت‌گذاری کنیم که دراین‌صورت A_x و A_y پس از محاسبه دارای علامت منفی خواهند بود. نمودار جسم آزاد، حالت فیزیکی را توصیف می‌کند و از این‌رو در صورت امکان، بهتر است نیروها را در جهت صحیح فیزیکی نشان داد.

❷ این نتایج از معادلهٔ عددی $-۲B_y+۶B_x=۰$ حاصل می‌شود. این معادله تنها صحت دو معادلهٔ اول را نشان می‌دهد، که یک معادلهٔ مستقل نیست. این مطلب قابل پیش‌بینی بود، زیرا نیروهای متقاطع با یک خط تنها به دو معادلهٔ گشتاور نیاز دارد. (گروه ۲، تحت عنوان گروه‌بندی تعادل).

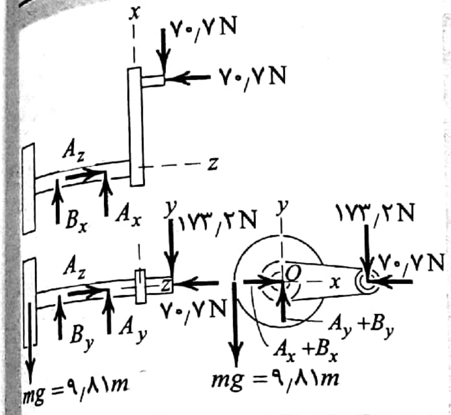
❸ مشاهده می‌شود که جمع گشتاور حول یک محور گذرنده از A و موازی با محور z، نتیجه می‌دهد $۶B_x-۲B_y=۰$ و به طریق دیگر می‌توانستیم از رابطهٔ $\Sigma F_z=۰$، مقدار A_z را به‌دست آورده و سپس از گشتاورها حول محورهای گذرنده از B مقدار A_x و A_y را به‌دست آوریم.

Scanned by CamScanner



مسئلهٔ نمونهٔ ۶٫۳

نیرویی برابر با ۲۰۰N بر دستهٔ بالابری در امتداد نشان‌داده‌شده وارد می‌شود. یاتاقان محوری A نیروی محوری (نیروی در امتداد محور میل‌گردان) و یاتاقان B تنها بار شعاعی را (باری که بر محور میل‌گردان عمود است) تحمل می‌کند. جرم m و نیروی کل شعاعی وارد بر میل‌گردان از هر محور یاتاقان را معین کنید. فرض کنید هیچ یاتاقانی نمی‌تواند گشتاوری حول خط عمود بر میل‌گردان را تحمل کند.



حل: واضح است که این سیستم سه‌بعدی است و محور یا صفحهٔ تقارن ندارد، بنابراین باید آن را به‌صورت یک سیستم کلی فضایی نیرو تحلیل کرد. در اینجا، از حل عددی استفاده می‌کنیم، اگرچه حل برداری نیز قابل قبول است. نمودار جسم آزاد میل‌گردان، دسته، و چرخ را می‌توان یک جسم منفرد در نظر گرفت و اگر بخواهیم می‌توانیم تصویر سه‌بعدی آن را رسم ❶ کنیم، اما در اینجا آن را با سه تصویر قائم‌اش نشان می‌دهیم.

نیروی ۲۰۰N به سه مؤلفه تجزیه شده است، و هریک از سه نما، دو مؤلفه از این نیرو را نشان می‌دهد. جهت درست مؤلفه‌های A_x و B_x با توجه به این نکته مشخص می‌شود که خط اثر برایند دو نیروی ۷۰٫۷ نیوتنی از بین نقاط A و B می‌گذرد. بدون تعیین مقادیر گشتاورها نمی‌توان سوی درست نیروهای A_y و B_y را به‌دست آورد، بنابراین آنها را به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم. تصویر (x-y) نیروهای یاتاقان‌ها برحسب مجموع مؤلفه‌های مجهول x و y نشان داده شده‌اند. با افزودن A_z و وزن $W=mg$، نمودارهای جسم آزاد کامل می‌شوند. باید دقت داشت که سه نمای قائم سیستم، بیانگر سه مسئلهٔ دوبعدی هستند که به وسیلهٔ مؤلفه‌های متناظر نیروها به هم مربوط می‌شوند.

❷ از تصویر x-y داریم

$$[\Sigma M_O=۰]\qquad ۱۰۰(۹٫۸۱m)-۲۵۰(۱۷۳٫۲)=۰$$

$$m=۴۴٫۱\text{kg}$$ ج.

با در نظرگرفتن تصویر x-z داریم

$$[\Sigma M_A=۰]\qquad ۱۵۰B_x+۱۷۵(۷۰٫۷)-۲۵۰(۷۰٫۷)=۰\qquad B_x=۳۵٫۴\text{N}$$

$$[\Sigma F_x=۰]\qquad A_x+۳۵٫۴-۷۰٫۷=۰\qquad A_x=۳۵٫۴\text{N}$$

❸ با در نظرگرفتن تصویر y-z داریم

$$[\Sigma M_A=۰]\qquad ۱۵۰B_y+۱۷۵(۱۷۳٫۲)-۲۵۰(۴۴٫۱)(۹٫۸۱)=۰\qquad B_y=۵۲۰\text{N}$$

$$[\Sigma F_y=۰]\qquad A_y+۵۲۰-۱۷۳٫۲-(۴۴٫۱)(۹٫۸۱)=۰\qquad A_y=۸۶٫۸\text{N}$$

$$[\Sigma F_z=۰]\qquad A_z=۷۰٫۷\text{N}$$

جمع کل نیروهای شعاعی روی یاتاقان برابر است با

$$\left[A_r=\sqrt{A_x^۲+A_y^۲}\right]\qquad A_r=\sqrt{(۳۵٫۴)^۲+(۸۶٫۸)^۲}=۹۳٫۵\text{N}$$ ج.

$$\left[B=\sqrt{B_x^۲+B_y^۲}\right]\qquad B=\sqrt{(۳۵٫۴)^۲+(۵۲۰)^۲}=۵۲۱\text{N}$$ ❹ ج.

راهنمایی‌های مفید

❶ اگر سه نمای استاندارد تصویر قائم کاملاً برای شما آشنا نیست، آنها را مرور و تمرین کنید. سه نمای یک جسم عبارت‌اند از تصاویر جسم روی سطح جلویی، بالا و کناری یک جعبهٔ تمیز پلاستیکی که روی جسم و هم‌امتداد آن قرار دارد.

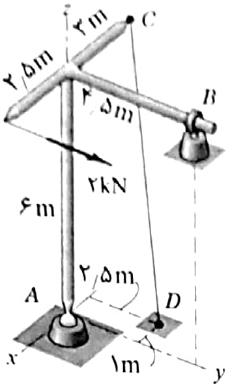
❷ می‌توانستیم به‌جای نمای x-z، با نمای x-y شروع کنیم.

❸ تصویر y-z را می‌توان بلافاصله پس از تصویر x-y دنبال کرد، چون با تعیین m می‌توان A_y و B_y را تعیین کرد.

❹ بدون فرض صفربودن گشتاورهای قابل تحمل توسط هریک از یاتاقان‌ها حول محور عمود بر خط مرکزی محور، مسئله نامعین استاتیکی می‌شد.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۷.۳ قاب لولهٔ جوش‌کاری‌شده‌ای توسط اتصال کاسه ـ ساچمه‌ای در نقطهٔ A به صفحهٔ افقی ۱-۲ متصل است و توسط حلقهٔ آزاد B و طناب CD از چرخش قاب حول AB جلوگیری می‌شود. در اثر بار ۲ کیلونیوتنی، کابل CD حول خط AB از دوران جلوگیری می‌کند و از این‌رو قاب در موقعیت نشان داده‌شده در وضعیت ناپایدار است. از وزن قاب در مقایسه با بار واردشده صرف‌نظر کنید و کشش T کابل، واکنش در حلقه، و مؤلفه‌های نیروهای واکنشی در A را تعیین کنید.



حل: قاب یک سیستم سه‌بعدی و بدون خط تقارن یا صفحهٔ تقارن است، بنابراین مسئله به‌صورت یک سیستم کلی فضایی نیرو تحلیل می‌شود. نمودار جسم آزاد رسم شده و واکنش حلقه برحسب دو مؤلفه‌اش نشان داده شده است. با گشتاورگیری حول خط AB می‌توان همهٔ مجهولات، به‌جز $\mathbf{T}$ را حذف کرد. جهت AB با بردار یکهٔ $\mathbf{n}=\frac{۱}{\sqrt{۶^۲+۴٫۵^۲}}(۴٫۵\mathbf{j}+۶\mathbf{k})=\frac{۱}{۵}(۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})$ مشخص می‌شود. گشتاور $\mathbf{T}$ حول AB ❶ مؤلفه‌ای در جهت AB مربوط به بردار گشتاور حول نقطهٔ A است، و برابر است با $\mathbf{r}_۱\times\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}$. به‌طور مشابه گشتاور بار واردشده حول AB برابر است با $\mathbf{r}_۲\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$. با در نظرگرفتن $\overline{CD}=\sqrt{۴۶٫۲}\,\text{m}$، عبارت‌های برداری $\mathbf{T}$، $\mathbf{F}$، $\mathbf{r}_۱$ و $\mathbf{r}_۲$ چنین‌اند

$$\mathbf{T}=\frac{T}{\sqrt{۴۶٫۲}}(۲\mathbf{i}+۲٫۵\mathbf{j}-۶\mathbf{k}) \qquad \mathbf{F}=۲\mathbf{j}\ \text{kN}$$

$$\mathbf{r}_۱=-\mathbf{i}+۲٫۵\mathbf{j}\ \text{m} \qquad \mathbf{r}_۲=۲٫۵\mathbf{i}+۶\mathbf{k}\ \text{m}$$

❷ حال معادلهٔ گشتاور را می‌توان این‌طور نوشت

$$[\Sigma M_{AB}=۰] \qquad (-\mathbf{i}+۲٫۵\mathbf{j})\times\frac{T}{\sqrt{۴۶٫۲}}(۲\mathbf{i}+۲٫۵\mathbf{j}-۶\mathbf{k})\cdot\frac{۱}{۵}(۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})$$
$$+(۲٫۵\mathbf{i}+۶\mathbf{k})\times(۲\mathbf{j})\cdot\frac{۱}{۵}(۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})=۰$$

با تکمیل عبارت برداری چنین می‌شود

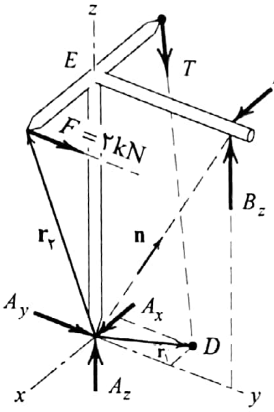
$$-\frac{۴۸T}{\sqrt{۴۶٫۲}}+۲۰=۰ \qquad T=۲٫۸۳\ \text{kN} \qquad \text{ج.}$$

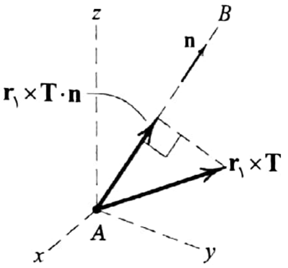
و مؤلفه‌های T عبارت‌اند از

$$T_x=۰٫۸۳۳\ \text{kN} \qquad T_y=۱٫۰۴۲\ \text{kN} \qquad T_z=-۲٫۵۰\ \text{kN}$$

می‌توانیم بقیهٔ مجهولات را توسط گشتاور و جمع نیروها به‌دست آوریم

$[\Sigma M_z=۰]$	$۲(۲٫۵)-۴٫۵B_x-۱٫۰۴۲(۳)=۰$	$B_x=۰٫۴۱۷\ \text{kN}$	ج.
$[\Sigma M_x=۰]$	$۴٫۵B_z-۲(۶)-۱٫۰۴۲(۶)=۰$	$B_z=۴٫۰۶\ \text{kN}$	ج.
$[\Sigma F_x=۰]$	$A_x+۰٫۴۱۷+۰٫۸۳۳=۰$	$A_x=-۱٫۲۵۰\ \text{kN}$	ج.
$[\Sigma F_y=۰]$	$A_y+۲+۱٫۰۴۲=۰$	$A_y=-۳٫۰۴\ \text{kN}$	ج. ❸
$[\Sigma F_z=۰]$	$A_z+۴٫۰۶-۲٫۵۰=۰$	$A_z=-۱٫۵۶۶\ \text{kN}$	ج.





راهنمایی‌های مفید

❶ مزیت به‌کاربردن روش برداری، در این مسئله آزادی به‌دست‌آوردن گشتاورها مستقیماً حول هر محور است. در این مسئله می‌توان محوری را برگزید که با انتخاب آن پنج مجهول حذف شود.

❷ با یادآوری اینکه بردار $\mathbf{r}$ در عبارت $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ برای گشتاور یک نیرو، برداری است از مرکز گشتاور تا هر نقطهٔ دلخواه خط اثر نیرو، به‌جای $\mathbf{r}_۱$، به‌سادگی می‌توان از بردار $\overrightarrow{AC}$ استفاده‌کرد.

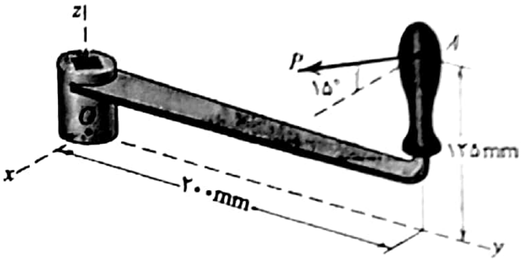
❸ علامت منفی همراه با مؤلفهٔ A نشان می‌دهد که جهت آنها مخالف جهتی است که روی نمودار جسم آزاد نشان داده شده است.

Scanned by CamScanner

مسائل

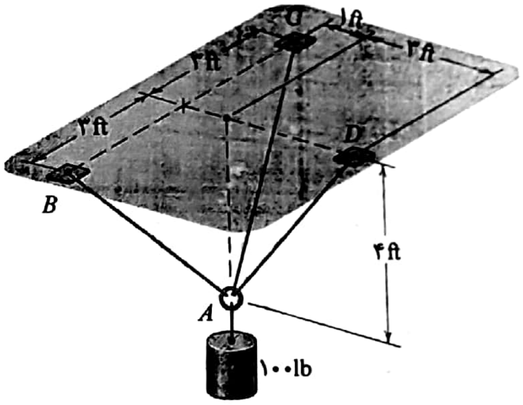
مسائل مقدماتی

۶۱.۳ نیرویی به‌مقدار $P=180\,N$ بر دستهٔ یک ماشین ثابت مطابق شکل وارد می‌شود. نیرو و گشتاور واکنش در نقطهٔ O را به‌عنوان یک بردار بنویسید. از وزن مجموعهٔ دسته صرف‌نظر کنید.



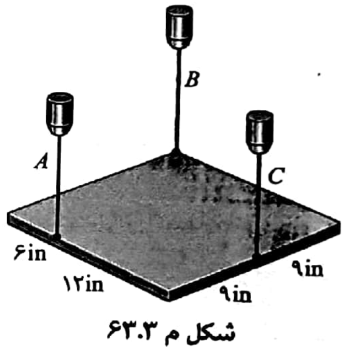
شکل م ۶۱.۳

۶۲.۳ کشش در کابل‌های AB، AC و AD را تعیین کنید.



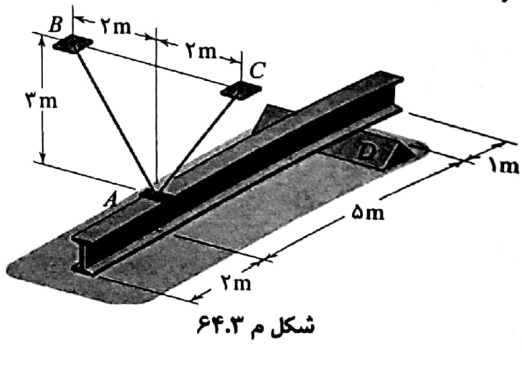
شکل م ۶۲.۳

۶۳.۳ صفحهٔ یکنواخت فولادی مربع‌شکل به‌ضلع ۱۸in با وزن ۶۸lb در صفحهٔ افقی با سه سیم قائم مطابق شکل آویزان است. کشش در هر سیم را محاسبه کنید.



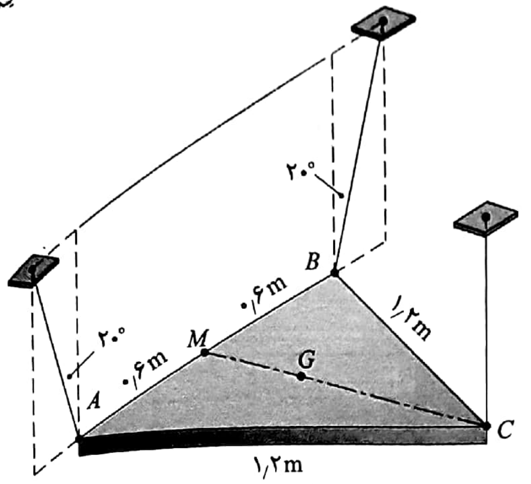
شکل م ۶۳.۳

۶۴.۳ جرم هر متر تیر یکنواخت I ـ شکل، ۶۰kg است. کشش دو کابل آویز و واکنش در D را محاسبه کنید.



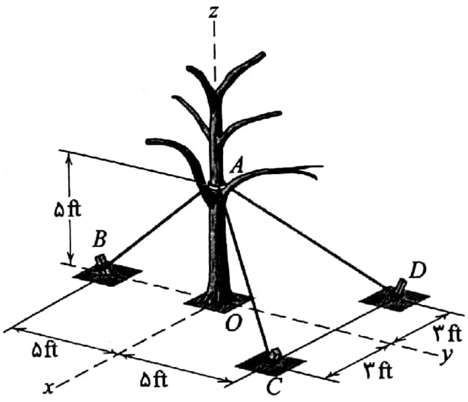
شکل م ۶۴.۳

۶۵.۳ کشش در سه کابلی را تعیین کنید که صفحهٔ یکنواخت ۸۰ کیلوگرمی بش... مثلث متساوی‌الاضلاع را تحمل می‌کنند. مرکز جرم صفحهٔ G در موقعیت یک... فاصلهٔ $\overline{MC}$ از نقطهٔ M واقع شده است.



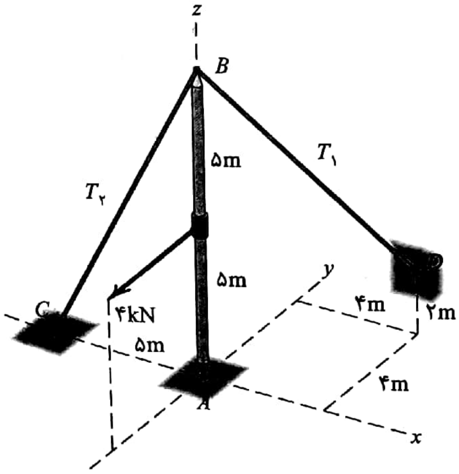
شکل م ۶۵.۳

۶۶.۳ درخت جوانی در وضع اولیه خم شده است. برای برگرداندن آن به‌حالت ق... توسط سه سیم با کشش $AB=0$، $AC=10\,lb$ و $AD=15\,lb$ آن‌را مهار کرده... نیرو و گشتاور واکنش نقطهٔ O در پای تنهٔ درخت را تعیین کنید. از وزن در... صرف‌نظر شود.



شکل م ۶۶.۳

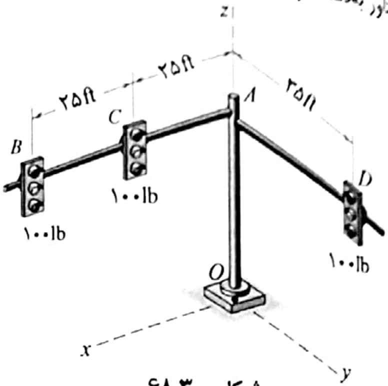
۶۷.۳ دکل قائم تحت اثر نیروی ۴kN قرار داشته و مقید به دو کابل ثابت ... BD است و پایهٔ دکل بر کاسه ـ ساچمه در نقطهٔ A متصل است. کشش T_1 در ... تعیین کنید. آیا این کار را می‌توان فقط به‌کمک یک معادلهٔ تعادل انجام داد؟



شکل م ۶۷.۳

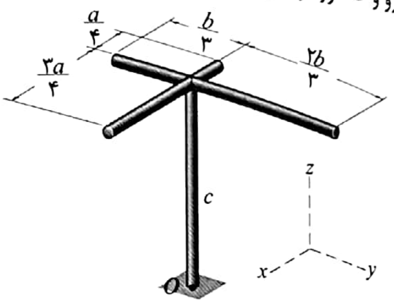
Scanned by CamScanner

۶۸.۳ ستون‌های قائم و افقی چراغ راهنمایی در ابتدا به‌اشتباه نصب شده است. واکنش‌های گشتاور و نیروی اضافی در پایهٔ O را، که در اثر اضافه‌کردن سه چراغ راهنمایی B، C و D هریک بوزن ۱۰۰lb تولید می‌شود تعیین کنید. جواب را با مقدار بردار و مقدار گشتاور بدست آورید.



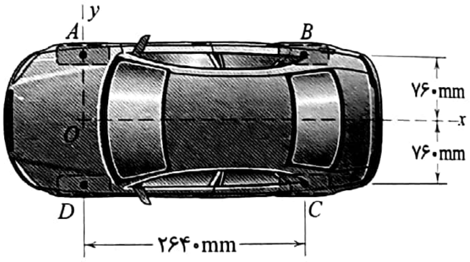
شکل م ۶۸.۳

۶۹.۳ جسمی با میلهٔ استوانه‌ای یکنواخت با جرم ρ بر یکای طول ساخته شده است. مقدار واکنش نیرو و گشتاور در تکیه‌گاه O را تعیین کنید.



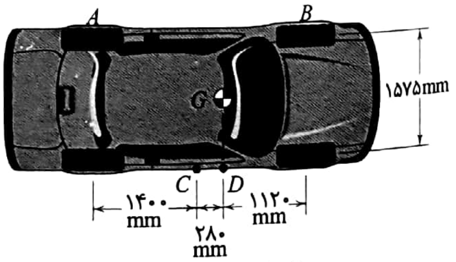
شکل م ۶۹.۳

۷۰.۳ اتومبیلی روی چهار تایر که هرکدام به‌مقدار جداگانه تحت فشارند، روی سطح زمین قرارگرفته است. این چهار مقدار برابر ۴۳۰۰N در A، ۲۹۰۰N در B، ۳۰۰۰N در C و ۴۶۰۰N در D، است. مختصات x و y مرکز جرم G و جرم اتومبیل را تعیین کنید.



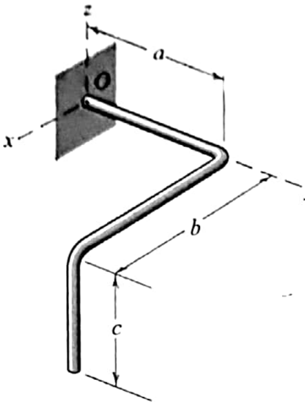
شکل م ۷۰.۳

۷۱.۳ در شکل نمای بالایی یک اتومبیل نشان داده شده است. دو موقعیت متفاوت C و D برای یک جک منفرد در نظر گرفته می‌شود. در دو حالت سمت راست اتومبیل تنها از زمین جدا می‌شود. نیروهای واکنش قائم در نقطهٔ A و B و نیز نیروی عمودی لازم برای جک‌زدن را در هریک از دو حالت نشان‌داده‌شده تعیین کنید. اتومبیل ۱۶۰۰ کیلوگرمی را صلب در نظر بگیرید. مرکز جرم G در وسط اتومبیل قرار دارد.



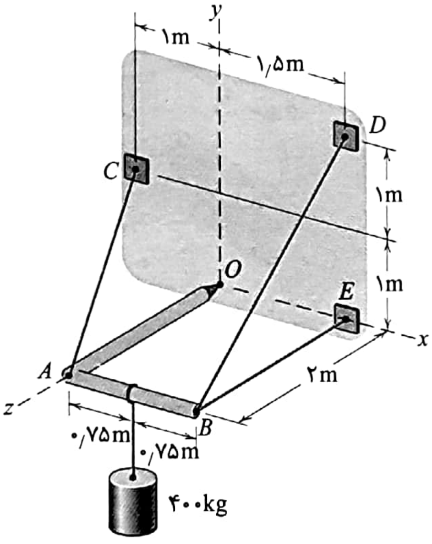
شکل م ۷۱.۳

۷۲.۳ جسمی از میله‌ای باریک که دارای جرم ρ بر یکای طول است ساخته شده است. نیرو و گشتاور واکنشی در نقطهٔ O را تعیین کنید.



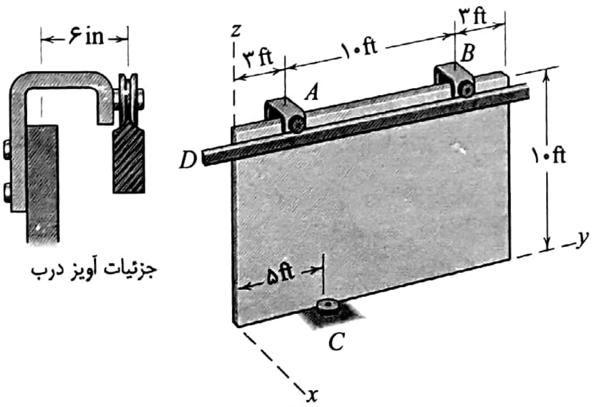
شکل م ۷۲.۳

۷۳.۳ بازوی L ـشکل سبکی که توسط سه کابل و اتصال کاسه ـساچمه‌ای نقطهٔ O واقع بر صفحهٔ قائم $(x\text{-}y)$ ثابت نگه‌داشته شده است، استوانه‌ای به‌جرم ۴۰۰kg را تحمل می‌کند. واکنش‌های نقطهٔ O و کشش کابل‌ها را تعیین کنید.



شکل م ۷۳.۳

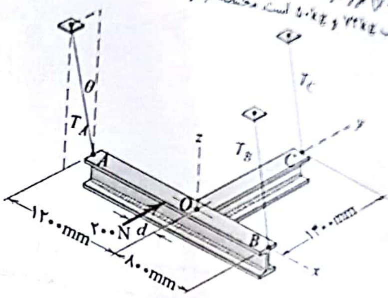
۷۴.۳ درب صلبی به‌صورت یک صفحهٔ مستطیل یکنواخت و به‌وزن ۱۲۰۰lb، روی چرخ‌های A و B خود در امتداد ریل ثابت D حرکت می‌کند. درب توسط غلتک راهنمای C، که بر کف کارگاه نصب شده است، در صفحهٔ عمودی نگه‌داشته می‌شود. برای وضعیت نشان‌داده‌شده، نیروی افقی جانبی هریک از چرخ‌های A و B را که در طراحی نگهدارنده‌ها به آن نیاز است، محاسبه کنید.



شکل م ۷۴.۳

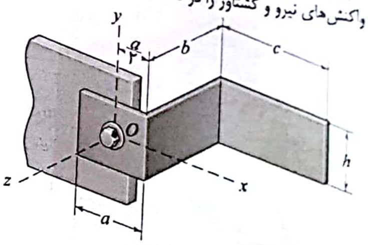
Scanned by CamScanner

۷۵.۳ دو تیر I-شکل را به‌هم جوش داده و در انتها توسط سه کابل با طول برابر که [illegible] مستقیماً نگهداری می‌شود. اعمال نیروی عمودی [illegible] ۲۰۰N با انحراف d باعث می‌شود که این مجموعه در وضعیت تعادل جدیدی قرار گیرد [illegible] و کابل‌ها در صفحات موازی با [illegible] θ را تعیین کنید. جرم تیرهای AB و OC به‌ترتیب [illegible] است. مختصهٔ y مرکز جرم تیر OC برابر ۷۲۵mm است.



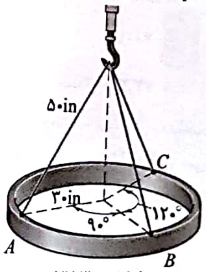
شکل م ۷۵.۳

۷۶.۳ یک دیوارکوب بزرگ از صفحهٔ سنگینی ساخته شده که دارای جرم ρ بر یکای سطح است. واکنش‌های نیرو و گشتاور را در نقطهٔ تکیه‌گاه O تعیین کنید.



شکل م ۷۶.۳

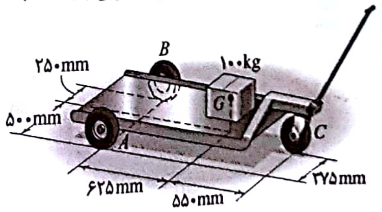
۷۷.۳ حلقهٔ فولادی یکنواختی به‌قطر ۶۰in با وزن ۶۰۰lb توسط سه کابل هریک به‌طول ۵۰in، در نقاط A، B و C متصل است. کشش در هر کابل را حساب کنید.



شکل م ۷۷.۳

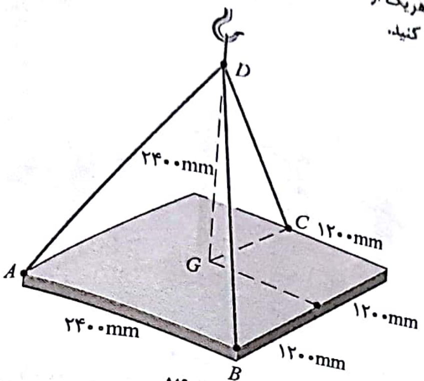
مسائل برگزیده

۷۸.۳ سه‌چرخه‌ای برای حمل یک جعبهٔ ۱۰۰ کیلوگرمی مطابق شکل به‌کار می‌رود. تغییرات نیروی واکنش عمودی را در هر چرخ مربوط به وزن جعبه حساب کنید.



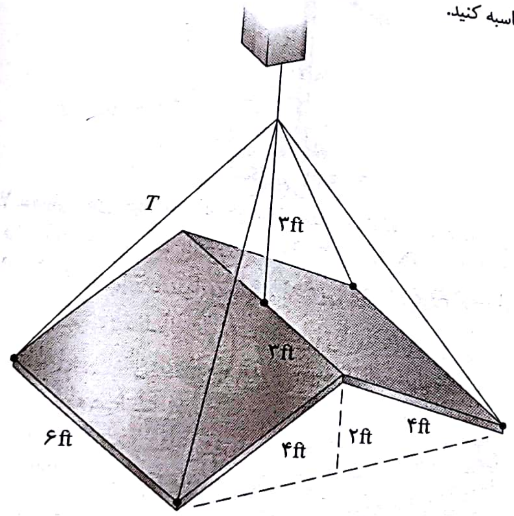
شکل م ۷۸.۳

۷۹.۳ صفحهٔ فولادی مربع‌شکلی به‌جرم ۱۸۰۰kg دارای مرکز جرمی آن در نقطهٔ G است. کشش در هریک از سه کابل را وقتی صفحه بالا رفته و سطح افقی باقی می‌ماند، محاسبه کنید.



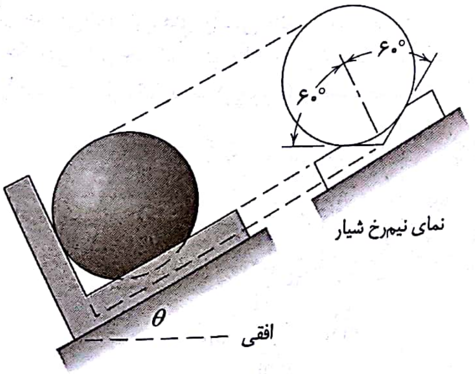
شکل م ۷۹.۳

۸۰.۳ دو صفحهٔ مستطیل یکنواخت هریک به‌وزن ۸۰۰lb آزادانه حول لبهٔ مشترک‌شان لولا شده و توسط یک کابل مرکزی و چهار کابل متقارن در گوشه‌ها آویخته شده است. کشش T در هر یک از کابل‌های گوشه و کشش T_0 را در کابل مرکزی محاسبه کنید.



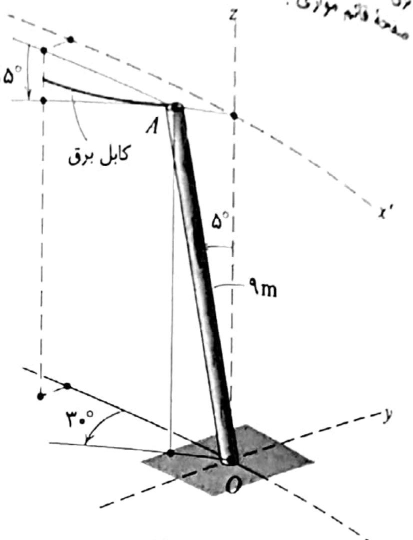
شکل م ۸۰.۳

۸۱.۳ کرهٔ یکنواخت صافی در یک شکاف ۱۲۰° قرار داشته و به ورقی که بر امتداد شکاف عمود است تکیه دارد. زاویهٔ θ نسبت به افق را که برای آن، واکنش واردشده بر هریک از وجوه شکاف مساوی با نیروی وارد بر صفحهٔ عمود است، تعیین کنید.



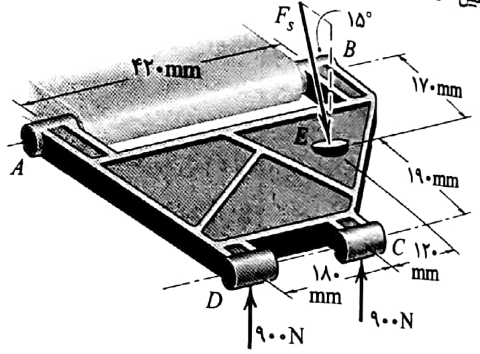
شکل م ۸۱.۳

۸۲.۳ به‌دلیل ترکیب شرایط تکیه‌گاهی خاک و کشش تک‌کابل برق، دیرک [نگه‌دارنده] ۵° منحرف شده است. جرم واحد طول دیرک ۹ متری برابر ۲۵kg/m و [کشش کابل] برق ۹۰۰N است. واکنش‌ها در پایهٔ O را تعیین کنید. توجه کنید که این [کا]بل در صفحهٔ قائم موازی با صفحهٔ x-z قرار دارد.



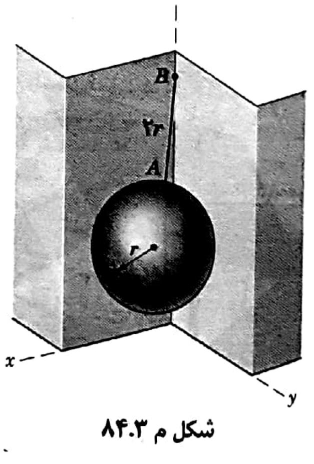
شکل م ۸۲.۳

۸۳.۳ به‌عنوان بخشی از بازبینی کیفیت طرح، بازوی پایینی A را (قطعه‌ای از سیستم [تعل]یق اتومبیل) در یاتاقان‌های A و B قرار داده و دو نیروی ۹۰۰ نیوتنی را در C و D به آن اعمال می‌کنند. فنر سیستم تعلیق که نشان داده نشده، مطابق شکل نیروی F_S را در نقطهٔ E واقع در صفحهٔ $ABCD$ اعمال می‌کند. اندازهٔ F_S نیروی فنر و مقادیر F_A و F_B نیروهای تکیه‌گاهی در A و B را که عمود بر محور لولای AB هستند تعیین کنید.



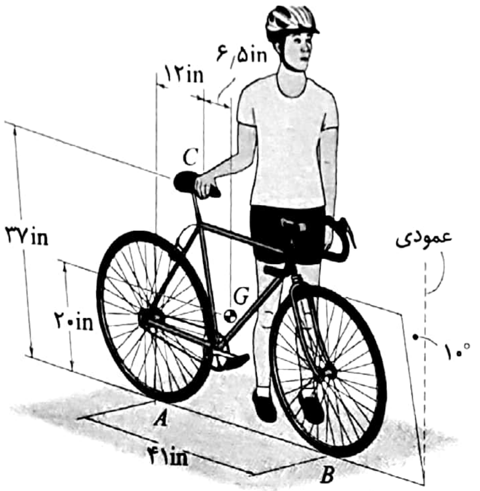
شکل م ۸۳.۳

۸۴.۳ کره‌ای همگن و صاف به‌جرم m و شعاع r به‌وسیلهٔ سیم AB به‌طول $2r$ بر نقطهٔ B روی خط تقاطع دو دیوار با زاویهٔ قائم نسبت به یکدیگر آویزان است. واکنش R بر دیوار را در برابر کره تعیین کنید.



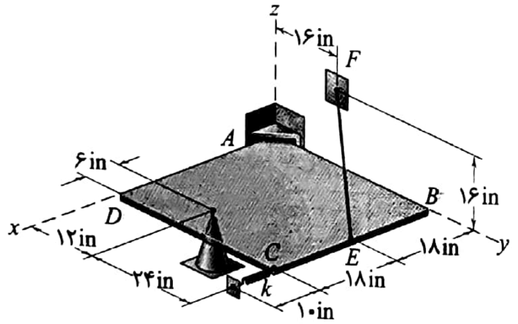
شکل م ۸۴.۳

۸۵.۳ دوچرخه‌سواری دوچرخه‌اش را با زاویهٔ ۱۰° مطابق شکل با واردکردن نیرویی عمود بر صفحهٔ قاب دوچرخه نگه داشته است. اگر اصطکاک در نقاط A و B برای جلوگیری از لیزخوردن کافی باشد، نیروی وارد از طرف دوچرخه‌سوار بر زمین، نیروی عمودی به‌سمت بالا در A و B، و نیروهای بعدی در نقاط A و B را تعیین کنید. با اینکه دوچرخه برای چرخیدن آزاد است، فرض کنید ساکن باشد. وزن دوچرخه ۲۹lb و مرکز گرانی آن در نقطهٔ G است.



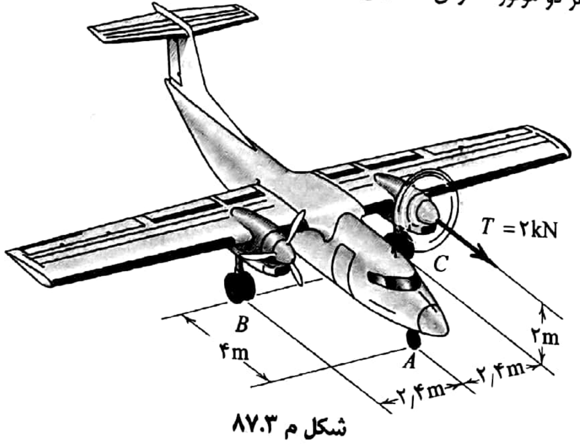
شکل م ۸۵.۳

۸۶.۳ صفحهٔ مربع یکنواخت ۱۰۰ پوندی توسط یک مفصل کاسه‌ـساچمه‌ای در نقطهٔ O، کابلی در نقطهٔ E و ثابت‌کننده‌ای در نقطهٔ A که فقط می‌توانند نیروی عمودی و فنری خطی در نقطهٔ C را تحمل کند، ثابت نگه داشته می‌شود. اگر طول آزاد فنر ۶in باشد، ضریب ثابت k مربوط به فنر لازم برای تعادل در وضع نشان‌داده‌شده را تعیین کنید.



شکل م ۸۶.۳

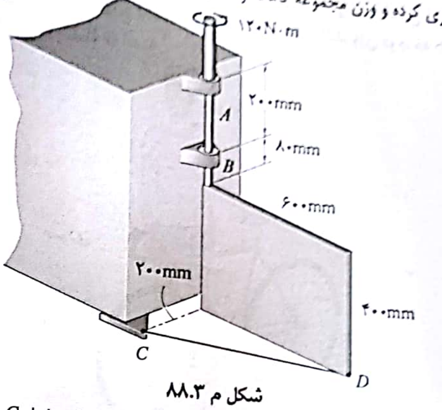
۸۷.۳ موتور سمت چپ یک هواپیمای دوموتوره در طول یک آزمون، نیروی رانش ۲kN ایجاد می‌کند. برای جلوگیری از حرکت هواپیما چرخ‌های اصلی B و C را قفل کرده‌اند. مقدار تغییر در واکنش‌های عمودی در A، B و C را در مقایسه با وقتی که هر دو موتور خاموش‌اند، تعیین کنید.



شکل م ۸۷.۳

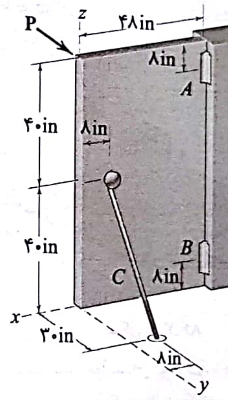
Scanned by CamScanner

۸۸.۳ ورق یکنواخت ۱۵kg را به میل گردان عمودی که توسط یاتاقان‌های A و B نگهداری می‌شود، جوش داده‌اند. مقدار نیروی نگهدارندهٔ یاتاقان B را ضمن واردکردن کوپل ۱۲۰N·m بر محور تعیین کنید. کابل از C تا D، از چرخش صفحه و محور جلوگیری کرده و وزن مجموعه کاملاً توسط یاتاقان A تحمل می‌شود.



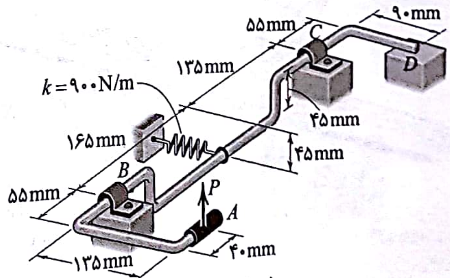
شکل م ۸۸.۳

۸۹.۳ از بازشدن درب صفحه‌ای یکنواخت به‌وزن ۶۰lb به‌کمک حایل C جلوگیری می‌شود. این حایل یک عضو دونیرویی است که یک سر آن به زیر دستگیرهٔ درب محکم شده و سر پایینی آن در فنجانی لاستیکی قرار دارد که روی کف نمی‌لغزد. از بین لولاهای A و B درب، فقط لولای B می‌تواند در امتداد عمودی z نیرو تحمل کند. در زمان اعمال نیروی افقی $P = ۵۰\text{lb}$ عمود بر صفحهٔ درب به‌صورت نشان‌داده‌شده، نیروی فشاری حایل C و مؤلفه‌های افقی نیروهای وارد بر لولاهای A و B را تعیین کنید.



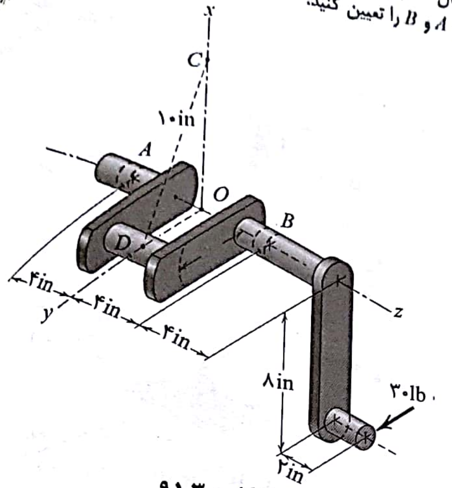
شکل م ۸۹.۳

۹۰.۳ در سازوکار نشان‌داده‌شده در شکل فنری با ضریب ثابت $k = ۹۰۰\text{N/m}$ به‌طول $\delta = ۶۰\text{mm}$ متراکم شده است. نیروی P_{min} لازم برای چرخیدن حول محور آویز BC را محاسبه کرده و مقدار نظیر نیروهای یاتاقان را که عمود بر BC هستند، تعیین کنید اگر $P = P_{min}/۲$ باشد، نیروی واکنش عمودی در D چقدر خواهد بود؟



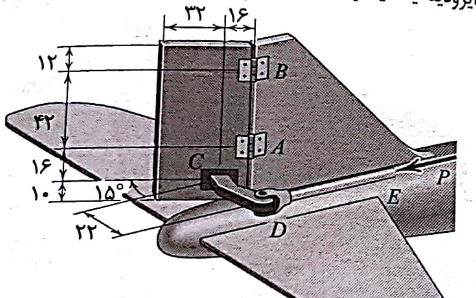
شکل م ۹۰.۳

۹۱.۳ اگر برای نگهداری تعادل میل‌لنگ یک موتور تک‌سیلندر در برابر فشار ... نیروی ۳۰lb لازم باشد، نیروی وارد ... میلهٔ اتصال ۱۰ اینچی در امتداد CD، یاتاقان‌های A و B را تعیین کنید.



شکل م ۹۱.۳

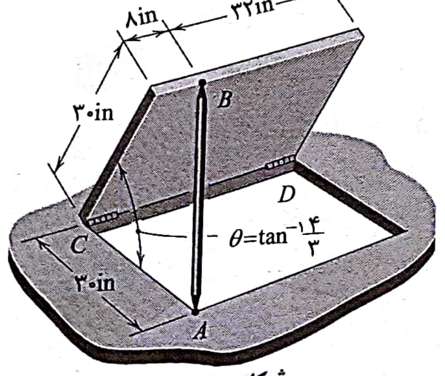
۹۲.۳ ساختار سکان عمودی یک هواپیمای مدل با کنترل رادیویی را در نظر بگیرید ... در موقعیت °۱۵ نشان‌داده‌شده در شکل، فشار اعمال‌شده در سمت چپ سطح مستطیل ... سکان $P = ۴(۱۰^{-۵})\text{N/mm}^۲$ است. نیروی لازم P برای کنترل میلهٔ DE ... مؤلفه‌های افقی در لولاهای A و B که موازی با سطح سکان‌اند را تعیین کنید. فرض ... کنید فشار ایرودینامیک یکنواخت است.



ابعاد برحسب میلیمتر

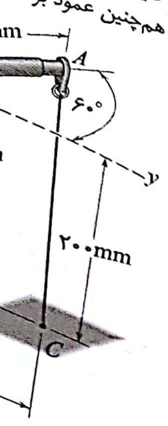
شکل م ۹۲.۳

۹۳.۳ دریچهٔ سقفی یکنواخت ۴۰×۳۰ اینچی با وزن ۲۰۰lb و عمود بر دستگیر... نورگیر AB و تحت زاویهٔ $\theta = \tan^{-۱}(۴/۳)$ باز نگه‌داشته شده است. فشار F_B ... دستگیره و نیروی نگهدارنده توسط لولای D عمود بر محور آویز را محاسبه کنید. فرض کنید آویزها در انتهای خارجی لبهٔ پایینی عمل می‌کنند.

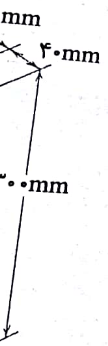


شکل م ۹۳.۳

۹۴.۳ تحت تاثیر پیچش (کوپل) ۴۵۰ نیوتن ...
قید AC چرخش بازوی OA را محدود کرده و ...
شده است. طوقهٔ D برای جلوگیری از حرکت ...
به آن محکم شده است. گشتاور خمشی M، ...
در مقطع B را حساب کنید. (توجه: گشتاور ...
است و سهم نیرو نیز هم‌چنین عمود بر مح...

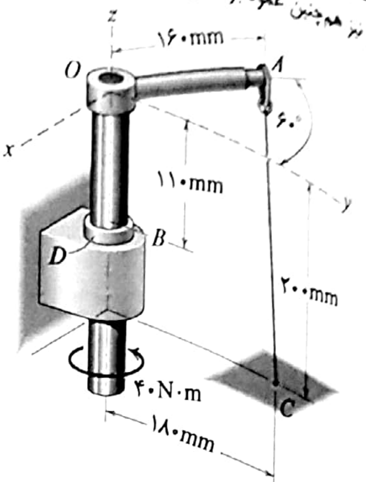


۹۵.۳ یک ابزار سنگ‌زنی برقی ...
محور z ثابت نگه‌داشته می‌شود ...
تماس باشد. ابزار سنگ‌زنی از دو ...
عمودی R در برابر دیسک به‌اند...
مؤلفهٔ نیروی B_x است (یعنی ...
درصد R باشد، مؤلفه‌های کوپل ...
سنگ‌زنی را در وضعیت نشان...
وزن توسط نقطهٔ C نگه‌داشته ...



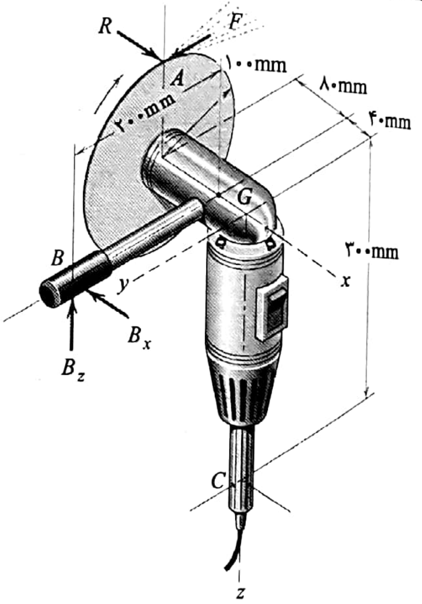
۹۶.۳ سطح مستط...
B به سطح قائم ثا...
افقی نگه می‌دارد...
کند، درصورتی‌که ...
سیم و مقدار B ...

۹۴.۳ ... پیچش (کوپل) ۴۵۰ نیوتن ـ متری وارد بر میل‌گردان عمودی، کابل ... دائم پیچش ... زاوی OA را محدود کرده و با زاویهٔ ۶۰° نسبت به محور y متصل ... طوقهٔ D برای جلوگیری از حرکت به‌سمت پایین میل‌گردان در پاشنه‌اش، ... شده است. گشتاور خمشی M، فشار P، و نیروی برشی V در میل‌گردان ... حرکت کنید. (توجه: گشتاور خمشی به‌منزلهٔ یک بردار، بر محور عمود ... B را حساب کنید ... همچنین عمود بر محور است.)



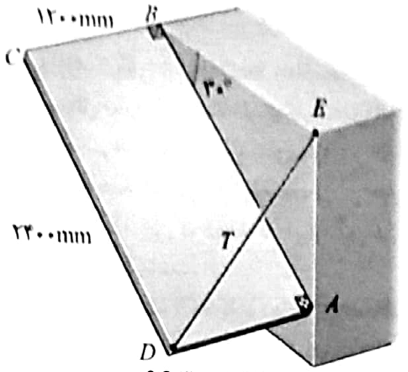
شکل م ۹۴.۳

۹۵.۳ یک ابزار سنگ‌زنی برقی به‌جرم ۳kg و مرکز جرم G در موقعیت قائم در امتداد ... ثابت نگه‌داشته می‌شود تا لبهٔ بالایی A از دیسک سنگ‌زنی با سطح کار در ... ابزار سنگ‌زنی از دو نقطهٔ B و C با دست گرفته می‌شود. اگر نیروی ... باشد. ابزار ... ثابت نگه داشته شود که به‌کلی مربوط به ... R در برابر دیسک به‌اندازهٔ ۲۰N ... نیروی اصطکاک F وارد بر دیسک ۶۰ ... مؤلفهٔ نیروی B_x است (یعنی $C_x = 0$) و اگر نیروی اصطکاک F وارد بر دیسک ۶۰ درصد R باشد، مؤلفه‌های کوپل M که باید بر دسته در نقطهٔ C وارد کرد تا ابزار سنگ‌زنی را در وضعیت نشان‌داده‌شده نگهداری کند، تعیین کنید. فرض کنید که نصف وزن توسط نقطهٔ C نگه‌داشته می‌شود.



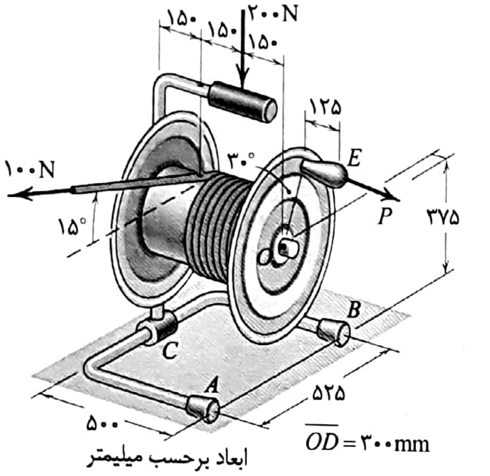
شکل م ۹۵.۳

۹۶.۳ سطح مستطیل یکنواخت $ABCD$ دارای جرم ۴۰kg بوده و از گوشه‌های A تا B به سطح قائم ثابتی مفصل شده است. سیمی از E تا D لبه‌های BC و AD را به‌طور افقی نگه می‌دارد. آویز A می‌تواند نیروی پیش‌ران در امتداد محور آویز AB را تحمل کند درصورتی‌که آویز B تنها نگهدارندهٔ نیروی عمود بر محور آویز است. کشش T در سیم و مقدار B نیروی نگهدارنده توسط B را معین کنید.



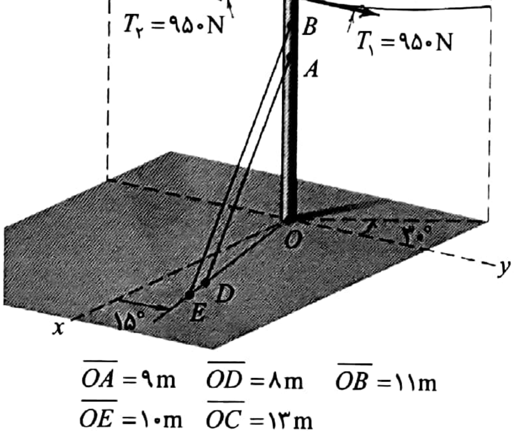
شکل م ۹۶.۳

۹۷.۳ قرقرهٔ متحرک برای پیچیدن و ذخیرهٔ یک لولهٔ هوا استفاده می‌شود. کشش در لولهٔ ۱۰۰N است و نیروی ۲۰۰N قائم بر دسته برای پیچیدن منظم به‌کار می‌رود. حداقل نیروی P که باید به‌طور عمودی بر دستهٔ DE وارد شود و مؤلفه‌های عمودی نیروی واکنش در پایهٔ A، B و C را تعیین کنید. قطر حلقهٔ پیچیده‌شدهٔ لوله ۳۰۰mm و وزن قرقرهٔ پیچشی و قاب آن ناچیز است. توجه کنید نیروی P بر OD عمود است. هر فرضی را بیان کنید.



شکل م ۹۷.۳

۹۸.۳ صفحهٔ قائم شامل کابل برق، در محل تیر عمودی OC به‌میزان ۳۰° می‌چرخد. کشش T_1 و T_2 هردو ۹۵۰N هستند. برای پیشگیری از کج‌شدن این تیر در زمان طولانی، از سیم‌های نگهدارندهٔ AD و BE کمک می‌گیریم. اگر این دو سیستم نگهدارنده طوری تنظیم شوند تا کشش‌های مساوی T را منتقل کنند، گشتاور حول O را به صفر کاهش می‌دهند. در این حالت، واکنش‌های افقی خالص در O را تعیین کنید. از وزن تیر عمودی صرف‌نظر کنید.



شکل م ۹۸.۳

Scanned by CamScanner

۵.۳ مروری بر فصل

در فصل ۳ دانش خود را از خواص نیروها، گشتاورها و کوپل‌ها که در فصل ۲ فراگرفتیم، را در حل مسائل تعادل اجسام صلب به‌کار بردیم. تعادل یک جسم ایجاب می‌کند که برایند برداری همهٔ نیروهای وارد بر جسم برابر صفر باشد ($\Sigma \mathbf{F} = 0$) و نیز برایند همهٔ گشتاورهای واردشده بر آن حول یک نقطه (یا محور) نیز صفر باشد ($\Sigma \mathbf{M} = 0$). این دو شرط که درک فیزیکی آنها بسیار ساده است، در تمام راه‌حل‌ها راهنمای ماست.

اغلب خود نظریه مشکل نیست، بلکه کاربردهای آنهاست که مشکل‌ساز می‌شود. مراحل اصلی در کاربرد اصول تعادل، باید تاکنون کاملاً شناخته‌شده باشد. این مراحل عبارت‌اند از:

۱. برای یک سیستم مورد تحلیل (یا یک جسم یا مجموعهٔ اجسام) در تعادل تصمیم روشن و صریح بگیرید.

۲. جسم مورد نظر را با رسم *نمودار جسم آزاد* از همهٔ اجسامی که با آن در تماس هستند مجزا کنید و بر روی آن، همهٔ نیروها و کوپل‌های واردشده از سوی اجسام خارجی را نشان دهید.

۳. در هنگام مشخص‌کردن کوپل هر نیرو، به اصل کنش و واکنش (قانون سوم نیوتن) توجه داشته باشید.

۴. همهٔ نیروها و کوپل‌های معلوم و مجهول را طبقه‌بندی کنید.

۵. انتخاب و طبقه‌بندی محورهای مرجع، پیوسته با انتخاب شیوهٔ قانون دست راست وقتی روش عملیات برداری به‌کار می‌رود، انجام می‌شود (این معمولاً حالتی است که برای تحلیل سه‌بعدی به‌کار می‌رود).

۶. کفایت قیدها (تکیه‌گاه‌ها) را بازبینی کنید و تعداد مجهولات را با تعداد معادله‌های تعادل مستقل موجود مطابقت دهید.

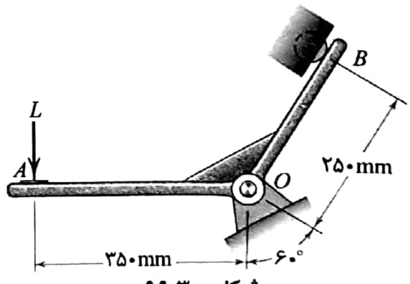
وقتی یک معادلهٔ تعادل را حل کردیم، باید ابتدا وارسی کنیم که جسم از نظر استاتیکی معین است و یا نامعین. اگر در آن تعداد تکیه‌گاه‌ها بیش از تعداد لازم برای نگهداشتن جسم در جای خود باشد، جسم از نظر استاتیکی نامعین است و معادلات تعادل برای حل همهٔ واکنش‌های خارجی قابل قبول نخواهد بود. در هنگام به‌کاربردن معادلات تعادل، براساس سلیقه و تجربهٔ خود، روش جبر عددی، جبر برداری و یا تحلیل ترسیمی را انتخاب می‌کنیم. استفاده از جبر برداری، به‌خصوص برای حل مسائل سه‌بعدی مناسب‌تر است.

با انتخاب گشتاور حول یک محور که باعث حذف چند مجهول می‌شود، یا با انتخاب جهتی برای جمع بستن نیروها که از به‌کاربردن برخی مجهولات جلوگیری می‌کند، می‌توان عملیات جبر برداری را ساده‌تر کرد. اندکی تفکر برای ساده‌سازی مسئله، در وقت و انرژی صرفه‌جویی زیادی می‌کند.

اصول و روش‌های بیان‌شده در فصل‌های ۲ و ۳ اساسی‌ترین بخش استاتیک را تشکیل می‌دهند. این اصول و روش‌ها، مبانی بحث‌های آیندهٔ استاتیک و همچنین دینامیک هستند.

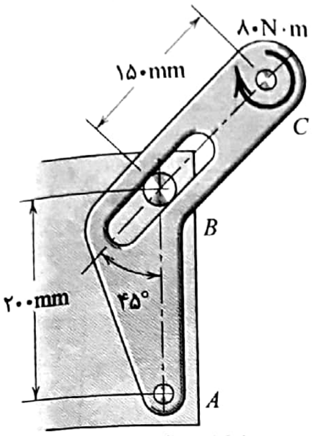
مسائل دوره‌ای

۹۹.۳ پین در O می‌تواند حداکثر نیروی ۳٫۵kN را تحمل کند. ماکزیمم بار L که بر نگهدارندهٔ AOB می‌توان وارد کرد، چه‌اندازه است؟



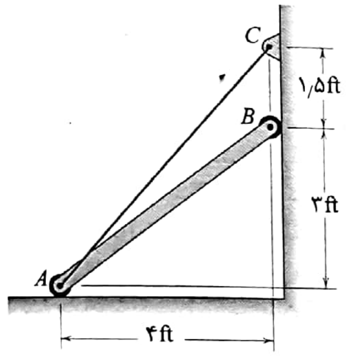
شکل م ۹۹.۳

۱۰۰.۳ دیوارکوب سبک ABC آزادانه در نقطهٔ A لولاشده و به‌واسطهٔ قید پین در نقطهٔ B تحت فشار قرار دارد. مقدار R نیروی تکیه‌گاهی که توسط پین تحت تأثیر کوپل ۸۰N·m تحمل می‌شود را محاسبه کنید.



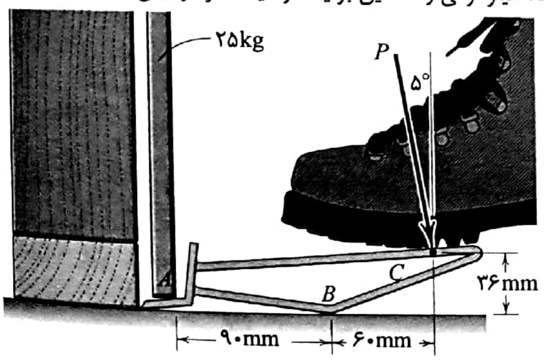
شکل م ۱۰۰.۳

۱۰۱.۳ میلهٔ یکنواخت با غلتک‌های انتهای آن به‌وزن ۶۰lb توسط سطوح افقی و عمودی و سیم AC نگهداری می‌شود. کشش T در سیم و واکنش غلتک‌ها در نقاط A و B را تعیین کنید.



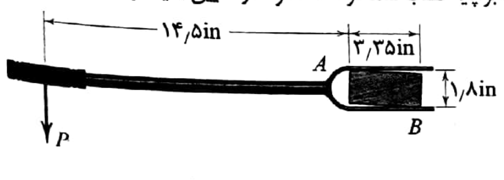
شکل م ۱۰۱.۳

۱۰۲.۳ وسیلهٔ نشان‌داده‌شده در شکل برای بالابردن صفحات دیواری و قراردادن آ در موقعیت قبل از اتصال به دیوار، استفاده می‌شود. مقدار نیروی P لازم برای بالابر صفحهٔ ۲۵ کیلوگرمی را تخمین بزنید. فرضیات خود را بیان کنید.



شکل م ۱۰۲.۳

۱۰۳.۳ ابزار نشان‌داده‌شده برای صاف‌کردن عضوهای تابیده، پس از تکمیل قاب‌ها چوبی به‌کار می‌رود. اگر نیروی $P = 30\text{lb}$ مطابق شکل بر دسته اعمال شود، نیروها عمودی وارد بر پایهٔ نصب شده در نقاط A و B را تعیین کنید. از اصطکاک صرف‌نظر کنید.

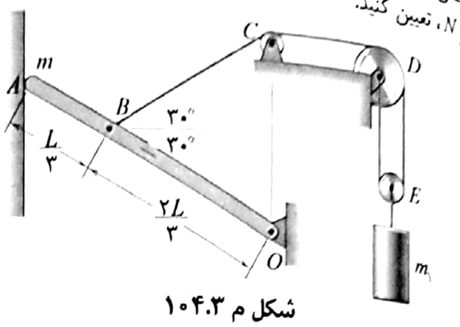


شکل م ۱۰۳.۳

Scanned by CamScanner

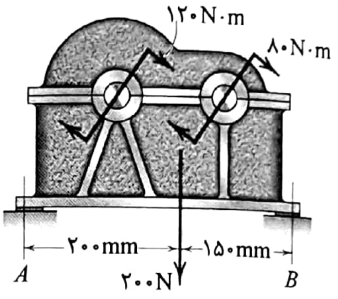
تعادل

۱۰۴.۳ عبارت کلی برای نیروی عمودی N_A وارد شده از طرف دیوار عمودی صاف بر میلهٔ یکنواخت باریک به‌جرم m وطول L را به‌دست آورید. جرم استوانه $m_۱$ است و همهٔ یاتاقان‌ها ایده‌آل‌اند. مقدار $m_۱$ را در صورتی‌که (الف) $N_A = mg/۲$ و (ب) $N_A = ۰$، تعیین کنید.



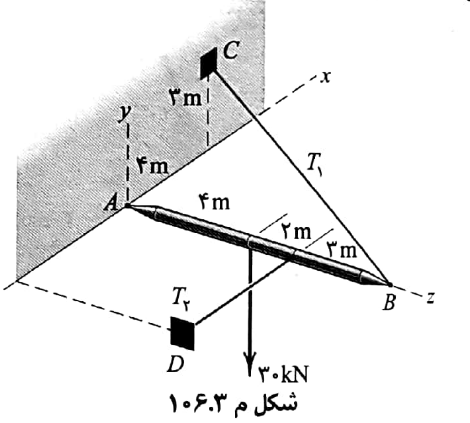
شکل م ۱۰۴.۳

۱۰۵.۳ به چرخ‌دندهٔ نشان‌داده‌شده به‌وزن ۲۰۰N، دو کوپل وارد می‌شود. برای نصب‌کردن صحیح، نیروی عمودی متحمل‌شده در هر نوبت نصب در نقاط A و B را تعیین کنید.



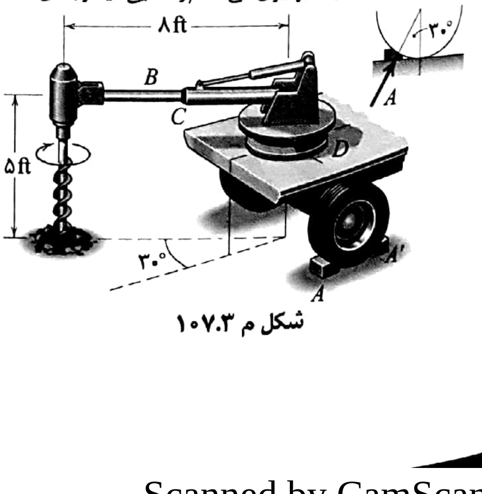
شکل م ۱۰۵.۳

۱۰۶.۳ اگر وزن دیرک نسبت به نیروی بار وارد بر آن یعنی ۳۰kN، ناچیز باشد، اندازهٔ کابل‌های کششی $T_۱$ و $T_۲$ در نقطهٔ مفصل کاسه ـ ساچمه‌ای A را تعیین کنید.



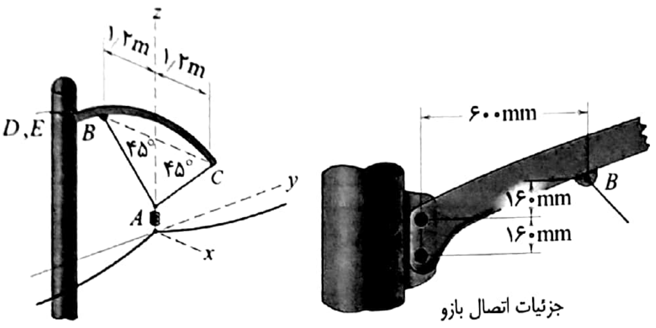
شکل م ۱۰۶.۳

۱۰۷.۳ ماشین حفار برای نصب دیرک، گشتاوری برابر ۴۰۰۰lb·in را به متهٔ حلزونی وارد می‌کند. بازوی B برای داخل شدن و لغزیدن در غلاف تکیه‌گاهی C آزاد است، اما برای چرخیدن حول محور افقی C آزاد نیست. اگر محور میل‌گردان دستگاه برای چرخیدن، حول محور قائم در D آزاد باشد نیروی وارد شده از طرف قطعهٔ A (یا A') وارد بر چرخ راست عقبی را تعیین کنید که از حرکت ماشین حفار با چرخ‌های آزاد جلوگیری می کند. (*راهنمایی:* دید از بالای دستگاه است.)



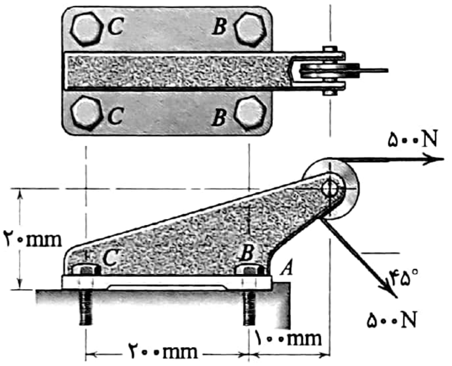
شکل م ۱۰۷.۳

۱۰۸.۳ بازوی منحنی BC متصل به کابل‌های AB و AC نیروی خطی را نگه می‌دارد که در صفحهٔ قائم $z-y$ قرار دارد خط مماس بر نیروی خطی در عایق زیر A، زاویهٔ ۱۵° با خط افقی y می‌سازد. اگر کشش نیروی خطی بر عایق ۱٫۳kN باشد، نیروی کل نگهدارنده توسط پیچ در نقطهٔ D روی ستون نگهدارنده را محاسبه کنید. از وزن بازوی BC نسبت به دیگر نیروها می‌توان صرف‌نظر کرد، و می‌توان فرض کرد که پیچ E تنها نیروی افقی را نگه می‌دارد.



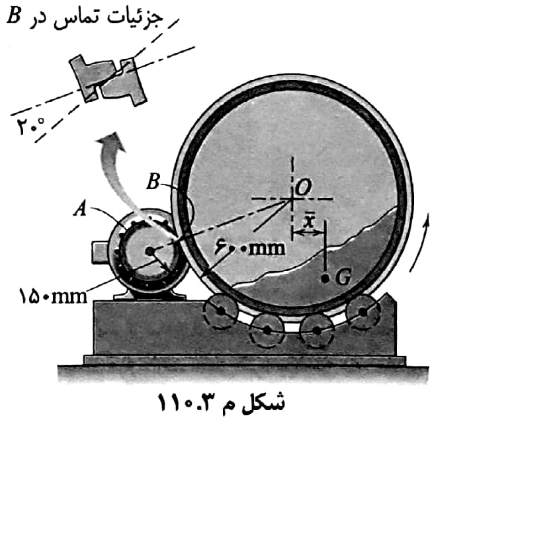
شکل م ۱۰۸.۳

۱۰۹.۳ قرقرهٔ نگهدارنده باعث ایمنی در پایه توسط دو پیچ B و دو پیچ C است. در هر چهار پیچ کشش ۵۰۰N در کابل اعمال شده است. افزایش کشش ΔT در هریک از پیچ‌های C، و افزایش نیروی ΔF در B در هر طرف نگهدارنده، در اثر واردکردن کشش در کابل را تعیین کنید. فرض کنید سوراخ‌های پیچ نسبت به همهٔ نیروهای افقی توسط زبانهٔ کوچکی در A بیش از اندازه پایدار و محکم باشد. همچنین فرض کنید که واکنش‌های عمودی روی پایه در مرکز خطوط پیچ‌ها متمرکز باشند. این فرضیات باید معرف طراحی مورد نظر باشند.



شکل م ۱۰۹.۳

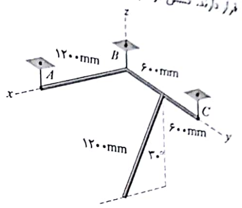
۱۱۰.۳ استوانهٔ بزرگ و متقارنی برای خشک‌کردن ماسه توسط سیستم موتور و چرخ‌دندهٔ نشان‌داده‌شده به‌کار می‌افتد. با توجه به جرم ۷۵۰ کیلوگرمی ماسه و نیروی متوسط ۲٫۶kN دندانهٔ چرخ‌دنده که توسط موتور و چرخ‌دندهٔ A به‌چرخ‌دندهٔ استوانه و عمود بر سطح تماس نقطهٔ B وارد می‌شود، فاصلهٔ متوسط $\bar{x}$ و مرکز جرم G ماسه را از خط مرکزی قائم استوانه تعیین کنید. از همهٔ اصطکاک‌ها در تکیه‌گاه غلتشی صرف‌نظر کنید.



شکل م ۱۱۰.۳

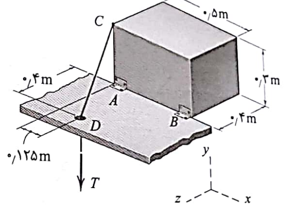
Scanned by CamScanner

۱۱۱.۳ هریک از سه میلهٔ یکنواخت به‌طول ۱۲۰۰mm دارای جرم ۲۰kg است. میله‌ها به هم جوش داده شده و با ترکیب‌بندی زیر توسط سه سیم قائم اویخته شده‌اند. میله‌های AB و BC در صفحهٔ (x-y) افقی و میلهٔ سومی در صفحهٔ موازی با صفحهٔ (x-z) قرار دارد. کشش در هر سیم را محاسبه کنید.



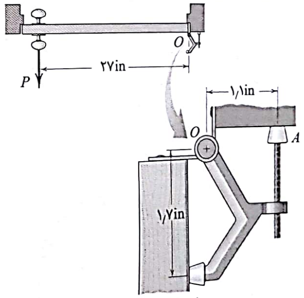
شکل م ۱۱۱.۳

۱۱۲.۳ کشش لازم T برای نگه‌داشتن مستطیل صلب در وضع نشان‌داده‌شده را تعیین کنید. وزن مستطیل صلب همگن ۱۲۵kg است. اصطکاک در نقطهٔ D ناچیز است.



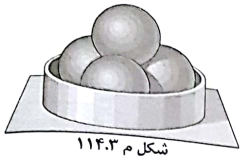
شکل م ۱۱۲.۳

۱۱۳.۳ نوعی از درب‌های قابل تنظیم بر روی پین‌های آویز مطابق شکل نصب می‌شود. در نمایش معمولی درب بسته است و در تصویر بزرگ‌شده درب با زاویهٔ ۹۰° باز است. اگر شخصی دستگیرهٔ درب را با نیروی P برابر ۱lb عمود بر درب در وضعیت ۹۰° (باز) به‌طرف خود بکشد، نیروی F_A را موقعی که درب ضربه‌گیر بر دیوار فشار فراوانی وارد می‌کند تعیین کنید. مسئله را در دوبعد حل کنید.



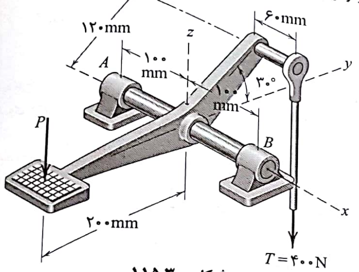
شکل م ۱۱۳.۳

۱۱۴.۳ سه کرهٔ مشابه فولادی، هریک به‌جرم m در حلقهٔ استوانه‌ای که در سطح افقی ساکن و ارتفاع آن کمی بزرگ‌تر از شعاع کره‌هاست، قرارگرفته‌اند. قطر حلقه طوری است که کره‌ها عملاً مماس برهم قرار دارند. سپس کرهٔ چهارمی بر بالای سه کره قرار می‌گیرد. نیروی P وارد از سوی حلقه بر هریک از سه حلقهٔ زیرین را محاسبه کنید.



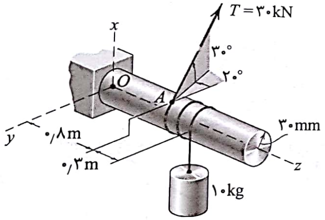
شکل م ۱۱۴.۳

۱۱۵.۳ برای ایجاد کششی برابر با $T = 400N$ در میلهٔ کنترل عمودی، نیروی عمودی P بر صفحهٔ ترمز توسط میل‌لنگ مورد نیاز است. واکنش‌های نظیر در A و B را تعیین کنید.



شکل م ۱۱۵.۳

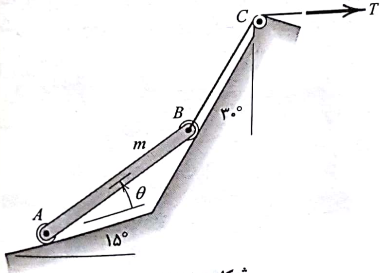
۱۱۶.۳ وقتی مبحث اصطکاک را در فصل ۶ بیان می‌کنیم، مطابق شکل، ملاحظه خواهیم کرد که نیروی بزرگی مانند T برای بالابردن جسم ۱۰kg، وقتی کابل دور استوانه‌ای پیچیده شده، لازم است. برای مقادیر تعادل استاتیکی نشان‌داده‌شده، واکنش نیرو و گشتاور در نقطهٔ O به‌فاصلهٔ ۰٫۳m از نقطهٔ A را، که در آنجا تماس کابل با استوانه قطع می‌شود، معین کنید. از وزن استوانهٔ ثابت صرف‌نظر شود.



شکل م ۱۱۶.۳

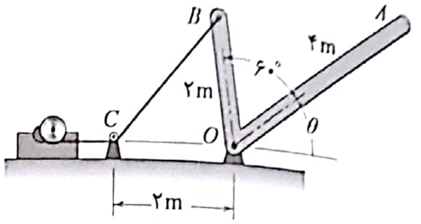
مسائل کامپیوتری

۱۱۷.۳* نسبت کشش T/mg لازم برای نگهداری میلهٔ بلند و یکنواخت در وضع تعادل را به‌ازای هر زاویهٔ θ در بازهٔ $0 < \theta < 45°$ تعیین و ترسیم کنید. میلهٔ AB یکنواخت و جرم آن m است.



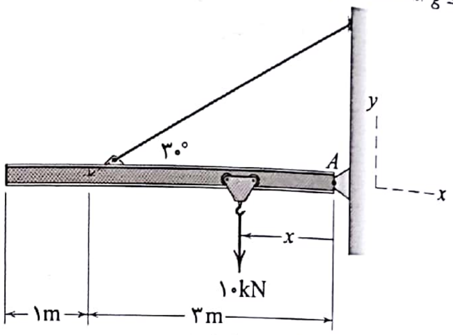
شکل م ۱۱۷.۳

[...] معادل
۱۱۸.۳ کشش T را برحسب تابعی از θ که باید توسط آچار برای چرخش منظم سازه‌ای حول محور O ثابت باشد را رسم و تعیین کنید. حدود θ [...] $\theta_{max} \leq \theta \leq ۰$ است که در آن θ_{max} مقداری از θ است که در آن T صفر [...] می‌شود. جرم هر متر از سازه ۳۵kg است.



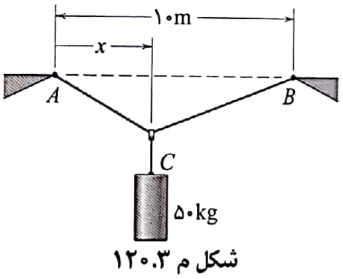
شکل م ۱۱۸.۳

۱۱۹.۳ جرثقیل بازوداری برای حداکثر ظرفیت ۱۰kN طراحی شده و جرم تیر یکنواخت I-شکل، ۲۰۰kg است. (الف) مقدار نیروی R وارد بر پین در نقطهٔ A برحسب تابع x در محدودهٔ عمل $x = ۰٫۲\text{m}$ تا $x = ۳٫۸\text{m}$ را رسم کنید. روی همان محورها مؤلفه‌های x و y واکنش پین در نقطهٔ A را رسم کنید. (ب) مقدار حداقل R و مقدار نظیر x را تعیین کنید. (ج) برای چه‌مقدار R باید پین در نقطهٔ A طراحی شود؟ (از $g = ۱۰\text{m/s}^2$ استفاده شود.)



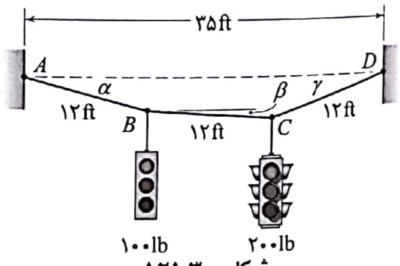
شکل م ۱۱۹.۳

۱۲۰.۳* استوانهٔ ۵۰ کیلوگرمی از یک طوقهٔ گیره‌ای در C آویزان شده که می‌توانـد در هـر وضعیت افقی x بین تکیه‌گاه‌های ثابت در A و B قرارگیرد. طول کابل ۱۱m اسـت. کشـش قطعات AC و BC کابل را برحسب تابعی از x، در فاصلهٔ بین $۰ \leq x \leq ۱۰\text{m}$ ترسیم و تعیین کنید حداکثر مقدار هر کشش برای آنچه در مقدار x رخ می‌دهد، چقدر است؟



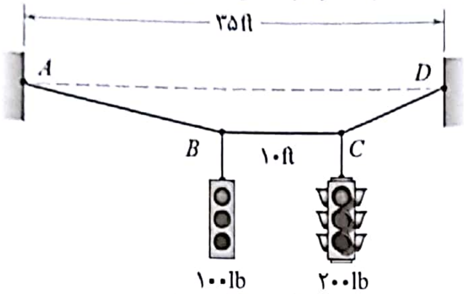
شکل م ۱۲۰.۳

۱۲۱.۳* دو چراغ راهنمایی، مطابق شکل، بـه کـابلی بـه‌طـول ۳۶ft و در فواصل مساوی متصل شده‌اند. زوایای α، β و γ متناظر با شرایط تعادل و همچنین کشش در هر قسمت از کابل را تعیین کنید.



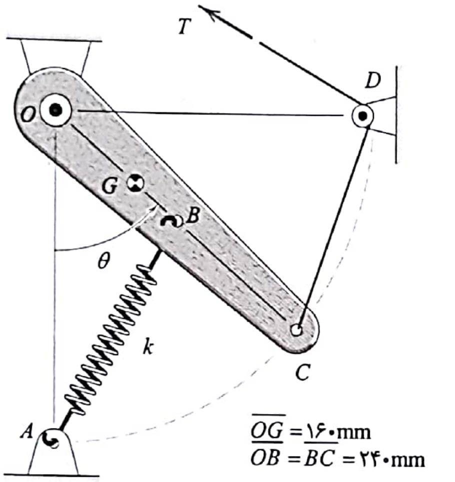
شکل م ۱۲۱.۳

۱۲۲.۳* دو چراغ راهنمایی مسئلهٔ ۱۲۱.۳ جابه‌جا شده و به‌گونه‌ای قرارگرفته‌انـد کـه طول قسمت BC کابل ۳۶ فوتی برابر ۱۰ft اسـت و در امتداد افقـی قـرار مـی‌گیـرد. طول‌های مورد نیاز AB و CD و نیز کشش در هر سه کابل را مشخص کنید.



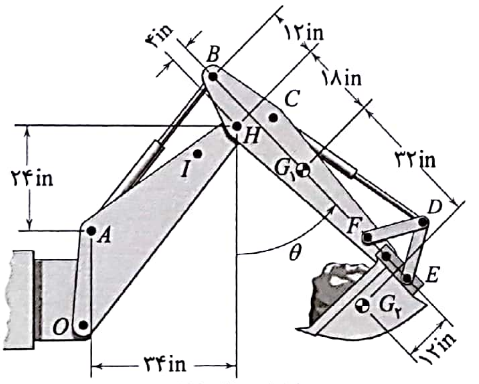
شکل م ۱۲۲.۳

۱۲۳.۳* مرکز جرم اتصال OC به‌جرم ۱٫۵kg در نقطهٔ G واقع شده، و فنر با ضریب ثابت $k = ۲۵\text{N/m}$، وقتـی $\theta = ۰$، در حالـت غیرمتـراکم (آزاد) اسـت. کشـش T لازم بـرای تعـادل اسـتاتیکی در محـدودهٔ $۰ \leq \theta \leq ۹۰°$ را رسـم کنیـد و مقـادیر T را بـرای حالت $\theta = ۴۵°$ و $\theta = ۹۰°$ مشخص کنید.



شکل م ۱۲۳.۳

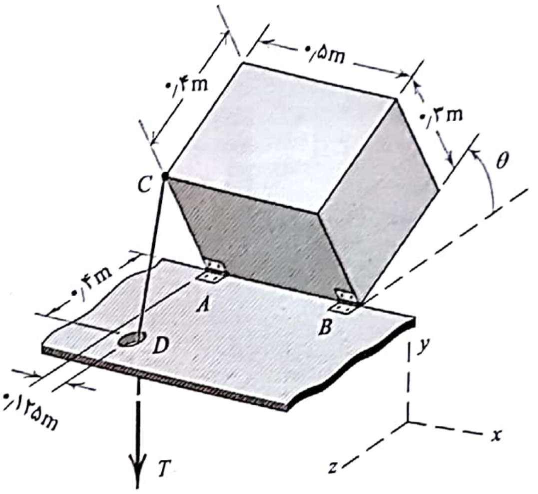
۱۲۴.۳* مشخصات اصلی یک بیل مکانیکی کوچک در شکل نشان داده شده است. عضـو BE (به‌همراه سیلندر هیدرولیکی CD و میله‌های کنترل‌کنندهٔ DF و DE جام) ۵۰۰lb وزن داشته و مرکز جرم آن در G_1 است. جام و خاک داخل آن ۳۵۰lb جرم دارد و مرکز جـرم آن در G_2 است. برای بررسی مشخصات طراحی بیل مکانیکی، نیروی T در سیلندر هیدرولیکی AB را به‌صورت تابعی از موقعیت زاویه‌ای θی عضو BE در بازهٔ $۰ \leq \theta \leq ۹۰°$ تعیین و رسم کنید. به‌ازای چه‌مقدار θ، نیروی T برابر صفر است. در این تمرین، عضـو OH ثابت فـرض شده است و دقت کنید که سیلندر هیدرولیکی کنترل‌کنندهٔ ایـن عضـو (نشان داده نشـده) از نزدیک نقطهٔ O تـا مفصـل I امتـداد دارد. بـه‌طـور مشـابه، طـول CD سـیلندر هیـدرولیکی کنترل‌کنندهٔ جام نیز ثابت در نظر گرفته می‌شود.



شکل م ۱۲۴.۳

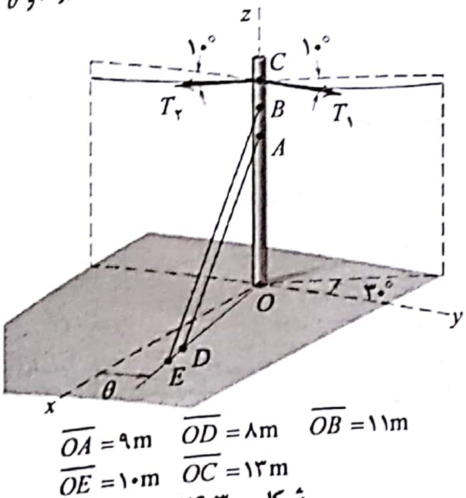
Scanned by CamScanner

۱۲۵.۳* در اینجا سیستم مسئلهٔ ۱۱۲.۳ دوباره نشان داده شده، با این تفاوت که در اینجا مکعب‌مستطیل ۱۲۵ کیلوگرمی نسبت به محور لولایی AB به‌اندازهٔ زاویهٔ θ چرخیده است. کمیت‌های T، A_y، A_z، B_x، B_y و B_z را به‌صورت توابعی از θ در بازهٔ $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ تعیین و رسم کنید. مفصل A نمی‌تواند نیروی محوری اعمال کند.



شکل م ۱۲۵.۳

۱۲۶.۳* تیر عمودی، کابل برق، و دو سیستم نگهدارندهٔ مسئلهٔ ۹۸.۳ را در نظر بگیر[ید]
به‌عنوان بخشی از مطالعات طراحی، شرایط زیر در نظر گرفته می‌شود. کشش T_2 برابر مقـ[ـدار]
ثابت $1000\,N$ است، و زاویهٔ 10° آن محکم شده است. زاویهٔ 10° برای T_1 نیز ثابت فر[ض]
می‌شود، ولی مقدار T_1 می‌تواند از صفر تا $2000\,N$ تغییر کند. برای هر مقدار T_1، [...]
کشش‌های مساوی T در کابل‌های AD و BE و نیز زاویهٔ θ را که به‌ازای آن مقدار گشـ[ـتاور]
در O صفر می‌شود، تعیین و ترسیم کنید. برای $T_1 = 1000\,N$، مقادیر T و θ را بیان کنید.



شکل م ۱۲۶.۳

Scanned by CamScanner

۴

سازه‌ها

۱.۴ مقدمه
۲.۴ خرپاهای مسطح
۳.۴ روش مفصل‌ها
۴.۴ روش مقاطع
۵.۴ خرپاهای فضایی
۶.۴ قاب‌ها و ماشین‌ها
۷.۴ مروری بر فصل

۱.۴ مقدمه

در فصل ۳ تعادل یک جسم منفرد صلب یا سیستم عضوهای متصل به‌هم که مانند یک جسم صلب رفتار می‌کند را آموختیم، ابتدا نمودار جسم آزاد را با نشان دادن همهٔ نیروهای خارجی وارد بر جسم منفرد رسم کردیم، و سپس معادلات تعادل نیرو و گشتاور را برای آن به‌کار بردیم. در فصل ۴ بر تعیین نیروهای داخلی در یک سازه، یعنی نیروهای کنش و واکنش بین اعضای متصل به‌هم تمرکز می‌کنیم. یک سازهٔ مهندسی از هرگونه سیستم عضوهای متصل به‌هم که برای نگهداری یا انتقال نیرو ساخته شده است و در برابر نیروهای وارد بر خود به‌طور مطمئن ایستادگی می‌کند. برای تعیین نیروهای یک سازهٔ مهندسی باید عضوهای سازه را از هم جدا کرده و نمودارهای آزاد منفرد هر عضو یا ترکیبی از عضوها را تحلیل کنیم. این تحلیل‌ها مستلزم کاربرد دقیق قانون سوم نیوتن است، که بیان می‌دارد: هر کنش دارای یک واکنش برابر و در خلاف جهت کنش است.

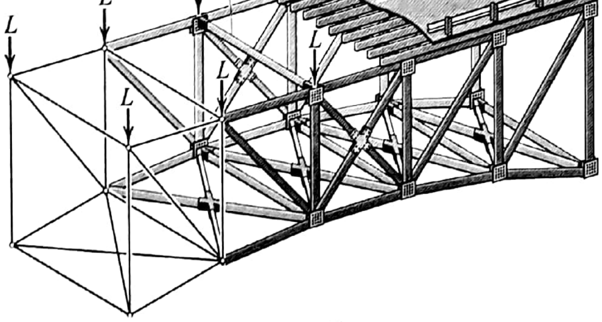
در این فصل نیروهای داخلی وارد بر انواع مختلف سازه، یعنی خرپاها، قاب‌ها، و ماشین‌ها را تحلیل می‌کنیم. در این ارتباط تنها سازه‌های *معین استاتیکی* را در نظرگرفتیم، که تعداد قیدهای تکیه‌گاهی آن پیش از تعداد قیدهای لازم برای حفظ حالت سازه نیست. بنابراین، چنانکه پیش از این دیده بودیم، معادلات تعادل برای تعیین تمام واکنش‌های مجهول کافی است.

تحلیل‌های خرپاها، قاب‌ها و ماشین‌ها و تیرهای تحت بارهای متمرکز شامل کاربرد بی‌قید و شرط مطالبی است که در دو فصل قبل شرح دادیم. روش اصلی شرح داده شده در فصل ۳ روش منفردکردن جسم یا رسم صحیح نمودار جسم آزاد است که برای تحلیل سازه‌های معین ضروری است.

۲.۴ خرپاهای مسطح

ساختار مرکب از عضوهایی که در انتهای خود به‌هم وصل شده‌اند، سازه‌ای را تشکیل می‌دهند که به آن خرپا می‌گویند. پل‌ها، تکیه‌گاه‌های سقفی، دکل جرثقیل و سازه‌های دیگر این‌چنینی، مثال‌های معمول از خرپاها هستند. عضوهای سازه‌ای که به‌طور متداول در ساخت خرپاها به‌کار می‌روند عبارت‌اند از: تیرهای I ـ شکل، ناودانی‌ها، نبشی‌ها، میله‌ها، و شکل‌های ویژه‌ای که با جوش، مفصل‌های چرخشی یا پین‌ها و پیچ‌های بزرگ از انتهای خود به یکدیگر وصل می‌شوند. وقتی عضوهای خرپا لزوماً در صفحهٔ منفرد قرارگیرند، به آن *خرپای مسطح* گفته می‌شود.

معمولاً در پل‌ها و سازه‌های مشابه خرپاهای مسطح به‌طور جفت به‌کار می‌روند، به‌گونه‌ای که هر مجموعهٔ خرپا در یک طرف سازه قرار می‌گیرد. در شکل ۱.۴ مقطعی از یک نوع سازهٔ پل متداول نشان داده شده است. وزن ترکیب جاده و وسایل نقلیه ابتدا به تیرهای طولی و سپس به تیرهای عرضی و سرانجام همراه با وزن و سطح تیرهای طولی و تیرهای عرضی به مفصل بالایی تیرهای دو خرپای مسطح که ضلع عمودی خرپا را تشکیل می‌دهد منتقل می‌شود. یک نمونهٔ ساده‌شدهٔ خرپا در زیر نشان داده شده است. نیروهای L بارهای مفصلی را نشان می‌دهد.

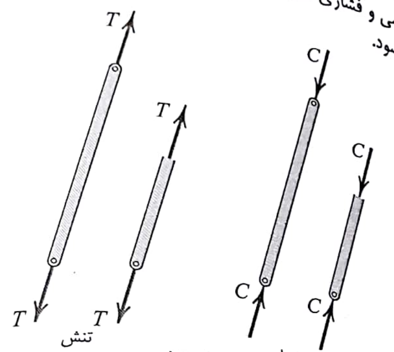


شکل ۱.۴

چندین مثال از خرپای متداول که می‌توان آنها را به‌عنوان خرپاهای مسطح تحلیل کرد، در شکل ۲.۴ نشان داده شده است.

Scanned by CamScanner

همان‌طور که در شکل ۴.۳ نشان داده شده است، عضو ممکن است در کشش و یا در فشار باشد. وقتی تعادل قسمتی از عضو دونیرویی را نشان می‌دهیم، اثر کشش T و یا فشار C وارد بر مقطع عضو در همهٔ مقاطع یکسان است. در اینجا فرض می‌شود که وزن عضو نسبت به نیرویی که باید تحمل کند ناچیز است، در غیر این صورت چنانچه عضو یکنواخت باشد، می‌توان وزن عضو W را با دو نیروی $W/۲$ بر روی هر عضو در نظرگرفت که هریک بر دو نقطهٔ انتهایی عضو وارد شود. رفتار این نیروها مانند بارهای مؤثر بر انتهای پین‌های اتصال‌دهندهٔ عضوهاست. با محاسبهٔ وزن عضو بدین‌طریق، نتیجهٔ درستی برای نیروی کششی و فشاری متوسط در امتداد عضو به‌دست می‌آید، اما خمش عضو منظور نمی‌شود.

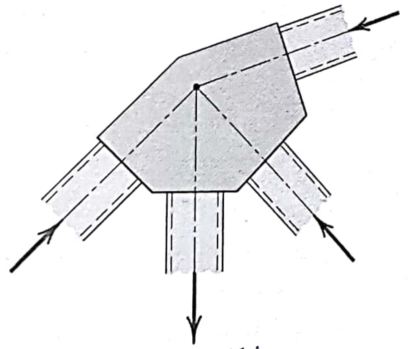


شکل ۴.۴

اتصالات و تکیه‌گاه‌ها در خرپاها

وقتی اتصال‌های جوش یا پرچی برای اتصال عضوها به‌کار برده می‌شود، اگر خط مرکزی عضوها مانند شکل ۵.۴ در آن مفصل یکدیگر را قطع کرده باشند، معمولاً می‌توان فرض کرد که اتصال از نوع مفصلی است.

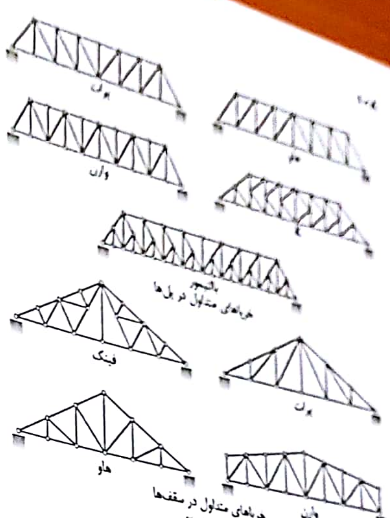
همچنین در تحلیل‌های خرپاهای ساده می‌توان فرض کرد که همهٔ نیروهای خارجی بر اتصال‌های مفصلی وارد می‌شوند. این شرط برای بیشتر خرپاها برقرار است. برای خرپاهای پل، مطابق شکل ۱.۴، معمولاً عرشهٔ پل را روی تیرهای عرضی که به مفصل‌ها تکیه دارد قرار می‌دهند.



شکل ۵.۴

در خرپاهای بزرگ، از تکیه‌گاه غلتکی یا نوعی مفصل لغزان در یکی از تکیه‌گاه‌ها استفاده می‌شود تا انبساط و انقباض حاصل از تغییرات درجه‌حرارت و تغییر شکل حاصل از بارهای وارد شده در نظرگرفته شود. همان‌طور که در بخش ۳.۳ شرح داده شد، اگر خرپا یا سازه‌ای این نوع مفصل را نداشته باشد، نامعین استاتیکی است. شکل ۱.۳ چند نمونه از این مفصل‌ها را نشان می‌دهد.

دو روش برای نیرو و تحلیل‌های خرپاهای ساده ارائه خواهد شد. هریک از این روش‌ها را برای خرپاهای ساده نشان داده در شکل ۶.۴ (الف) شرح خواهیم



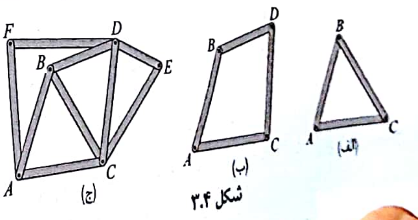
شکل ۲.۴

خرپاهای ساده

مثلث جزء اولیهٔ خرپای مسطح است. سه میله که انتهایشان با پین به‌هم وصل شده‌اند [شکل ۳.۴ (الف)] یک قاب صلب را تشکیل می‌دهند. اصطلاح صلب بدین معنی است که تغییر شکل عضوها در اثر کرنش‌های داخلی ایجاد شده ناچیز است. از سوی دیگر چهار یا تعداد بیشتری میله که به‌صورت یک چندضلعی با پین به یکدیگر مفصل شده‌اند، یک قاب غیرصلب می‌سازد. مانند شکل ۳.۴ (ب)، قاب غیرصلب می‌توان با اضافه کردن یک میلهٔ قطری که A و D یا B و C را به‌هم متصل می‌کند و بدین‌طریق دو مثلث تشکیل می‌دهد، صلب یا پایدار سازیم. می‌توانیم سازه را با اضافه کردن دو میلهٔ متصل به‌هم مانند DE و CE یا AF و DF که به دو مفصل پین می‌شوند، ادامه دهیم [شکل ۳.۴ (ج)]. بدین‌طریق تمام سازه صلب باقی می‌ماند.

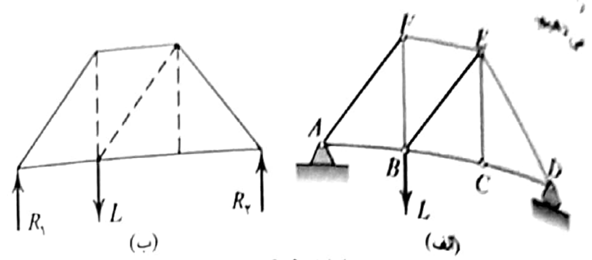
سازه‌هایی که بدین‌ترتیب با اضافه کردن یک جزء مثلثی اولیه ساخته می‌شوند را *خرپاهای ساده* می‌نامند. اگر تعداد اعضای موجود بیش از تعداد مورد نیاز برای جلوگیری از واژگونی باشد، خرپا، *نامعین استاتیکی* خواهد بود. یک خرپای نامعین استاتیکی را نمی‌توان تنها با معادلات تعادل تحلیل کرد. اعضا یا تکیه‌گاه‌هایی که برای برقراری تعادل نیازی به آنها نیست را زاید می‌نامند.

برای طراحی یک خرپا باید ابتدا نیروها در عضوهای مختلف را مشخص و سپس اندازه‌های مناسب و شکل‌های سازه‌ای را طبق استاندارد نیروها انتخاب کنیم. برای تحلیل نیرو در خرپاهای ساده چندین فرض لازم است. نخست فرض می‌شود که همهٔ عضوها عضوی *دونیرویی‌اند* همان‌گونه که در شکل ۴.۳ در بخش ۲.۳ به‌طور کلی توصیف شد عضو دونیرویی عضوی است که تنها در اثر دو نیرو در حالت تعادل باشد. هر عضو یک خرپا اغلب یک اتصال مستقیم است که دو نقطه‌اثر نیرو را به یکدیگر وصل می‌کند. دو نیروی وارد شده بر دو انتهای عضو، برای برقراری تعادل لزوماً برابر و در جهت مخالف و هم‌خط هستند.



شکل ۳.۴

داد. نمودار جسم آزاد خرپاها به‌طور کامل در شکل ۶.۴ (ب) نشان داده شده است. نخست با استفاده از معادلات تعادل برای کل خرپا، واکنش‌های خارجی را تعیین می‌کنیم، سپس تحلیل‌های نیرو برای باقی‌مانده خرپاها را انجام می‌دهیم.

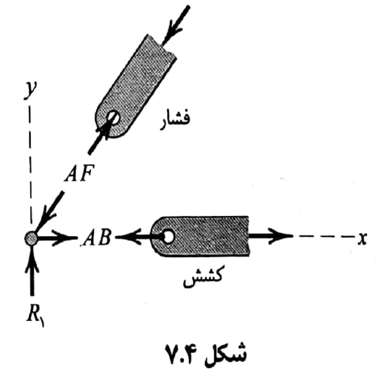


شکل ۶.۴

۳.۴ روش مفصل‌ها

این روش برای پیداکردن نیروهای موجود در اعضای یک خرپا، شامل شرایط تعادل برای نیروهای وارد بر اتصال‌های پین در هر مفصل می‌باشد. از این‌رو این روش با تعادل نیروهای هم‌رس سروکار دارد و تنها دو نیروی تعادل مستقل را شامل می‌شود.

تحلیل از مفصلی شروع می‌شود که در آن حداقل یک بار معلوم، موجود باشد بدون اینکه در آن بیش از دو نیروی مجهول وجود داشته باشد. حل را می‌توان با پین انتهایی سمت چپ شروع کرد. نمودار جسم آزاد در شکل ۷.۴ نشان داده شده است. در مفصل‌هایی که با حروف نام‌گذاری شده‌اند معمولاً نیروها را در هر عضو توسط دو حرف نام‌گذاری شده در انتهای عضو مشخص می‌کنند در این حالت ساده جهت‌های مناسب نیروها روشن است. نمودار جسم آزاد اجزایی از عضوهای AF و AB نیز نشان داده شده است تا سازوکار کنش و واکنش به‌روشنی نشان داده شود. عضو AB در واقع با سمت چپ پین تماس برقرار می‌کند همچنین نیروی AB از سمت راست به خارج پین اثر می‌کند. پس اگر به‌طور پیوسته جهت پیکان‌های نیرو در *همان* جهت نیروی پین رسم شود نیروی کشش (مانند AB) همواره توسط یک پیکان به سمت *خارج* از پین نشان داده می‌شود و فشار (مانند AF) به سمت پین نشان داده می‌شود. مقدار نیروی AF را از معادلهٔ $\Sigma F_y = 0$ و سپس مقدار نیروی AB را از رابطهٔ $\Sigma F_x = 0$ به‌دست می‌آوریم.

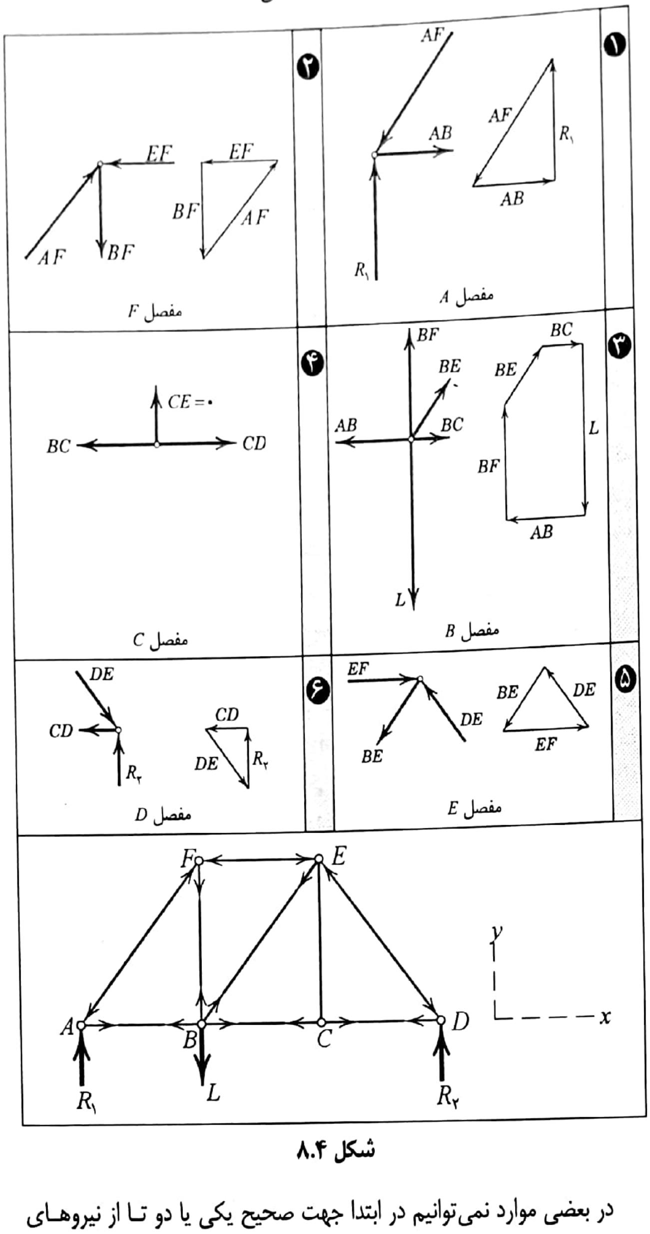


شکل ۷.۴

مفصل F را می‌توان بعداً تحلیل کرد، زیرا اکنون شامل دو مجهول EF و BF است. با حرکت به سمت مفصل دیگر که بیش از دو مجهول ندارد، به‌ترتیب مفصل‌های B، C، E و D را به همان روش تحلیل می‌کنیم. نمودار جسم آزاد هر مفصل و چندضلعی نیروی متناظرش، که دو شرط تعادل $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ را به‌صورت ترسیمی نشان می‌دهد، در شکل ۸.۴ نمایش داده شده است. اعداد نشان داده شده ترتیب مفصل‌های تحلیل‌شده

می‌باشند. یادآور می‌شویم که وقتی به مفصل انتهایی D رسیده‌ایم، واکنش R_2 باید با نیروهای موجود در عضوهای CD و ED که قبلاً از تحلیل از دو مفصل هم‌جوار به‌دست آمده‌اند، در تعادل باشد. این موضوع یک وارسی را برای صحت کارمان فراهم می‌کند. یادآور می‌شویم هنگامی که معادلهٔ $\Sigma F_y = 0$ به‌کار می‌رود، جداسازی مفصل C نشان می‌دهد که نیرو در CE صفر است. البته اگر بار خارجی عمودی در C وارد می‌شد، نیرو در این عضو نباید صفر باشد.

اغلب ساده‌تر است که نیروی کشش T و فشار C بر عضوهای مختلف را مستقیماً بر روی نمودارهای اولیهٔ خرپاها رسم کنیم، به این صورت که پیکان‌ها به سمت خارج از پین‌ها برای کشش و به سمت داخل پین‌ها برای تراکم یا فشار رسم شود. این طراحی در شکل ۸.۴ نشان داده شده است.



شکل ۸.۴

در بعضی موارد نمی‌توانیم در ابتدا جهت صحیح یکی یا دو تا از نیروهای وارد بر یک پین مفروض را مشخص کنیم. اگر چنین باشد، ممکن است یک علامت به‌طور دلخواه در نظر بگیریم، اگر پس از محاسبه جواب منفی بود معنی‌اش این است که جهت فرضی اولیه نادرست بوده است.

قیدهای اضافی داخلی و خارجی

اگر تعداد تکیه‌گاه‌های خارجی یک خرپای مسطح بیش از تعدادی باشد که برای حفظ تعادل پایداری آن احتیاج است، چنین خرپایی را نامعین استاتیکی خارجی

Scanned by CamScanner

پل نیو ریور جورج در ویرجینیای غربی، بلندترین پل قوسی در ایالات متحدهٔ آمریکاست.

این سازهٔ پل شهر نیویورک اشاره بر آن دارد که لزوما اعضای یک خرپای ساده مستقیم نیستند.

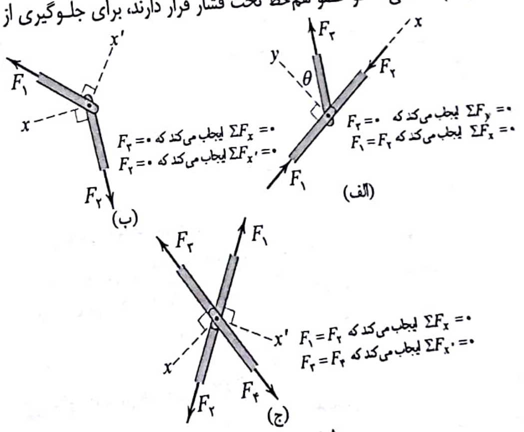
می‌نامند و این تکیه‌گاه‌های اضافی بیشتر از نیاز قید زاید یا اضافی خارجی ایجاد می‌کنند اگر تعداد عضوهای داخلی یک خرپای مسطح بیشتر از تعدادی باشد که برای جلوگیری از واژگونی خرپا هنگام جدایی از تکیه‌گاه‌هایش احتیاج است، مازاد نیاز را قید زاید داخلی می‌نامند، و باز هم همچنین خرپایی نامعین استاتیکی است.

در یک خرپای معین استاتیکی مسطح بین تعداد عضوها و تعداد مفصل‌هایی که برای پایداری خرپا لازم است، بدون وجود اعضای زاید، رابطهٔ معینی وجود دارد. چون تعادل هر مفصل را می‌توان با دو نیروی عددی تشخیص داد، برای خرپای ساده‌ای با j مفصل، تعداد $2j$ معادله وجود دارد. برای خرپایی متشکل از m عضو دونیرویی حداکثر مجهولات $m+3$ (m نیروی کششی یا فشاری و سه واکنش) است. بنابراین هرگاه خرپای معین استاتیکی داخلی باشد، در هر خرپای مسطح رابطهٔ $m+3=2j$ برقرار خواهد بود.

در یک خرپای مسطح *ساده* رابطهٔ بالا به‌طور خودکار برقرار می‌شود. توضیح آنکه برای جزء اصلی این خرپا که به‌صورت مثلث است، $m=j=3$، و هر بار که دو عضو جدید همراه با یک مفصل به این جزء مثلث افزوده می‌شود به m (۲ عدد) و به j (۱ عدد) اضافه می‌شود. در سایر خرپاهای غیرسادهٔ معین استاتیکی مانند خرپای K در شکل ۲.۴ که به شکل دیگری ترتیب و تشکیل می‌شوند، رابطهٔ فوق برقرار خواهد بود. رابطهٔ $m+3=2j$ شرط لازم برای پایداری یک خرپا محسوب می‌شود اما شرط کافی نیست، زیرا یک یا چند عضو خرپا را می‌توان طوری افزایش و آرایش داد که خرپا پایدار نباشد. اگر $m+3>2j$، تعداد عضوها بیشتر از معادله‌های مستقل تعادل است و خرپا نامعین استاتیکی داخلی خواهد بود. اگر $m+3<2j$، تعداد عضوها برای پایداری خرپا کافی نبوده، و خرپا تحت تأثیر بار واژگون می‌شود.

شرایط خاص

در تحلیل خرپاها به‌طور معمول با شرایط خاص روبه‌رو می‌شویم. مطابق شکل ۹.۴ (الف) هنگامی که دو عضو هم‌خط تحت فشار قرار دارند، برای جلوگیری از



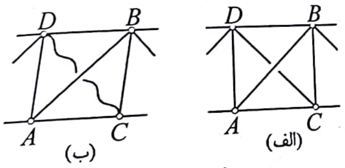
شکل ۹.۴

کمانش این عضوها، عضو سومی را باید به آنها اضافه کرد تا هم‌راستایی دوعضو حفظ شود. در این حالت بنابر رابطهٔ $\Sigma F_y=0$، نیروی F_3 در عضو سوم باید صفر باشد و رابطهٔ $\Sigma F_x=0$ نشان می‌دهد که $F_1=F_2$. این نتایج مستقل از زاویهٔ θ است و حتی اگر اعضای هم‌خط در کشش باشند نیز صادق است. اگر یک نیروی خارجی که در جهت y مؤلفه‌ای دارد، بر مفصل وارد شود F_3 صفر نخواهد شد.

شکل ۹.۴ (ب) یک حالت خاص دیگر را نشان می‌دهد، در این شکل دوعضو غیرهم‌خط با هم مفصل شده‌اند. مفصل تحت تأثیر بار خارجی قرار ندارد. از روابط $\Sigma F_x=0$ و $\Sigma F_y=0$ نتیجه می‌شود که نیرو در هر دو عضو صفر هستند.

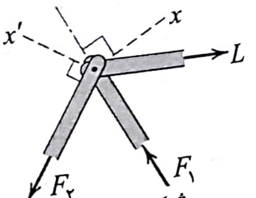
برای حالت خاص ۹.۴ (ج) از روابط $\Sigma F_x=0$ و $\Sigma F_y=0$ نتیجه می‌شود که نیروها در زوج‌نیروهای هم‌خط دارای اندازهٔ برابر و در خلاف جهت یکدیگرند.

مطابق شکل ۱۰.۴ (الف)، قاب‌های خرپا بادبند ضربدری دارند. اگر هریک از بادبندها قادر به تحمل کشش یا فشار باشند، چنین قاب‌هایی نامعین استاتیکی خواهند بود. اگر این قاب‌ها انعطاف‌پذیر باشند و نتوانند فشار را تحمل کنند، آن عضوی را که تحت کشش است در نظرگرفته و عضو دیگر را کنار می‌گذاریم. در خرپاهای مسطح معمولاً از نوع بارگذاری می‌توان تشخیص داد سطح چگونه منحرف می‌شود. اگر انحراف مطابق شکل ۱۰.۴ (ب) باشد، باید عضو AB را نگه داشت و از عضو CD چشم‌پوشی کرد. هنگامی که تشخیص آن مشکل باشد، آن را به‌طور دلخواه انتخاب کرده پس از محاسبه، علامت مثبت نشان می‌دهد که انتخاب ما درست بوده و در غیر این صورت باید عضو کنار گذاشته شده انتخاب شود.



شکل ۱۰.۴

با انتخاب دقیق محورهای مختصات می‌توان از حل هم‌زمان معادلات تعادل برای دو نیروی مجهول در یک مفصل پیشگیری کرد. از این‌رو برای مفصل نشان داده شده در شکل ۱۱.۴، که در آن L معلوم و F_1 و F_2 مجهول هستند، جمع نیروها در امتداد محور x (ΣF_x)، حذف F_1، و جمع نیروها در امتداد محور x' ($\Sigma F_{x'}$)، حذف F_2 را نتیجه می‌دهد. وقتی زوایای مجهول به‌سادگی تعیین نمی‌شوند، هریک از مجموعه محورها را برای حل هم‌زمان دو مجهول می‌توان به‌کار برد.

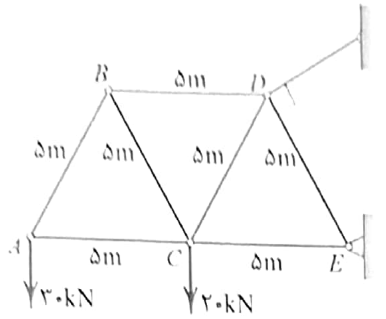


شکل ۱۱.۴

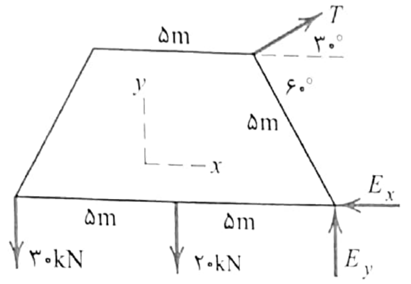
Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۴

با استفاده از روش مفصل‌ها، نیرو را در تمام عضوهای خرپای طره‌ای بارگذاری‌شده تعیین کنید.



حل: اگر محاسبهٔ نیروهای واکنش خارجی در D و E مورد نظر نبود، می‌توانستیم تحلیل خرپای طره‌ای را از مفصل بارگذاری‌شده انتهایی شروع کنیم. اما این خرپا را به‌طور کامل تحلیل خواهیم کرد و از این‌رو اولین گام، محاسبهٔ نیروهای خارجی در D و E با استفاده از نمودار جسم آزاد کل خرپا خواهد بود. معادلات نتیجه می‌دهد

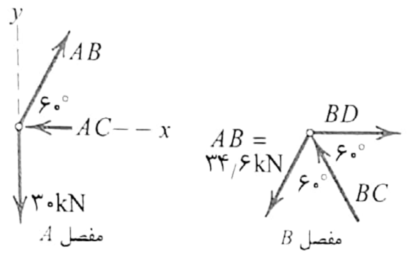


$[\Sigma M_E = ۰]$ $\quad ۵T - ۲۰(۵) - ۳۰(۱۰) = ۰ \quad T = ۸۰\text{kN}$

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad ۸۰\cos ۳۰^\circ - E_x = ۰ \quad E_x = ۶۹/۳\text{kN}$

$[\Sigma F_y = ۰]$ $\quad ۸۰\sin ۳۰^\circ + E_y - ۲۰ - ۳۰ = ۰ \quad E_y = ۱۰\text{kN}$

سپس نمودار جسم آزاد هریک از مفصل‌های اتصال را رسم می‌کنیم تا نیروهای اعمال شده بر آنها را نشان دهیم. درستی جهت‌های انتخاب شده با بررسی ترکیب مفصل‌ها وارسی می‌شود. در درستی نیروهای وارد بر مفصل A تردیدی نیست. تعادل ایجاب می‌کند که



$[\Sigma F_y = ۰]$ $\quad ۰/۸۶۶AB - ۳۰ = ۰ \quad AB = ۳۴/۶\text{kN}\,T$ ج.

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad AC - ۰/۵(۳۴/۶) = ۰ \quad AC = ۱۷/۳۲\text{kN}\,C$ ج.

❶ که در آن T نمایندهٔ کشش و C نمایندهٔ فشار است.

در مرحلهٔ بعد، مفصل B را تحلیل می‌کنیم، زیرا در مفصل C بیش از دو نیروی مجهول داریم. نیروی BC باید یک مؤلفهٔ رو به بالا ایجاد کند و در این حالت BD باید با نیروی رو به چپ در تعادل باشد. باز هم نیروها چنین به‌دست می‌آیند

$[\Sigma F_y = ۰]$ $\quad ۰/۸۶۶BC - ۰/۸۶۶(۳۴/۶) = ۰$

$BC = ۳۴/۶\text{kN}\,C$ ج.

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad BD - ۲(۰/۵)(۳۴/۶) = ۰$

$BD = ۳۴/۶\text{kN}\,T$ ج.

راهنمایی مفید

❶ باید تأکید کنیم که واژه‌های کششی و فشاری در مورد عضوها به‌کار می‌رود و نه برای مفصل‌ها. توجه کنید که پیکان نیرو برای مفصل را در همان جهت نیروی عضو رسم می‌کنیم. به این ترتیب نیروی کششی (پیکان پشت به مفصل) از نیروی فشاری (پیکان رو به مفصل) متمایز می‌شود.

اکنون مفصل C شامل تنها دو مجهول است که آنها را مانند روش گفته شده در بالا تعیین می‌کنیم

$[\Sigma F_y = ۰]$ $\quad ۰/۸۶۶CD - ۰/۸۶۶(۳۴/۶) - ۲۰ = ۰$

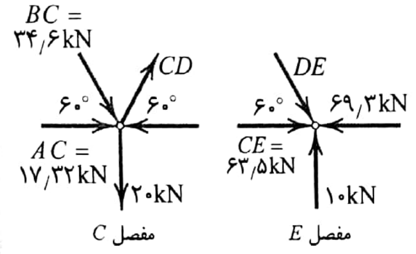
$CD = ۵۷/۷\text{kN}\,T$ ج.

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad CE - ۱۷/۳۲ - ۰/۵(۳۴/۶) - ۰/۵(۵۷/۷) = ۰$

$CE = ۶۳/۵\text{kN}\,C$ ج.

در آخر از مفصل E نتیجه می‌گیریم

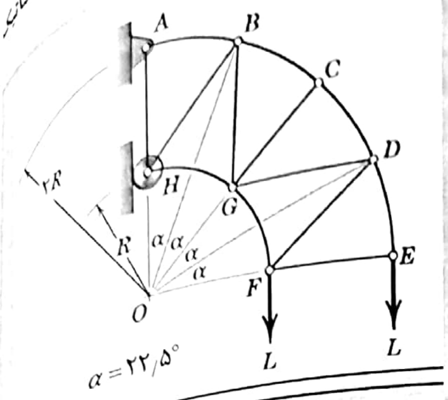
$[\Sigma F_y = ۰]$ $\quad ۰/۸۶۶DE = ۱۰ \quad DE = ۱۱/۵۵\text{kN}\,C$ ج.



و معادلهٔ $\Sigma F_x = ۰$ فقط برای وارسی صحت اعمال بالا به‌کار می‌رود.

گفتنی است، در مقایسه با بارهای خارجی، وزن عضوهای خرپا به‌علت ناچیز بودن در محاسبات وارد نمی‌شود.

Scanned by CamScanner

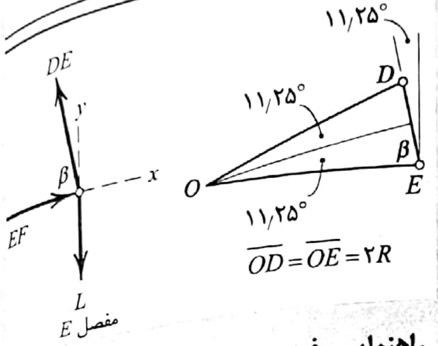


مسئلهٔ نمونهٔ ۴.۹

برای خرپای نشان داده شده دو بار هریک به مقدار L وارد می‌شود. نیروهای وارد بر عضوهای DE، DF، DG و CD را تعیین کنید.

حل: عضوهای خمیده در این خرپا عضوهای دونیرویی‌اند. بنابراین اثر هریک از این عضوهای خمیده خرپای ساده مانند یک عضو مستقیم است.

با مفصل E شروع می‌کنیم زیرا فقط دارای دو نیروی مجهول است. زاویهٔ β نمودار جسم آزاد این مفصل چنین است $\beta = ۱۸۰° - ۱۱/۲۵° - ۹۰° = ۷۸/۸°$. معادلهٔ تعادل برای این مفصل نتیجه می‌دهد



❶ ج.

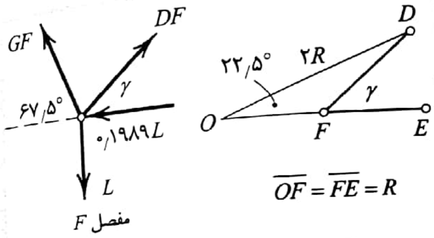
$[\Sigma F_y = ۰] \quad DE \sin ۷۸/۸° - L = ۰ \quad DE = ۱/۰۲۰L\ T$

$[\Sigma F_x = ۰] \quad EF - DE \cos ۷۸/۸° = ۰ \quad EF = ۰/۱۹۸۹L\ C$

اکنون به سراغ مفصل F می‌رویم (مفصل D را اصلاً انتخاب نمی‌کنیم، زیرا دارای سه مجهول است). از نمودار هندسی داریم

$$\gamma = \tan^{-1}\left[\frac{۲R \sin ۲۲/۵°}{۲R \cos ۲۲/۵° - R}\right] = ۴۲/۱°$$

از نمودار جسم آزاد مفصل F داریم



$[\Sigma F_x = ۰] \quad -GF \cos ۶۷/۵° + DF \cos ۴۲/۱° - ۰/۱۹۸۹L = ۰$

$[\Sigma F_y = ۰] \quad GF \sin ۶۷/۵° + DF \sin ۴۲/۱° - L = ۰$

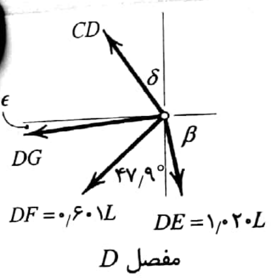
حل هم‌زمان این دو معادله نتیجه می‌دهد

ج. $\quad GF = ۰/۶۴۶L\ T \quad DF = ۰/۶۰۱L\ T$

برای عضو DG، به سراغ نمودار جسم آزاد در مفصل D و نمودار هندسی می‌رویم

$$\delta = \tan^{-1}\left[\frac{۲R\cos ۲۲/۵° - ۲R\cos ۴۵°}{۲R\sin ۴۵° - ۲R\sin ۲۲/۵°}\right] = ۳۳/۸°$$

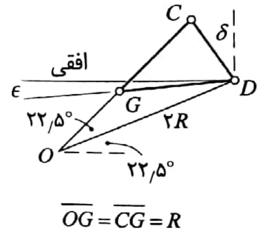
$$\epsilon = \tan^{-1}\left[\frac{۲R \sin ۲۲/۵° - R \sin ۴۵°}{۲R \cos ۲۲/۵° - R \cos ۴۵°}\right] = ۲/۹۲°$$



سپس از مفصل D داریم

$[\Sigma F_x = ۰] \quad -DG \cos ۲/۹۲° - CD \sin ۳۳/۸° - ۰/۶۰۱L \sin ۴۷/۹° + ۱/۰۲۰L \cos ۷۸/۸° = ۰$

$[\Sigma F_y = ۰] \quad -DG \sin ۲/۹۲° + CD \cos ۳۳/۸° - ۰/۶۰۱L \cos ۴۷/۹° - ۱/۰۲۰L \sin ۷۸/۸° = ۰$



حل هم‌زمان این دو معادله نتیجه می‌دهد

ج. $\quad CD = ۱/۶۱۷L\ T$, $DG = -۱/۱۴۷L$ یا $DG = ۱/۱۴۷L\ C$

توجه کنید که ϵ اغراق‌آمیز نمایش داده شده است.

راهنمایی مفید

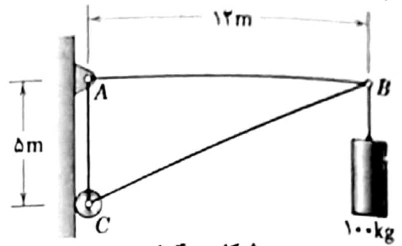
❶ به جای محاسبه و استفاده از زاویهٔ $\beta = ۷۸/۸°$ می‌توان از زاویهٔ $۱۱/۲۵°$ نیز استفاده کرد.

Scanned by CamScanner

مسائل

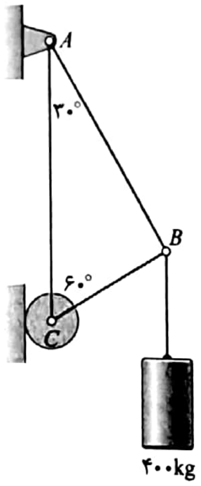
مسائل مقدماتی

۱.۴ نیرو را در هریک از عضوهای خرپای بارگذاری‌شده تعیین کنید.



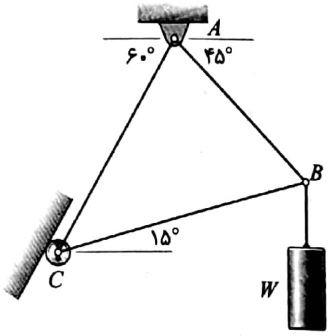
شکل م ۱.۴

۲.۴ نیرو را در هریک از عضوهای خرپای بارگذاری‌شده تعیین کنید.



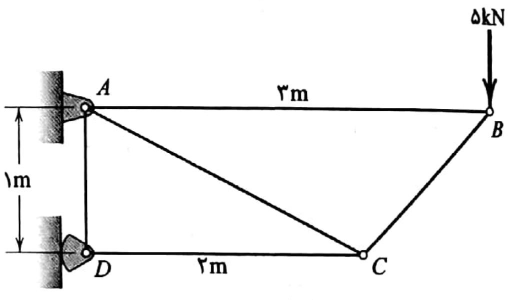
شکل م ۲.۴

۳.۴ نیرو را در هریک از عضوهای خرپای بارگذاری‌شده تعیین کنید.



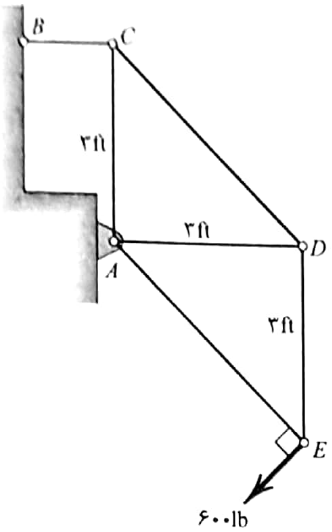
شکل م ۳.۴

۴.۴ نیرو را در هریک از عضوهای خرپای بارگذاری‌شده تعیین کنید. به وجود هر عضو صفر نیرویی توجه کنید.



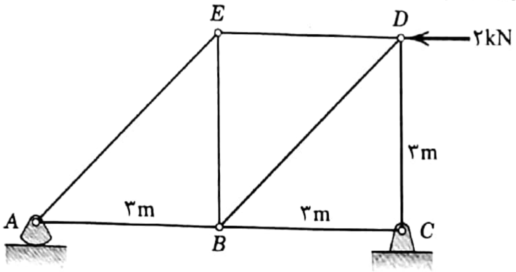
شکل م ۴.۴

۵.۴ نیرو در عضوهای AC، AD و DE را در خرپای بارگذاری‌شده محاسبه کنید. اتصال قید BC افقی است.



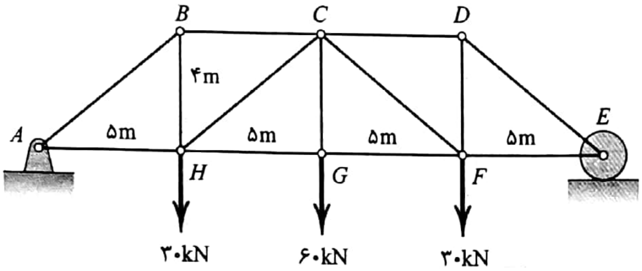
شکل م ۵.۴

۶.۴ نیرو را در هریک از عضوهای خرپای بارگذاری‌شده محاسبه کنید.



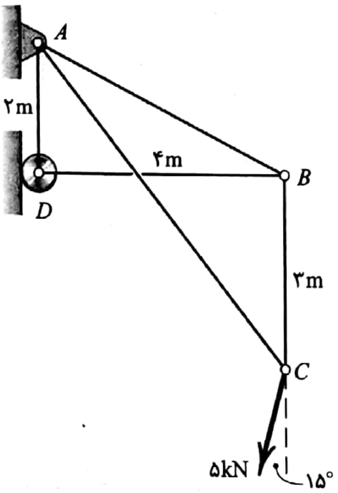
شکل م ۶.۴

۷.۴ نیرو را در هریک از عضوهای خرپای بارگذاری‌شده محاسبه کنید. از تقارن خرپا و بار استفاده کنید.



شکل م ۷.۴

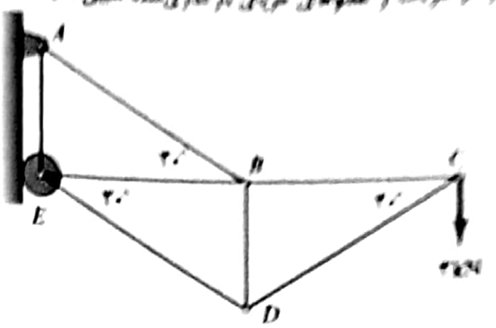
۸.۴ نیرو را در هریک از عضوهای خرپای بارگذاری‌شده تعیین کنید.



شکل م ۸.۴

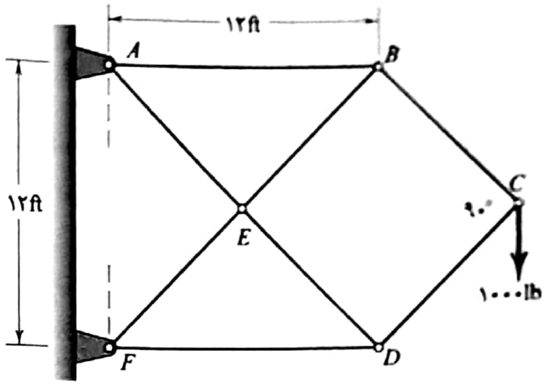
Scanned by CamScanner

۹.۴ نیرو را در هریک از عضوهای خرپای بارگذاری‌شده تعیین کنید.



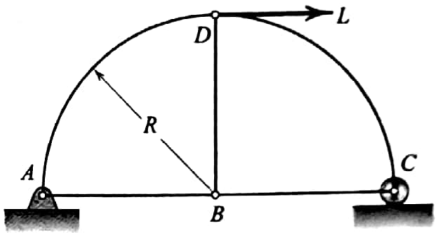
شکل م ۹.۴

۱۰.۴ نیرو را در هریک از عضوهای خرپای بارگذاری‌شده محاسبه کنید.



شکل م ۱۰.۴

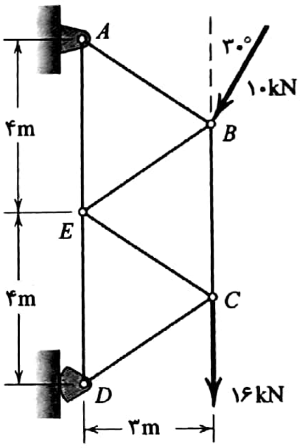
۱۱.۴ نیرو در عضوهای AB ،BC و BD را در خرپای بارگذاری‌شده تعیین کنید.



شکل م ۱۱.۴

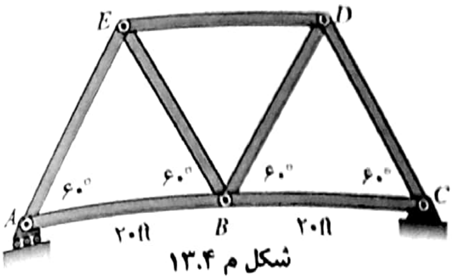
مسائل برگزیده

۱۲.۴ نیرو را در هریک از عضوهای خرپای بارگذاری‌شده تعیین کنید. تمام مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند.



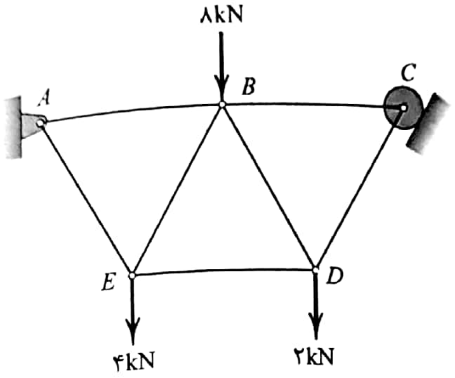
شکل م ۱۲.۴

۱۳.۴ هر عضو خرپا، میله‌ای یکنواخت به‌طول ۲۰ft با وزن ۴۰۰lb است. کشش یا فشار میانگین مربوط به وزن هر عضو را محاسبه کنید.



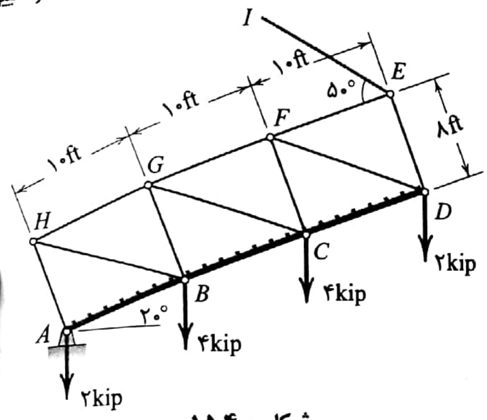
شکل م ۱۳.۴

۱۴.۴ نیرو را در هریک از عضوهای خرپای بارگذاری‌شده تعیین کنید. همهٔ مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع هستند.



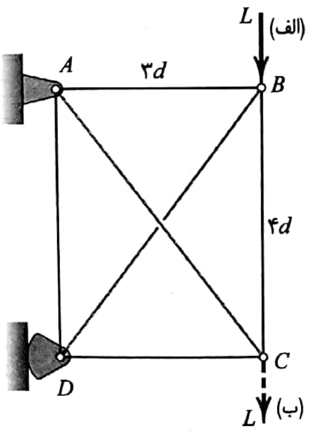
شکل م ۱۴.۴

۱۵.۴ پل متحرک توسط کابل EI بالا کشیده شده است. چهار نیروی بارگذاری نشان داده شده از وزن جاده نتیجه می‌شود. نیروها در عضوهای EF ،DE ،DF ،CD و FG را تعیین کنید.



شکل م ۱۵.۴

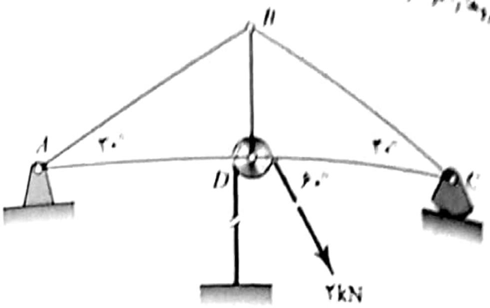
۱۶.۴ قاب مستطیل‌شکل زیر از چهار عضو دونیرویی محیطی و دو کابل AC و BD که توانایی تحمل فشار را ندارند تشکیل شده است. نیروها در همهٔ اعضای تحت تأثیر بار L در وضعیت (الف) و سپس در وضعیت (ب) را تعیین کنید.



شکل م ۱۶.۴

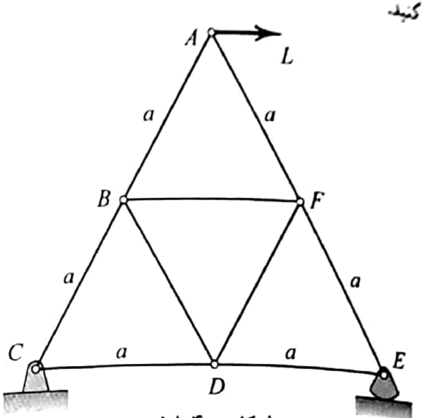
Scanned by CamScanner

۱۷.۴ نیروها را در هر عضو خرپا تعیین کنید.



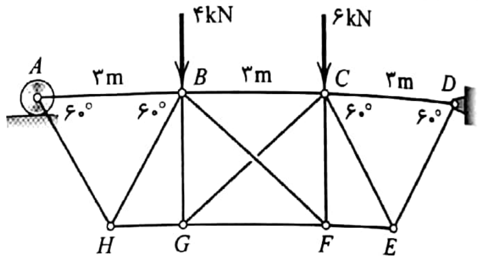
شکل م ۱۷.۴

۱۸.۴ خرپای هم‌زاویهٔ زیر مطابق شکل بارگذاری‌شده است. نیروها را برحسب بار افقی L تعیین کنید.



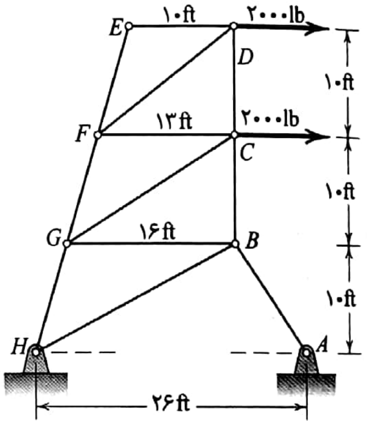
شکل م ۱۸.۴

۱۹.۴ نیروها را در عضوهای AB، BH و BG محاسبه کنید. عضو BF و CG کابل‌هایی‌اند که می‌توانند کشش ایجاد کنند.



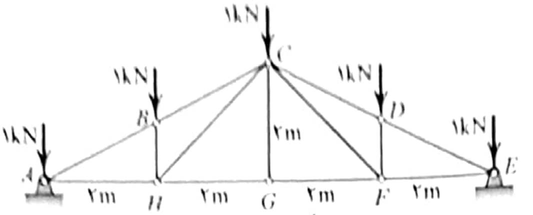
شکل م ۱۹.۴

۲۰.۴ نیرو در عضوهای CF، CG و EF خرپای بارگذاری‌شده را محاسبه کنید.



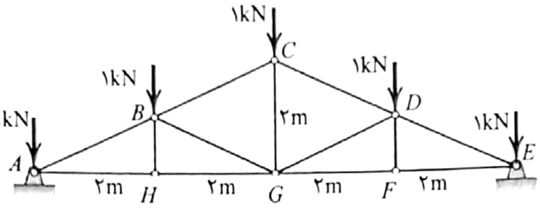
شکل م ۲۰.۴

۲۱.۴ بار برف، به مفصل‌های بالای یک خرپای سقفی از نوع پرات، نیروهای نشان داده شده را وارد می‌کند. از هر واکنش افقی در تکیه‌گاه صرف‌نظر کرده و نیروها را در همهٔ عضوها تعیین کنید.



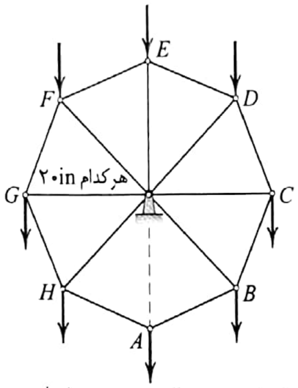
شکل م ۲۱.۴

۲۲.۴ بارگذاری مسئلهٔ ۲۱.۴ مطابق شکل بر خرپای سقفی "هاو" وارد می‌شود. از هر واکنش افقی در تکیه‌گاه صرف‌نظر کرده، و مسئله را برای همهٔ نیروها در عضوها حل کنید و با نتیجهٔ حاصل در مسئلهٔ ۲۱.۴ مقایسه کنید.



شکل م ۲۲.۴

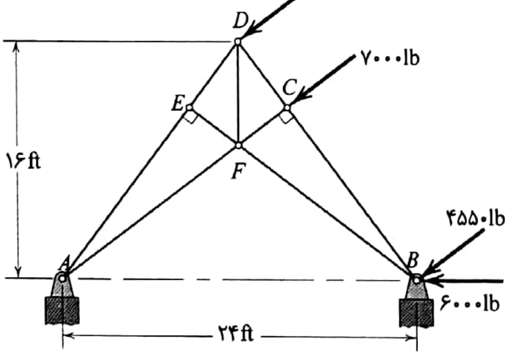
۲۳.۴ یک چرخ‌وفلک کوچک از دو خرپای مشابه که یکی از آنها نشان داده شده، ساخته شده است. عضو AO به‌طور موقت برای تعویض برداشته شده است. اگر وزن صندلی‌ها و عضوهای تشکیل‌دهنده مجموعاً برابر ۱۰۰lb در هر مفصل خرپا نشان داده شده باشد، نیرو در هر عضو سازه را تعیین کنید. آیا می‌توانید با عضو AO جایگزین شده تحلیل‌ها را تکرار کنید؟



نیروی عمودی ۱۰۰lb روی هر مفصل

شکل م ۲۳.۴

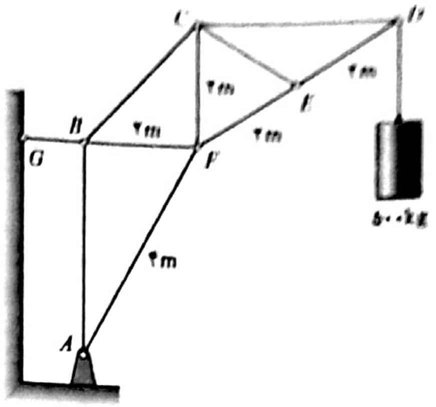
۲۴.۴ تحلیل اثر باد بر روی یک کلیسای کوچک در هاوایی که در برابر وزن باد با سرعت ۱۶۵mi / hr در جریان طوفان اینیکی در سال ۱۹۹۲ مقاومت کرد، نشان داد که نیروهای منتقل شده به هریک از قاب‌های خرپای سقف، مطابق شکل زیر است. سازه را به‌صورت خرپای ساده متقارن در نظر بگیرید و از مؤلفهٔ افقی واکنش در A چشم‌پوشی کنید. عضوی از خرپا را که بیشترین نیروی کششی یا فشاری به آن وارد می‌شود، مشخص کنید. این نیرو را محاسبه کنید.



شکل م ۲۴.۴

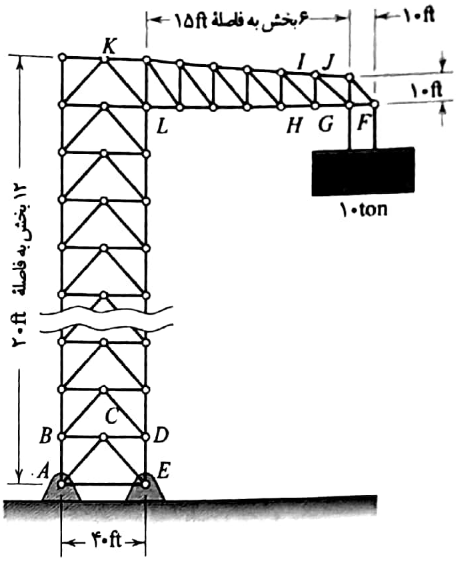
Scanned by CamScanner

۲۵.۴ نیروها را در عضوهای خرپای بارگذاری‌شده تعیین کنید.



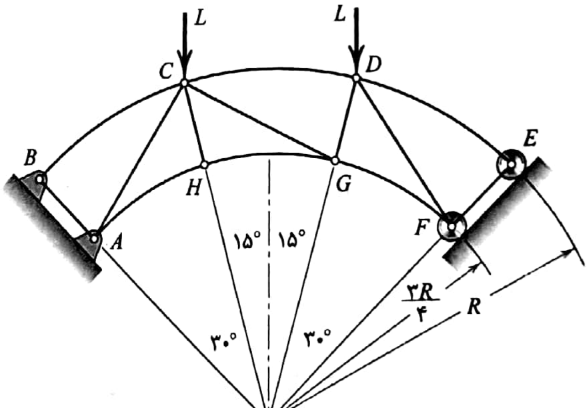
شکل م ۲۵.۴

۲۶.۴ سازه‌ای به‌طول ۲۴۰ft برای ایجاد پشتیبانی خدمات اولیه، پیش از پرتاب کردن سفینه‌ای آزمایشی به‌کار می‌رود. برای یک آزمون، وزن ۱۰ تن را به‌طور مساوی بین مفصل‌های F و G تقسیم می‌کنیم. نیروهای وارد بر عضوهای GJ و GI را تعیین کنید. تحلیل‌های شما دربارهٔ عضوهای برج قائم مانند AB یا KL چیست؟



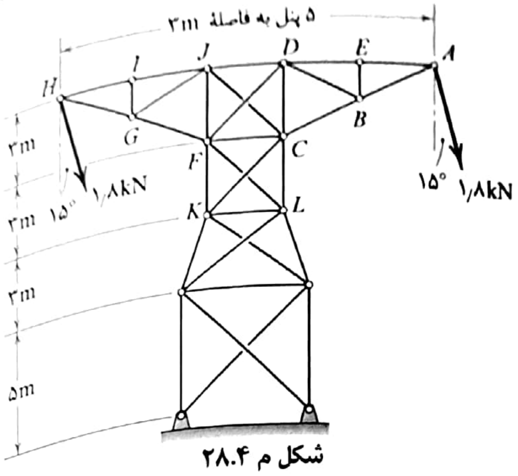
شکل م ۲۶.۴

۲۷.۴ نیروها در عضوهای CG را در خرپای بارگذاری‌شده تعیین کنید. فرض کنید چهار واکنش خارجی با وزن برابر در نقاط A، B، E و F و در جهت عمود بر سطح اتکا وارد شود.



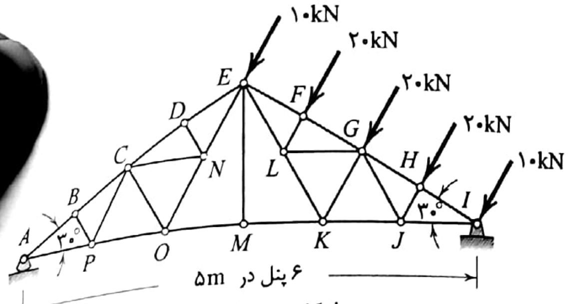
شکل م ۲۷.۴

۲۸.۴ دکل انتقال نیرو با خرپای نشان داده شده، مدل می‌شود. عضوهای بادبندی در بخش‌های مرکزی خرپا تنها می‌تواند قابلیت تحمل کشش را داشته باشد. نیروهای وارد بر عضوهای AB، DB، و CD را برای بارگذاری ۱٫۸kN وارد بر صفحهٔ قائم محاسبه کنید.



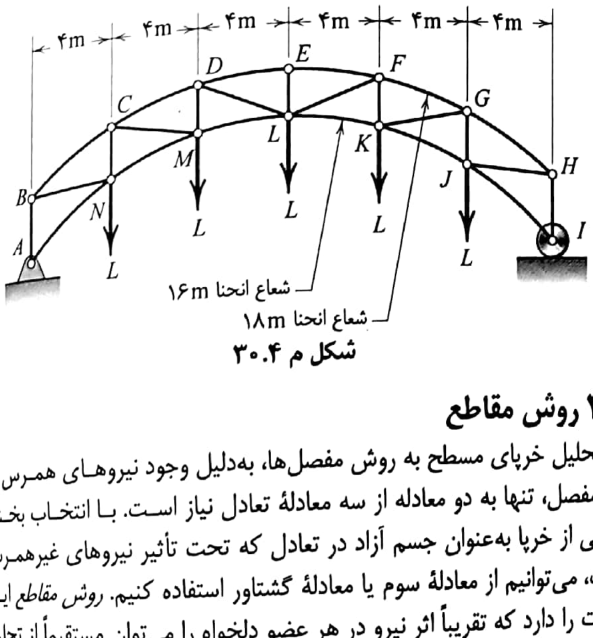
شکل م ۲۸.۴

۲۹.۴ نیروها را در عضوهای EF، KL و GL برای خرپای فینیک نشان داده شده تعیین کنید.



شکل م ۲۹.۴

۳۰.۴ نیرو در عضو CM از خرپای بارگذاری‌شده را معین کنید.



شکل م ۳۰.۴

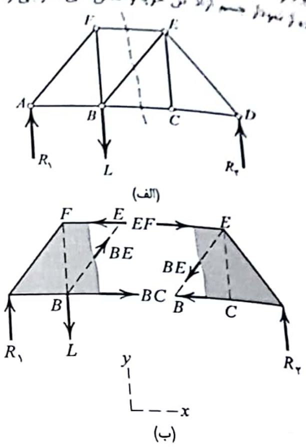
۴.۴ روش مقاطع

در تحلیل خرپای مسطح به روش مفصل‌ها، به‌دلیل وجود نیروهای همرس در هر مفصل، تنها به دو معادله از سه معادلهٔ تعادل نیاز است. با انتخاب بخش کاملی از خرپا به‌عنوان جسم آزاد که تحت تأثیر نیروهای غیرهمرس است، می‌توانیم از معادلهٔ سوم یا معادلهٔ گشتاور استفاده کنیم. *روش مقاطع* این مزیت را دارد که تقریباً اثر نیرو در هر عضو دلخواه را می‌توان مستقیماً از تحلیل مقطعی از خرپا که آن عضو را قطع کرده است، به‌دست آورد و دیگر برای تعیین نیروها با روش مفصل به مفصل تا رسیدن به عضو دلخواه ضرورتی ندارد. در انتخاب یک مقطع از خرپا توجه کنید که بیش از سه عضو با نیروی مجهول را نباید قطع کرد، زیرا تنها سه معادلهٔ تعادل مستقل در اختیار داریم.

Scanned by CamScanner

... روش مقاطع

... روش مقاطع که در روش مفصل‌ها شرح داده شده در اینجا دوباره برای خرپای شکل ۱۲.۴ توضیح داده می‌شود. خرپای شکل ۱۲.۴ (الف) را در نظر بگیرید. ابتدا با استفاده از نمودار جسم آزاد کل خرپا واکنش‌های خارجی را به‌دست می‌آوریم.



شکل ۱۲.۴

اکنون فرض می‌کنیم که می‌خواهیم نیرو را در عضو BE تعیین کنیم. برای این منظور یک خط برش فرضی را از خرپا عبور داده، آن را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم [شکل ۱۲.۴ (ب)]. برای اینکه هر دو قسمت خرپا در دو طرف مقطع در تعادل باشند، باید نیروی اعمال شده بر عضوهای قطع شده از سوی عضو حذف شده را وارد کنیم. در خرپاهای سادهٔ تشکیل شده از اعضای دونیروی مستقیم، این نیروها، چه کششی و چه فشاری، همیشه در امتداد عضوهای نظیر اثر می‌کنند. قسمت چپ خرپا تحت تأثیر بار اعمال شدهٔ L، واکنش انتهایی R_1 و سه نیروی وارد شده بر اعضای برش خورده توسط قسمت سمت راست جداشدهٔ خرپا، در تعادل می‌باشد.

اغلب می‌توانیم با بررسی ظاهری شرایط تعادل، جهت صحیح نیروها را رسم کنیم. بنابراین، در موازنهٔ گشتاورها حول نقطهٔ B برای مقطع سمت چپ، واضح است که نیروی EF به سمت چپ است، و از این‌رو از نوع فشاری است، زیرا به طرف مقطع بریده‌شدهٔ عضو EF اثر می‌کند. بار L از واکنش R_1 بزرگتر است. بنابراین نیروی BE باید به سمت بالا و راست اعمال شود تا مؤلفهٔ عمودی لازم برای تعادل مقطع را فراهم کند. بنابراین نیروی BE کششی است، زیرا رو به بیرون قطعهٔ بریده‌شده می‌باشد.

با در نظرگرفتن مقادیر تقریبی R_1 و L، می‌بینیم که تعادل گشتاورها حول نقطهٔ E ایجاب می‌کند که BC به‌طرف راست باشد. نگاهی اجمالی به خرپا نیز باید همین نتیجه را بدهد، زیرا می‌توان دریافت که عضو افقی پایینی، تحت تأثیر کشش حاصل از خمش، کشیده خواهد شد. معادلهٔ گشتاورها حول مفصل B، سه نیرو را از رابطه‌ها حذف می‌کند و در نتیجه EF را می‌توان به‌طور مستقیم تعیین کرد. نیروی BE از معادلهٔ تعادل در امتداد y محاسبه می‌شود. در پایان، BC را از موازنهٔ گشتاورها حول نقطهٔ E تعیین می‌کنیم. به این ترتیب، هریک از سه مجهول، مستقل از دو مجهول دیگر، تعیین شده است.

قسمت سمت راست خرپا، شکل ۱۲.۴ (ب)، در اثر نیروی R_2 و همان سه نیروی موجود در عضوهای بریده‌شده، که در جهت مخالف با جهت نیروهای مقطع چپ اثر می‌کنند، در تعادل است. جهت صحیح نیروهای افقی را می‌توان با موازنهٔ گشتاورها حول نقاط B و E تشخیص داد.

نکات بیشتر دربارهٔ روش مقاطع

باید دانست در روش مقاطع، مقطع تحت بررسی خرپا به‌عنوان یک جسم صلب در حالت تعادل فرض می‌شود. بنابراین نیروهای موجود در اعضای داخلی به‌عنوان نیروهای داخلی مقطع مورد نظر در این تحلیل وارد نمی‌شوند. برای مشخص کردن جسم آزاد و نیروهایی که از خارج به آن وارد می‌شوند، بهتر است برش را از اعضا عبور داد نه از مفصل‌ها. اگرچه هریک از دو مقطع حاصل را می‌توان برای محاسبه در نظرگرفت اما بهتر است مقطع ساده‌تر را انتخاب کرد.

در برخی مواقع می‌توان روش‌های مقاطع و مفصل‌ها را با یکدیگر تلفیق کرد. به‌عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم نیرو در یک عضو مرکزی یک خرپای بزرگ را بیابیم. علاوه بر آن فرض کنید که نتوان خط برش را بدون اینکه دست‌کم از چهار عضو یا نیروهای مجهول عبور کنیم، از این عضو بگذرانیم. در این صورت می‌توانیم نیروهای موجود در اعضای مجاور را به روش مقاطع تعیین کنیم. سپس با استفاده از روش مفصل‌ها به سمت عضو مجهول پیش می‌رویم. ترکیب‌کردن هر دو روش، می‌تواند شیوه‌ای مؤثرتر باشد.

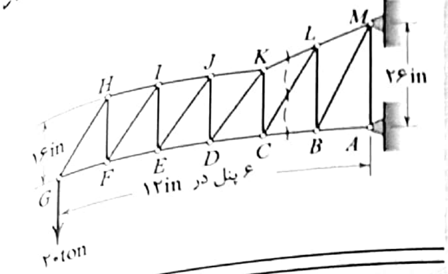
در روش مقاطع، کاربرد معادلات گشتاور بسیار مفید است. باید نقطه‌ای را به‌عنوان مرکز گشتاور، روی مقطع یا خارج آن انتخاب کرد که تا حد امکان نیروهای مجهول بیشتری از آن بگذرد.

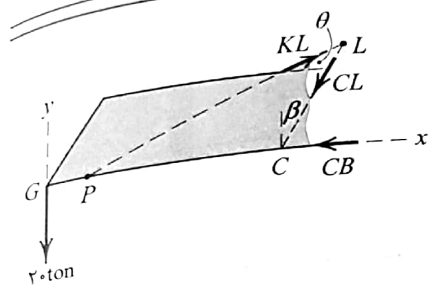
در هنگام ترسیم نمودار جسم آزاد، همواره ممکن نیست که جهت یک نیروی مجهول را به‌درستی مشخص کنیم. با انتخاب یک جهت دلخواه، پاسخ مثبت مشخص می‌کند که جهت فرضی درست بوده است و پاسخ منفی بیانگر آن است که جهت نیرو در خلاف جهت فرض شده می‌باشد. روش دیگری که برخی آن را ترجیح می‌دهند، این است که تمام نیروهای مجهول در جهت کششی (به‌طرف بیرون مقطع) به‌طور دلخواه مثبت در نظرگرفته شوند، و در این حالت، علامت جبری مثبت بیانگر کشش و علامت جبری منفی بیانگر فشار خواهد بود. از سوی دیگر، برتری نمایش جهت صحیح نیروها روی نمودار جسم آزاد یک مقطع، تأکیدی بر اثر فیزیکی نیروهاست و این همان چیزی است که در این کتاب اولویت دارد.

اغلب خرپاهای ساده دارای مقاطع تکراری و سازه‌های مشابه‌اند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴٫۹

نیروهای وارد بر عضوهای CL ،KL و CB را در اثر اعمال با ۲۰ تن بار روی خرپای طره‌ای حساب کنید.





حل: اگرچه مؤلفه‌های قائم واکنش‌ها در A و M بـا دو تکیـه‌گـاه ثابت از نظـر اسـتاتیکی نامعین‌اند، همهٔ عضوهای دیگر غیر از AM معین‌اند. می‌تـوانیم خطـی بـه‌طـور مسـتقیم داخـل عضوهای CL ،KL و CB بگذارنیم و بخش سمت چپ این مقطع از خرپا را به‌عنوان یک جسـم صلب استاتیکی معین تحلیل کنیم. ❶

نمودار جسم آزاد از سمت چپ مقطع خرپا نشان داده شده اسـت. جمـع گشـتاورها حـول L نشان می‌دهد که علامت CB فشاری و جمع گشتاورها حول C نشان می‌دهد که KL در کشش است. جهت CL کاملاً مشخص نیست مگر اینکه بدانیم که KL و CB همـدیگر را در نقطـهٔ P در سمت راست G قطع می‌کنند. جمع گشتاورها حول P، KL و BC را حذف مـی‌کنـد و نشـان می‌دهد که برای اینکه گشتاور نیروی ۲۰ تنی حول P به تعادل برسد، CL باید فشاری باشد. بـا توجه به این نکات حل مسئله قابل فهم و آسان می‌شود. چراکه حال می‌دانیم چگونه هریـک از این سه مجهول را مستقل از دو مجهول دیگر حل کنیم.

❷ برای جمع کردن گشتاورها حول L، باید بازوی گشتاور را به‌دست آوریم

$$\overline{BL}=۱۶+(۲۶-۱۶)/۲=۲۱\text{ft}$$

پس

$$[\Sigma M_L=۰]\qquad ۲۰(۵)(۱۲)-CB(۲۱)=۰\qquad CB=۵۷٫۱\text{ ton}C\qquad \text{ج.}$$

سپس حول C گشتاور می‌گیریم. این کار مستلزم محاسبهٔ $\cos\theta$ است. از ابعاد داده شده، معلوم می‌شود که $\theta=\tan^{-۱}(۵/۱۲)$ در نتیجه $\cos\theta=۱۲/۱۳$. بنابراین

$$[\Sigma M_C=۰]\qquad ۲۰(۴)(۱۲)-\frac{۱۲}{۱۳}KL(۱۶)=۰\qquad KL=۶۵\text{ ton}T\qquad \text{ج.}$$

سرانجام می‌توانیم CL را به‌واسطهٔ جمع گشتاور حول P به‌دسـت آوریـم، کـه فاصـلهٔ آن از نقطهٔ C چنین به‌دست می‌آید

$$\frac{\overline{PC}}{۱۶}=\frac{۲۴}{۲۶-۱۶}\Rightarrow\overline{PC}=۳۸٫۴\text{ft}$$

همچنین به زاویهٔ β نیاز داریم که با رابطهٔ زیر حاصل می‌شود

$$\beta=\tan^{-۱}\left(\frac{\overline{CB}}{\overline{BL}}\right)=\tan^{-۱}\left(\frac{۱۲}{۲۱}\right)=۲۹٫۷^\circ\ ,\ \cos\beta=۰٫۸۶۸$$

اکنون داریم

$$[\Sigma M_P=۰]\qquad ۲۰(۴۸-۳۸٫۴)-CL(۰٫۸۶۸)(۳۸٫۴)=۰$$

$$CL=۵٫۷۶\text{ ton}C$$ ❸

راهنمایی‌های مفید

❶ توجه می‌کنیم که برای محاسبهٔ ایـن سـه نیـروی مجهول باید هشـت مفصـل را تحیـل کـرد. حـال می‌بینیم که روش مقاطع محاسبهٔ نیروها را بسـیار ساده کرده است.

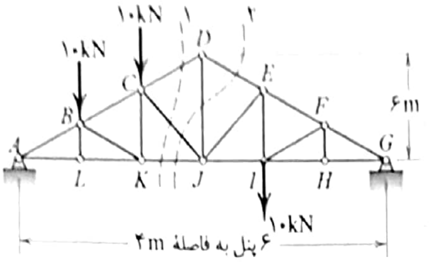
❷ می‌توانستیم ابتدا با محاسبهٔ گشتاور حول نقطهٔ C یا نقطهٔ P شروع کنیم.

❸ می‌توانستیم CL را با جمع بستن نیروها در امتـداد x یا y تعیین کنیم.

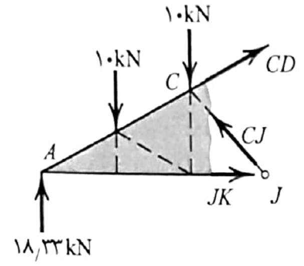
Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۴.۴

نیرو در عضو DJ از خرپای سقفی نشان داده شده را محاسبه نمایید. از همهٔ مؤلفه‌های نیروی افقی در تکیه‌گاهها صرف‌نظر کنید.



حل: امکان ندارد خط برشی را از DJ عبور داد، بدون اینکه چهار عضو که دارای نیروهای مجهول‌اند را، قطع نکند. اگرچه سه عضو قطع شده توسط برش ۲ در نقطهٔ J با یکدیگر تلاقی می‌کنند، اما معادلهٔ گشتاور حول J می‌تواند برای به‌دست آوردن DE مفید باشد، البته نیرو در DJ را نمی‌توان با استفاده از دو معادلهٔ دیگر باقی‌مانده به‌دست آورد. بنابراین لازم است، ابتدا قبل از تحلیل مقطع ۲، مقطع ۱، را بررسی کنیم.



مقطع ۱

نمودار جسم آزاد مقطع ۱ شامل نیروی واکنش ۱۸٫۳۳kN در A رسم شده که محاسبه را برای کل خرپا آسان می‌کند. در تشخیص علت‌های مناسب نیروهای وارد بر سه عضو ملاحظه می‌شود که میزان تعادل گشتاورها حول نقطهٔ A، اثرات CD و JK را در آن معادلات ظاهر نمی‌کند و مستلزم این است که CJ باید به سمت بالا و طرف چپ باشد. تعادل گشتاورها حول نقطهٔ C اثر سه نیروی همرس در نقطهٔ C را از بین می‌برد و نشان‌دهندهٔ این است که JK باید به سمت راست باشد تا گشتاور مورد نیاز پادساعتگرد را فراهم کند. باز هم کم‌وبیش روشن است که پایین‌ترین اعضای خرپا تحت کشش باشند، زیرا خرپا تمایل به خمش دارد. با وجود اینکه همچنین به‌نظر می‌رسد که یال بالایی خرپا تحت فشار است، برای ❶ نمایش نیرو در CD به‌طور دلخواه آن را کششی در نظر می‌گیریم.

با تحلیل‌های مقطع ۱، CJ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$[\Sigma M_A = ۰] \qquad ۰٫۷۰۷CJ(۱۲) - ۱۰(۴) - ۱۰(۸) = ۰ \qquad CJ = ۱۴٫۱۴\text{kN}\ C$$

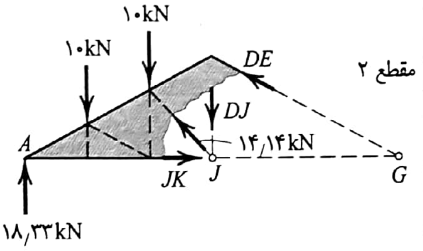
در این معادله، گشتاور CJ با در نظرگرفتن مؤلفه‌های افقی و قائم وارد بر J محاسبه شده است، تعادل گشتاورها حول y ایجاب می‌کند که

$$[\Sigma M_y = ۰] \qquad ۰٫۸۹۴CD(۶) + ۱۸٫۳۳(۱۲) - ۱۰(۴) - ۱۰(۸) = ۰$$

$$CD = -۱۸٫۶۳\text{kN}$$

در اینجا گشتاور CD حول J با در نظرگرفتن دو مؤلفه‌اش که به نقطهٔ D اعمال می‌شوند، ❷ محاسبه می‌شود. علامت منفی نشان می‌دهد که به CD علامت اشتباه اختصاص داده شده است. بنابراین

$$CD = ۱۸٫۶۳\text{kN}\ C$$



مقطع ۲

از نمودار جسم آزاد مقطع ۲ که اکنون مقدار CJ در آن معلوم شده است، با نوشتن معادلهٔ ❸ تعادل گشتاورها حول G مشاهده می‌شود که نیروهای DE و JK حذف شده است. بنابراین

$$[\Sigma M_G = ۰] \qquad ۱۲DJ + ۱۰(۱۶) + ۱۰(۲۰) - ۱۸٫۳۳(۲۴) - ۱۴٫۱۴(۰٫۷۰۷)(۱۲) = ۰$$

$$DJ = ۱۶٫۶۷\text{kN}T \qquad \text{ج.}$$

در اینجا گشتاور CJ از مؤلفه‌هایش که بر نقطهٔ J وارد شده، تعیین می‌شود. جواب برای CJ مثبت است. بنابراین جهت کششی مفروض صحیح است.

روش دیگر حل کامل مسئله در تعیین CD این است که از مقطع ۱ استفاده نموده و سپس با استفاده از روش مفصل‌های به‌کار رفته در D، DJ را معین کنیم.

راهنمایی‌های مفید

❶ تا زمانی‌که محاسبات با فرضیات هم‌خوانی داشته باشد، انتخاب جهت اشتباه یک یا چند نیرو مشکلی ایجاد نمی‌کند. جواب منفی نشان خواهد داد که نیاز به تغییر جهت نیرو داریم.

❷ چنانچه مایلید تغییر جهت CD در نمودار جسم آزاد ممکن باشد، و علامت جبری CD برعکس تعویض شود آن را به موقع مناسب موکول کنید.

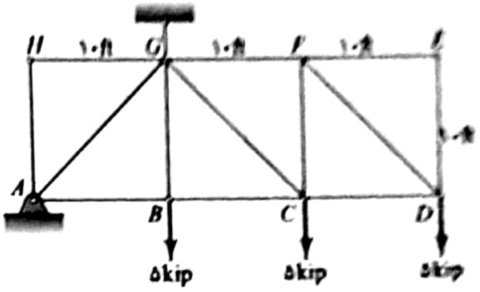
❸ مشاهده کنید که یک مقطع گذرنده از عضوهای CD، DJ و DE تنها می‌توانست سه عضو مجهول را دربرگیرد. اما از آنجایی که نیروهای موجود در این سه عضو همگی در D همدیگر را قطع می‌کنند، معادلهٔ گشتاور آنها حول نقطهٔ D هیچگونه اطلاعی نمی‌دهند. دو معادلهٔ نیروی باقی‌مانده برای حل مسئله کافی نیستند.

Scanned by CamScanner

مسائل

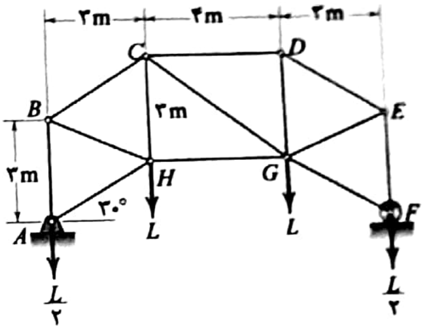
مسائل مقدماتی

۳۱.۴ نیرو در عضو CG را تعیین کنید.



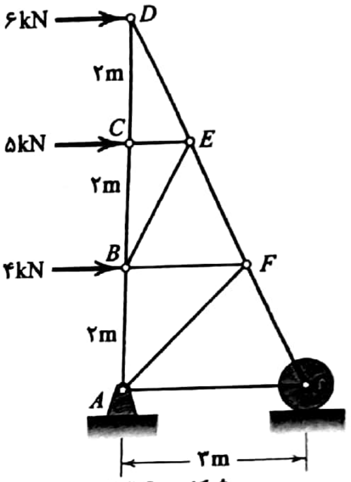
شکل م ۳۱.۴

۳۲.۴ نیروها در عضوهای CG و GH با بارگذاری متقارن در خرپا را تعیین کنید.



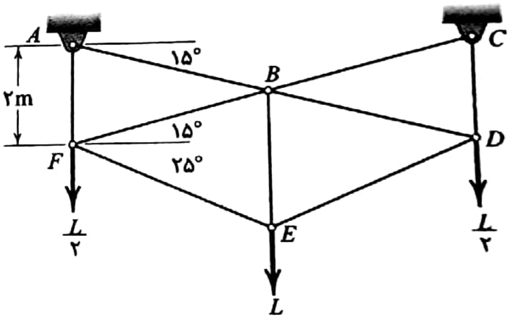
شکل م ۳۲.۴

۳۳.۴ نیرو در عضو BE از خرپای بارگذاری‌شده را تعیین کنید.



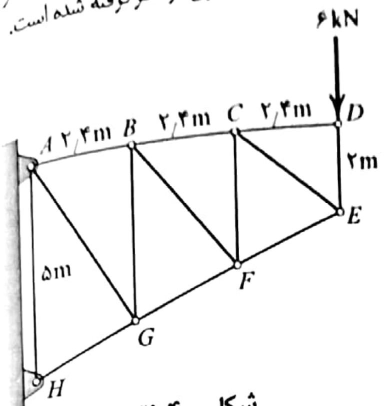
شکل م ۳۳.۴

۳۴.۴ نیرو در عضو EF از خرپا با بارگذاری متقارن را با فرض اینکه هیچ واکنش افقی در تکیه‌گاه‌های A و C وارد نشود، معین کنید.



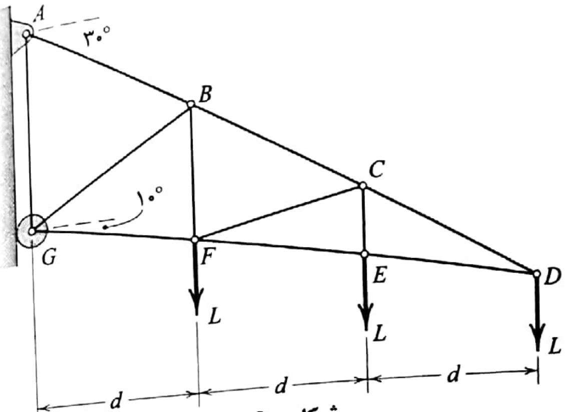
شکل م ۳۴.۴

۳۵.۴ نیروها در عضوهای AB، BG و GF را محاسبه کنید. برای هر نیرو از معادلهٔ تعادلی استفاده کنید که آن نیرو به‌عنوان یک مجهول در نظرگرفته شده است.



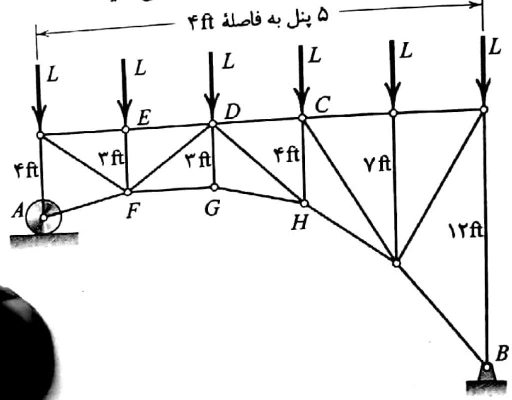
شکل م ۳۵.۴

۳۶.۴ نیروها در عضوهای BC، CF و EF از خرپای بارگذاری‌شده را تعیین کنید.



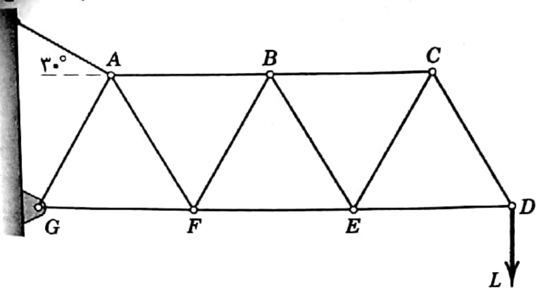
شکل م ۳۶.۴

۳۷.۴ نیرو در عضو DG از خرپای بارگذاری‌شده را معین کنید.



شکل م ۳۷.۴

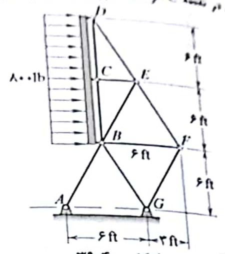
۳۸.۴ نیرو در عضوهای BC، BE و BF را معین کنید. مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع‌اند.



شکل م ۳۸.۴

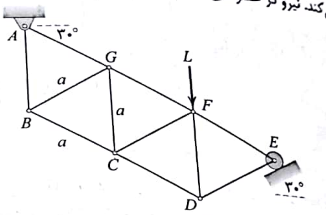
Scanned by CamScanner

۳۹.۴ [illegible] خرپا برای تحمل نیروی افقی ۸۰۰lb طراحی شده‌اند. اگر برایند نیروها [illegible] عضو BG و HF در نقطهٔ C اثر کند، نیروها در این دو عضو را محاسبه کنید.



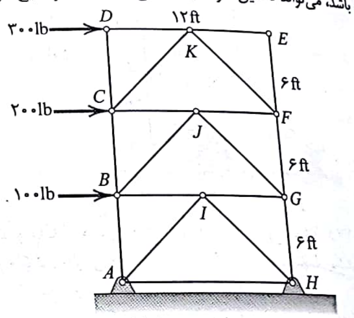
شکل م ۳۹.۴

۴۰.۴ خرپایی متشکل از مثلث‌هایی با ضلع‌های برابر a، بارگذاری مطابق شکل را تحمل می‌کند. نیرو در عضوهای BC و CG را معین کنید.



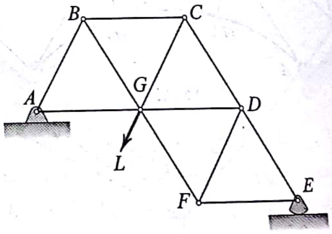
شکل م ۴۰.۴

۴۱.۴ نیرو در عضوهای BC و FG از خرپا با بارگذاری متقارن را معین کنید. نشان دهید که این محاسبه با استفاده از یک مقطع با دو معادله که هریک شامل یکی از دو مجهول باشد، می‌تواند تکمیل شود. آیا نامعینی تکیه‌گاه‌ها بر نتایج اثر می‌گذارد؟



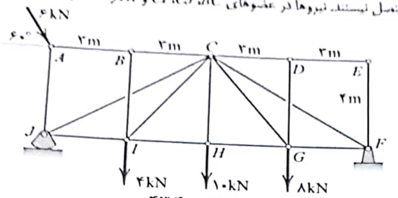
شکل م ۴۱.۴

۴۲.۴ نیرو در عضو DG از خرپا را برحسب بار L تعیین کنید. همهٔ عضوها زاویهٔ ۶۰° دارند.



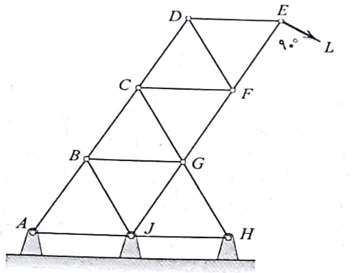
شکل م ۴۲.۴

۴۳.۴ عضوهای CJ و CF از خرپای به‌طور ضربدری بارگذاری‌شده، به عضوهای دیگر BI و DG متصل نیستند. نیروها در عضوهای BC، CJ، CI و HI را محاسبه کنید.



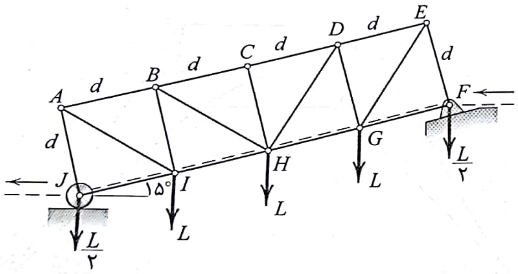
شکل م ۴۳.۴

۴۴.۴ خرپایی از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع تشکیل یافته و بار L را تحمل می‌کند. نیروهای عضوهای CG و GF را تعیین کنید. مشخص کنید کدام یک از معادلات تعادل برای تعیین نیروهایشان کافی نیستند؟



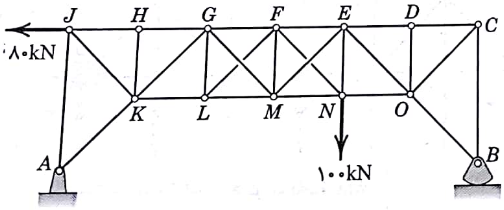
شکل م ۴۴.۴

۴۵.۴ یک خرپا رمپی را نگه می‌دارد که از سطح ورودی مفصل ثابت F تا سطح خروجی مفصل J امتداد دارد. این خرپا با خط‌چین نشان داده شده است. بارهای نشان داده شده بیانگر وزن این رمپ هستند. نیروها در عضوهای BH و CD را تعیین کنید.



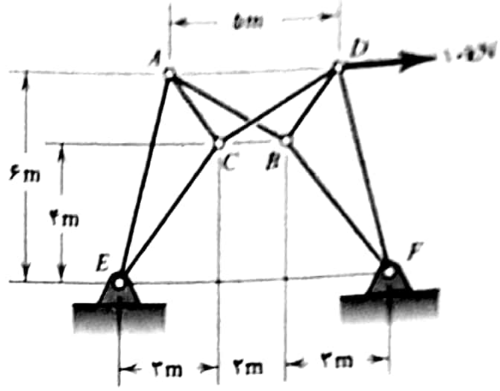
شکل م ۴۵.۴

۴۶.۴ خرپای نشان داده شده از مثلث‌های ۴۵° تشکیل شده است. عضوهای بادبند در مرکز دو صفحه میله‌های باریکی هستند که در برابر تحمل فشار ناتوان می‌باشند. دو میله‌ای که تحت کشش هستند را باقی نگه داشته و مقدار کشش آنها را محاسبه کنید. همچنین نیرو در عضو MN را بیابید.



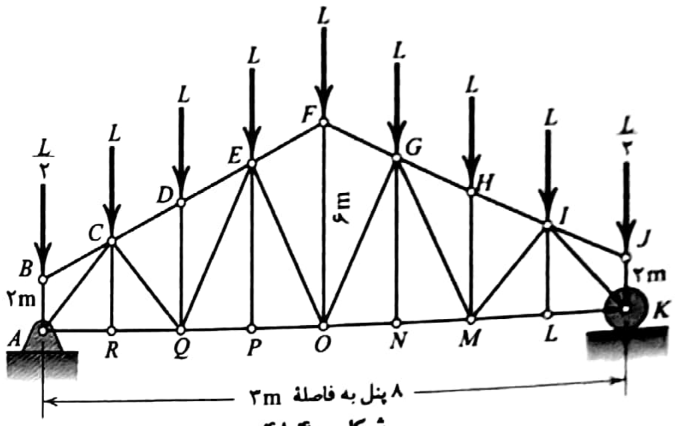
شکل م ۴۶.۴

۴۷.۴ قاب‌های ACE و DFB توسط دو میلهٔ اُریب AB و CD بههم متصل‌اند، بدون اینکه این دو میلهٔ اُریب بههم وصل باشند. نیرو در AB را محاسبه کنید.



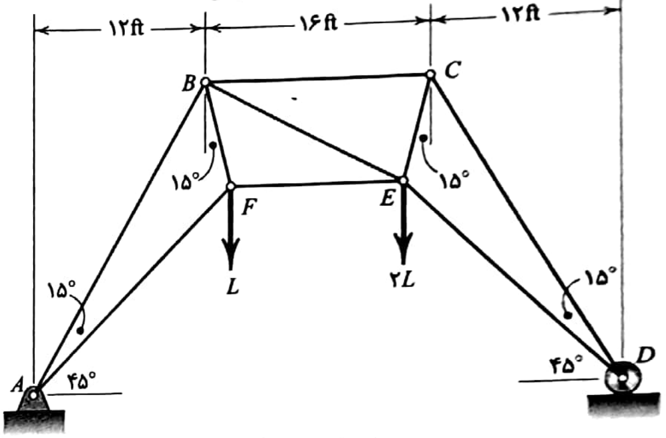
شکل م ۴۷.۴

۴۸.۴ نیرو در عضو *GM* از خرپای بارگذاری‌شده را محاسبه کنید.



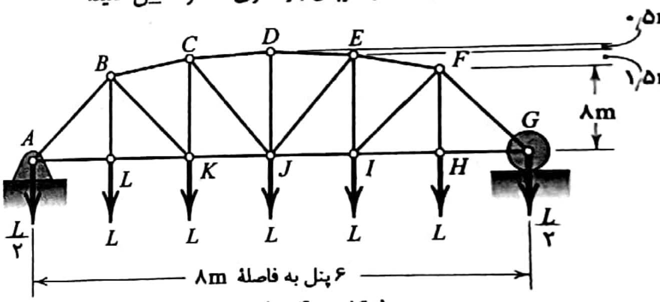
شکل م ۴۸.۴

۴۹.۴ نیرو در عضو *BE* از خرپای بارگذاری‌شده را تعیین کنید.



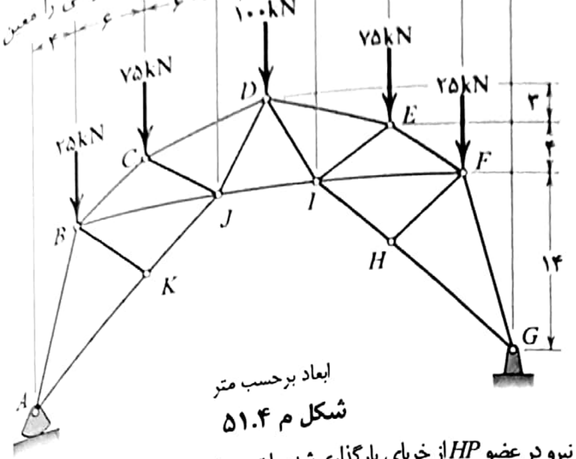
شکل م ۴۹.۴

۵۰.۴ نیرو در عضوهای *DJ* و *EJ* از خرپای بارگذاری‌شده را تعیین کنید.



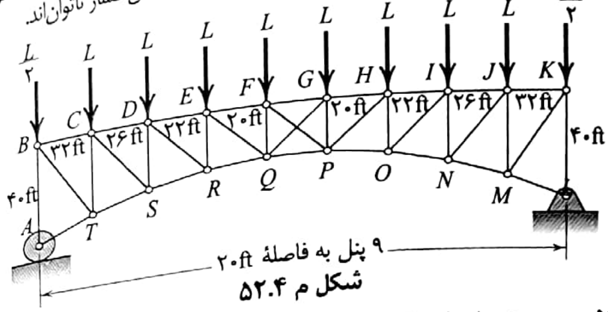
شکل م ۵۰.۴

۵۱.۴ نیرو در عضوهای *DE*، *EI*، *FI* و *HI* از خرپای سقف قوسی را معین کنید.



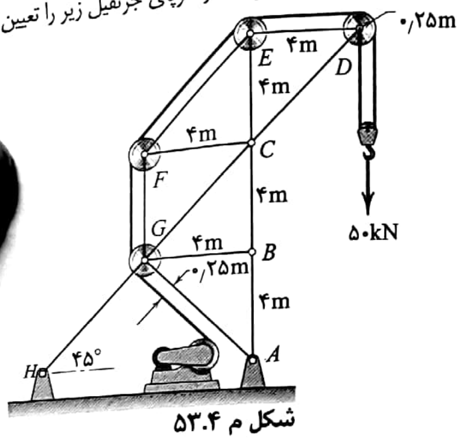
شکل م ۵۱.۴

۵۲.۴ نیرو در عضو *HP* از خرپای بارگذاری‌شده را تعیین کنید. عضوهای *FP* و *GQ* به‌صورت ضربدری بدون تماس با یکدیگر از روی هم عبور کرده و در برابر تحمل فشار ناتوان‌اند.



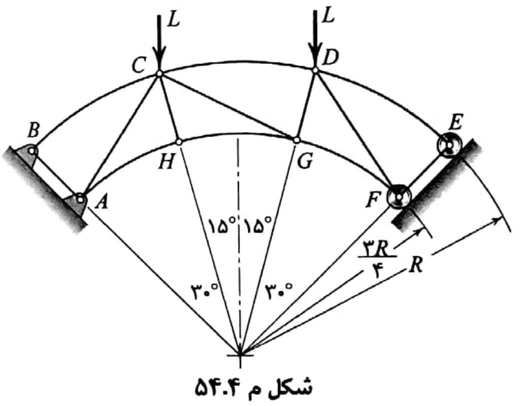
شکل م ۵۲.۴

۵۳.۴ نیرو در عضوهای *BC*، *CG*، *FG* و *EF* از خرپای جرثقیل زیر را تعیین کنید.



شکل م ۵۳.۴

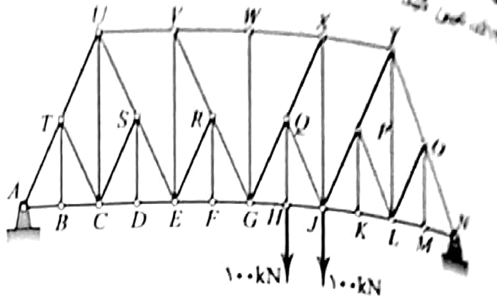
۵۴.۴ نیرو در عضو *CG* از خرپای بارگذاری‌شده را که در مسئلهٔ ۲۷.۴ تکرار شده تعیین کنید. چهار واکنش خارجی در نقاط *A*، *B*، *E* و *F* از نظر مقدار یکسان و از نظر جهت بر منطقه‌ای که سطوح را نگه‌داری می‌کند عمودند.



شکل م ۵۴.۴

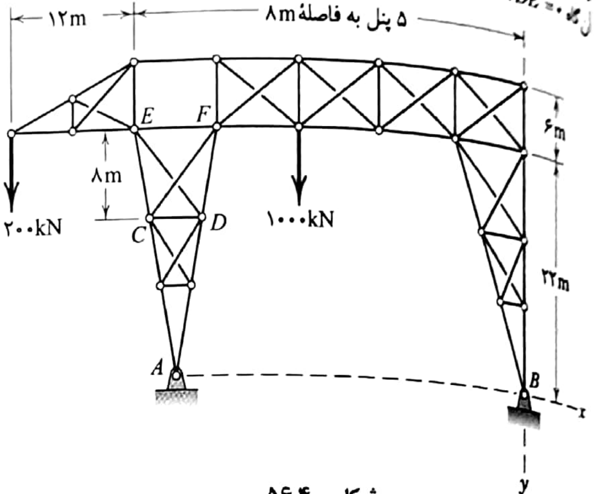
Scanned by CamScanner

۵۴.۴ نیرو در عضو HJ از خرپای سالیسبوری را که زوایای همهٔ آنها ۳۰°، ۶۰°، ۹۰° ... تعیین کنید.



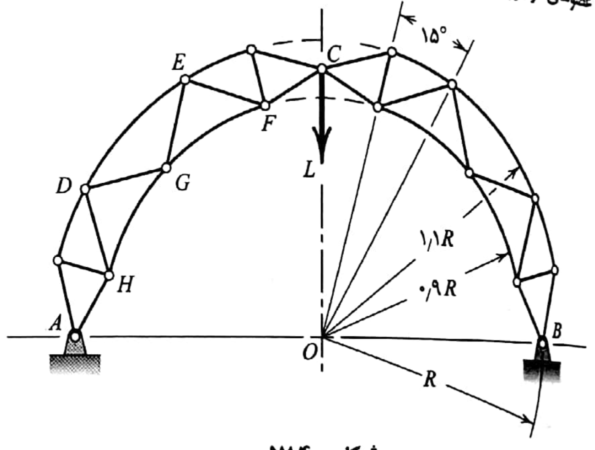
شکل م ۵۵.۴

۵۶.۴ در جرثقیل متحرک سقفی نشان‌داده‌شده، همهٔ عضوهای ضربدری، میله‌های باریکی هستند که در تحمل فشار ناتوان‌اند. نیرو را در عضوهای DF و EF تعیین کنید و واکنش‌های افقی خرپا در نقطهٔ A را به‌دست آورید. نشان دهید اگر $CF = 0$، آن‌گاه $DE = 0$.



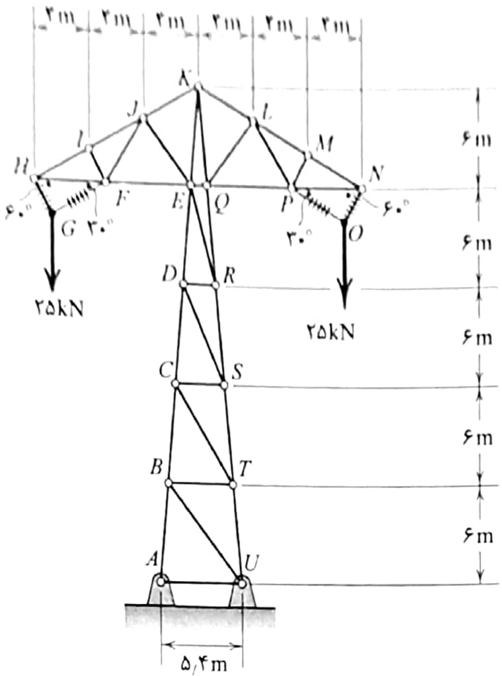
شکل م ۵۶.۴

۵۷.۴ نیرو در عضو DG از خرپای مرکب را تعیین کنید. همهٔ مفصل‌ها در امتداد خطوط شعاعی با زوایای ۱۵° مطابق شکل می‌باشند و عضوهای منحنی، مانند عضوهای دونیرویی عمل می‌کنند. برای فواصل داریم $\overline{OC} = \overline{OA} = \overline{OB} = R$.



شکل م ۵۷.۴

۵۸.۴ طرح نمونهٔ برج خط انتقال در شکل نشان داده شده است. عضوهای GH، FG، OP، و NO کابل‌های عایق‌بندی شده‌اند؛ همهٔ عضوهای دیگر میله‌های فولادی‌اند. برای بارگذاری نشان داده شده نیرو در عضوهای FI، FJ، EJ، EK و ER را محاسبه کنید چنانچه مایلید از روش‌های ترکیبی استفاده کنید.



شکل م ۵۸.۴

۵.۴ خرپاهای فضایی

خرپاهای فضایی نمونه‌ای سه‌بعدی از خرپاهای صفحه‌ای است، و به شکل ایده‌آل از میله‌های صلبی که دو انتهای آنها با مفصل‌های کاسه ـ ساچمه‌ای به‌هم متصل‌اند، تشکیل یافته‌اند (مانند مفصل نشان داده شده در شکل ۸.۳ بخش ۴.۳). دیدیم که جزء اصلی فرونریختنی خرپای مسطح، مثلثی با میله‌های پین شده است. از سوی دیگر یک خرپای فضایی از شش میله که از انتها به‌هم مفصل شده‌اند تشکیل شده است. این میله‌ها یال‌های یک چهاروجهی به‌عنوان یک واحد غیرقابل فروریختن هستند. برای توضیح بیشتر شکل ۱۳.۴ (الف) را در نظر بگیرید. در این شکل دو میلهٔ AD و BD نیاز به تکیه‌گاه سوم CD دارند تا از چرخش مثلث ADB حول AB پیشگیری کنند. در شکل ۱۳.۴ (ب) پایهٔ نگهدارنده توسط سه میله یعنی AB، BC و AC جایگزین شده و یک چهاروجهی حاصل شده است که صلب بودن آن به پایه بستگی ندارد.

با سه میلهٔ متقاطع اضافی که انتهای آنها به سه مفصل ثابت سازهٔ موجود متصل می‌شود، می‌توان واحد صلب جدیدی ساخت و آن را گسترش داد. به این ترتیب در شکل ۱۳.۴ (ج)، میله‌های AF، BF و CF به پایه وصل می‌شوند و نقطهٔ ثابت F را در فضا به‌وجود می‌آورند. به‌طور مشابه، مفصل H نیز توسط سه میلهٔ AH، DH و CH در فضا ثابت می‌شود. سه میلهٔ دیگر CG، FG و HG به سه نقطهٔ ثابت C، F و H متصل شده‌اند و در نتیجه، موجب ثابت شدن G در فضا می‌شوند. نقطهٔ ثابت E به همین ترتیب ایجاد می‌شود. اکنون ملاحظه می‌کنیم که سازه کاملاً صلب است. دو بار واردشده (در شکل) موجب ایجاد نیرو در تمام اعضا می‌شود. خرپای فضایی را که به این ترتیب تشکیل می‌شود خرپای فضایی *ساده* می‌نامیم.

برای جلوگیری از خمش عضوهای یک خرپای فضایی، در محل تکیه‌گاه‌های آن می‌توان از اتصالات نقطه‌ای ایده‌آلی همچون اتصال کاسه ـ ساچمه‌ای استفاده کرد. همانند اتصالات پرچی و جوشی، خرپاهای صفحه‌ای، اگر خط محور اعضای متصل در یک نقطه همدیگر را قطع کنند می‌توان فرض کرد که عضوهای دونیرویی عضوهایی هستند که تحت کشش و فشار ساده قرار گرفته‌اند.

Scanned by CamScanner

روش مفصل‌ها برای خرپاهای فضایی

روش مفصل‌ها را برای خرپاهای مسطح که در بخش ۳.۴ شرح داده شد، می‌توان با برقراری رابطهٔ زیر برای هر مفصل، برای خرپاهای فضایی تعمیم داد.

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad (۱.۴)$$

معمولاً تحلیل را با مفصلی شروع می‌کنیم که حداقل یک نیروی معلوم و حداکثر سه نیروی مجهول داشته باشد. پس از آن می‌توان مفصل‌های مجاور را با داشتن حداکثر سه نیروی مجهول به‌نوبت تحلیل کرد.

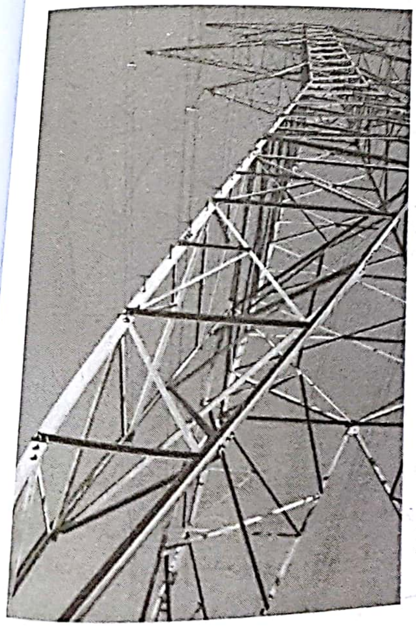
به کمک این روش گام به گام، در حالتی که تعیین نیرو در همهٔ اعضای خرپای فضایی مدنظر باشد، تعداد معادلاتی که باید به‌صورت هم‌زمان حل کرد حداقل می‌شود. به همین دلیل استفاده از این روش، اگرچه متداول نیست، توصیه می‌شود. راه‌حل دیگر این است که با استفاده از معادلهٔ (۱.۴) برای یک سازهٔ فضایی که j مفصل دارد، سه معادله به‌دست آورد. اگر سازه بعد از جدا شدن از تکیه‌گاه‌ها فرو نریزد و تکیه‌گاه‌ها شش واکنش خارجی ایجاد کنند، $m+6$ مجهول خواهیم داشت. اگر این سازه دارای عضو زاید نباشد رابطهٔ $3j=m+6$ برقرار است. در این صورت تمام مجهول‌ها را می‌توان به‌دست آورد. اگر تعداد معادله‌ها زیاد باشد از کامپیوتر استفاده می‌کنیم، بنابراین برای شروع محاسبه لازم نیست به دنبال مفصلی دیگر بگردیم که دارای حداقل یک نیروی معلوم و سه نیروی مجهول باشد.

روش مقاطع برای خرپاهای فضایی

از روش مقاطع نیز می‌توان برای خرپاهای فضایی استفاده کرد. برای این منظور رابطه‌های برداری زیر را برای هر مقطع می‌نویسیم

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \text{و} \quad \Sigma \mathbf{M} = 0$$

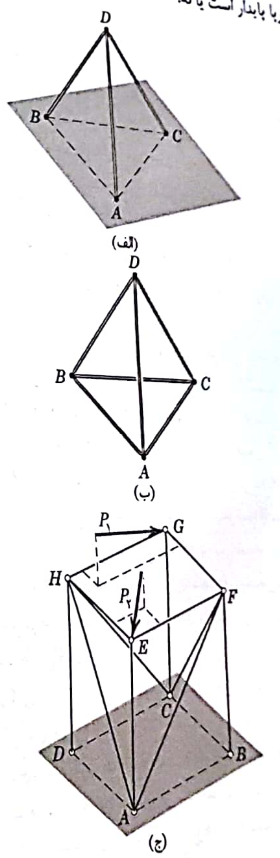
که در آن جمع گشتاورها حول همهٔ محورهای گشتاور صفر است. از آنجا که دو معادلهٔ برداری با شش معادلهٔ عددی معادل هستند، نتیجه می‌گیریم خط برش نباید بیش از شش عضو با نیروهای مجهول را قطع کند. روش مقاطع برای خرپاهای فضایی کاربرد زیادی ندارد، زیرا به‌ندرت می‌توان محوری را برای گشتاورگیری پیدا کرد که موجب حذف همهٔ مجهولات به غیر از یک مجهول شود، و این در حالی است که برای خرپاهای مسطح این کار امکان‌پذیر است.



خرپاهای فضایی در طراحی بسیاری از دکل‌های خطوط انتقال نیرو استفاده می‌شوند.

خرپاهای فضایی معین استاتیکی اگر یک خرپای فضایی به تکیه‌گاه‌های خارجی آن به‌گونه‌ای است که کل خرپا به‌عنوان یک مجموعهٔ واحد معین استاتیکی باشد، رابطه‌ای بین تعداد مفصل‌ها و تعداد عضوهای لازم برای پایداری داخلی بدون وجود عضوهای زاید وجود دارد. از آنجا که تعادل هر مفصل با سه معادلهٔ عددی بیان می‌شود، بنابراین برای یک خرپای فضایی با j مفصل، $3j$ معادلهٔ تعادل لازم است. از طرف دیگر برای خرپای فضایی تشکیل شده از m عضو، m نیروی مجهول (کششی یا فشاری) در عضوها و شش نیروی واکنش مجهول تکیه‌گاهی خواهیم داشت. بنابراین برای هر خرپای فضایی معین استاتیکی ساده یا مرکب، رابطهٔ $3j=m+6$ برقرار می‌باشد. برای یک خرپای فضایی ساده، به‌صورت خودکار این رابطه صادق است. از چهاروجهی اولیه، که این معادله برای آن صحیح است شروع می‌کنیم و هر بار با افزودن سه عضو و یک مفصل آن را بسط می‌دهیم و بطور همزمان رابطه را نیز حفظ می‌کنیم.

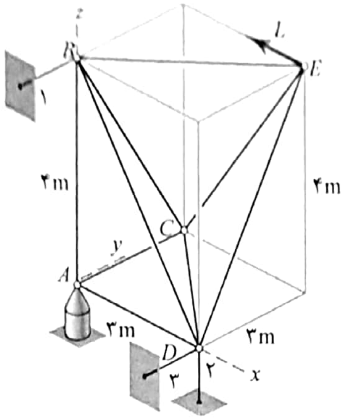
رابطهٔ بیان شده یک شرط لازم برای پایداری خرپاست ولی کافی نیست، زیرا عضوها را می‌توان طوری آرایش داد که خرپا پایدار بماند. اگر $3j<m+6$، تعداد عضوهای خرپا بیشتر از تعداد معادلات مستقل لازم خواهد بود. در این حالت خرپا نامعین استاتیکی داخلی است و عضوهای زاید دارد. اگر $3j>m+6$ باشد، تعداد عضوهای خرپا کافی نبوده و خرپا تحت بار وارده فرو می‌ریزد. رابطهٔ بالا وسیلهٔ مهم و مفیدی برای طراحی خرپاهای فضایی پایدار است، زیرا از روی شکل یک خرپای فضایی نمی‌توان تشخیص داد که خرپا پایدار است یا نه.



شکل ۱۳.۴

مسئلهٔ نمونهٔ ۵.۴

خرپای فضایی زیر از دو چهاروجهی صلب $ABCD$ که روی پایه‌های کاسه ـ ساچمه‌ای در نقطهٔ A محکم شده و میله‌های ۱، ۲ و ۳ که از چرخش خرپا حول محورهای x، y و z جلوگیری می‌کنند تشکیل شده است. بار L به مفصل E وارد می‌شود که توسط سه میلهٔ دیگر به هرم کاملاً محکم شده است. نیرو در عضوهای EB، EC و ED را به‌دست آورید. چگونه می‌توان نیرو در سایر عضوهای این خرپا را تعیین کرد؟



حل: یادآوری می‌کنیم که این خرپا با شش قید در محل‌های مناسب، سه قید در نقطهٔ A و سه قید در میله‌های ۱ و ۲ و ۳، مقید شده است. این خرپا جمعاً دارای ۹ عضو و ۵ مفصل است $m=۹$ و $j=۵$، و با در نظرگرفتن شرط $m+۶=۳j$؛ این جزء صلب است و تحت تأثیر بار فرو نمی‌ریزد.

❶ به‌سادگی می‌توان واکنش‌های خارجی در A، B و D را محاسبه کرد. اگرچه می‌توان مقدار آنها را از حل تمام نیروهای وارد شده بر هریک از مفصل‌ها نیز تعیین کرد.

اکنون با مفصلی شروع می‌کنیم، که حداقل یک نیروی معلوم و حداکثر دارای سه نیروی مجهول است. بنابراین احتمالاً به مفصل E می‌رویم. در نمودار جسم آزاد این مفصل جهت همهٔ ❷ نیروها را به‌دلخواه به طرف خارج در نظر می‌گیریم، یعنی عضوهای مربوط به این نمودار را کششی فرض می‌کنیم

$$\mathbf{F}_{EB}=\frac{F_{EB}}{\sqrt{۲}}(-\mathbf{i}-\mathbf{j}),\qquad \mathbf{F}_{EC}=\frac{F_{EC}}{۵}(-۳\mathbf{i}-۴\mathbf{k}),\qquad \mathbf{F}_{ED}=\frac{F_{ED}}{۵}(-۳\mathbf{j}-۴\mathbf{k})$$

برای مفصل معادلهٔ تعادل را می‌نویسیم

$$[\Sigma\mathbf{F}=۰]\qquad \mathbf{L}+\mathbf{F}_{EB}+\mathbf{F}_{EC}+\mathbf{F}_{ED}=۰$$

یا

$$-L\mathbf{i}+\frac{F_{EB}}{\sqrt{۲}}(-\mathbf{i}-\mathbf{j})+\frac{F_{EC}}{۵}(-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{k})+\frac{F_{ED}}{۵}(-۳\mathbf{j}-۴\mathbf{k})=۰$$

با مرتب‌سازی داریم

$$\left(-L-\frac{F_{EB}}{\sqrt{۲}}-\frac{۳F_{EC}}{۵}\right)\mathbf{i}+\left(-\frac{F_{EB}}{\sqrt{۲}}-\frac{۳F_{ED}}{۵}\right)\mathbf{j}+\left(-\frac{۴F_{EC}}{۵}-\frac{۴F_{ED}}{۵}\right)\mathbf{k}=۰$$

با قرار دادن ضرایب یکه $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ برابر صفر، سه معادله به‌دست می‌آید

$$\frac{F_{EB}}{\sqrt{۲}}+\frac{۳F_{EC}}{۵}=-L\qquad \frac{F_{EB}}{\sqrt{۲}}+\frac{۳F_{ED}}{۵}=۰\qquad F_{EC}+F_{ED}=۰$$

از معادلات بالا نتیجه می‌شود.

ج. $$F_{EB}=-L/\sqrt{۲}\qquad F_{EC}=-۵L/۶\qquad F_{ED}=۵L/۶$$

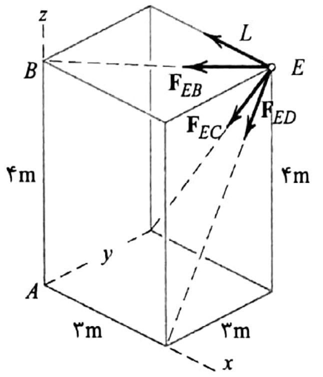
از این‌رو نتیجه می‌گیریم که F_{EB} و F_{EC} نیروهای فشاری‌اند و F_{ED} نیروی کششی است.

اگر در ابتدا واکنش‌های خارجی را محاسبه نکرده باشیم، باید به تحلیل مفصل C با مقدار معلوم F_{EC} و سه مجهول F_{CB}، F_{CA} و F_{CD} بپردازیم. روش کار با روش استفاده‌شده برای مفصل E یکسان است. مفصل‌های B، D و A را، هریک با سه نیروی مجهول، به‌ترتیب تحلیل می‌کنیم. البته نیروهای واکنشی خارجی که از این تحلیل‌ها محاسبه می‌شوند، باید با مقادیری که در ابتدا با تحلیل کل خرپا به‌دست می‌آیند، یکی باشند.

راهنمایی‌های مفید

❶ **پیشنهاد:** با رسم نمودار جسم آزاد کل خرپا و تحلیل معلوم می‌شود که واکنش نیروهای خارجی وارد بر خرپا برابرند با $\mathbf{A}_x=L\mathbf{i}$، $\mathbf{A}_y=L\mathbf{j}$ و $\mathbf{A}_z=(۴L/۳)\mathbf{k}$، $\mathbf{B}_y=۰$، $\mathbf{D}_y=-L\mathbf{j}$ و $\mathbf{D}_z=-(۴L/۳)\mathbf{k}$.

❷ با این فرض مقدار عددی منفی برای یک نیرو نشان می‌دهد که نیرو فشاری است.

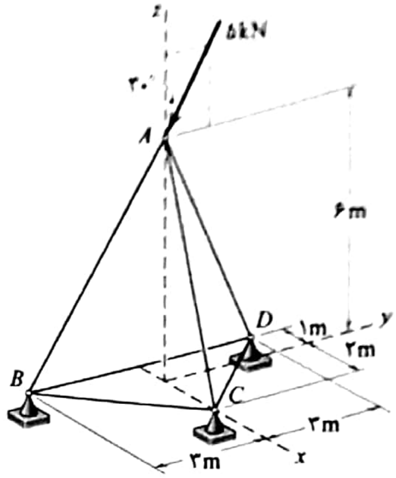


Scanned by CamScanner

مسائل

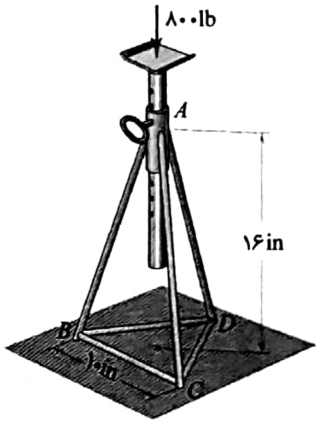
(در این مسائل از علامت جمع برای کشش و از علامت منفی برای فشار استفاده شده است.)

۵۹.۴ نیروهای موجود در عضوهای AB، AC و AD را تعیین کنید.



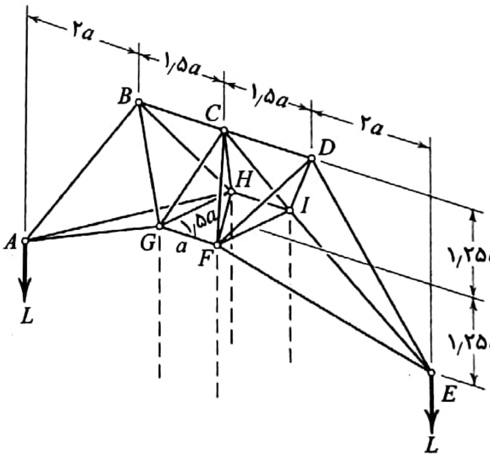
شکل م ۵۹.۴

۶۰.۴ پایهٔ جک اتومبیلی به‌شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ۱۰in و مرکز آن در طوقهٔ A می‌باشد. سازه را به‌عنوان خرپایی با مفصل‌های کاسه_ساچمه‌ای مدل کرده و نیروهای موجود در عضوهای BC، BD و CD را تعیین کنید. از همهٔ مؤلفه‌های واکنش‌های افقی در پایه‌های B، C و D صرف‌نظر کنید.



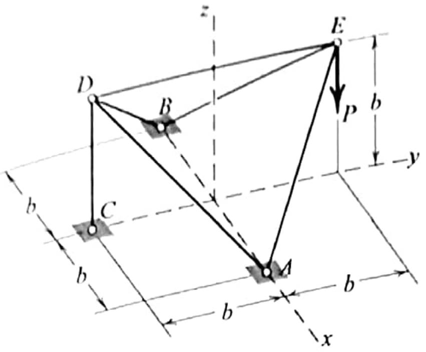
شکل م ۶۰.۴

۶۱.۴ سازهٔ ترسیم‌شده با در نظرگرفتن قسمت بالای آن برای برج انتقال قدرت و متکی بر نقاط F، G، H و I می‌باشد. نقطهٔ C مستقیماً بالای مرکز مستطیل $FGHI$ قرار دارد. نیرو در عضو CD را تعیین کنید.



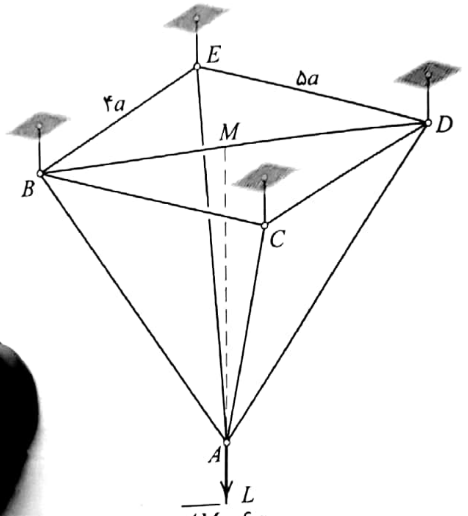
شکل م ۶۱.۴

۶۲.۴ خرپای فضایی به‌شکل یک چهاروجهی بر روی پایهٔ کاسه_ساچمه‌ای A و B متصل است، و میلهٔ قائم CD از چرخش آن حول AB جلوگیری می‌کند. پس از آگاهی از مؤلفه‌های قائم واکنش در خرپای متقارن در نقاط A و B، نمودار جسم آزاد آرایش مثلثی اتصال BDE را رسم نموده و مؤلفهٔ x نیروی وارد بر پایهٔ خرپا در نقطهٔ B را تعیین کنید.



شکل م ۶۲.۴

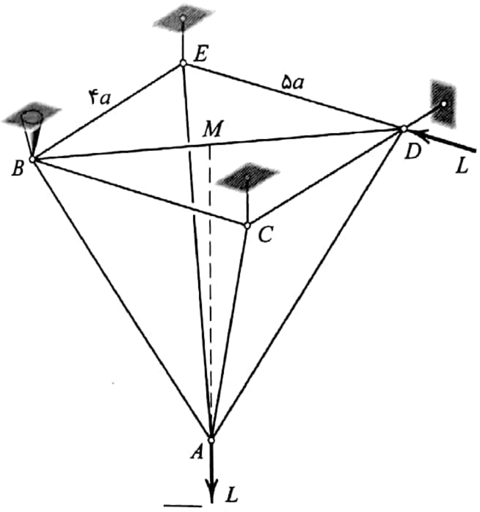
۶۳.۴ نیرو در عضوهای AC و BD از خرپای هرمی‌شکل معکوس با قاعدهٔ مستطیلی را معین کنید. نقطهٔ M در وسط BD قرار دارد.



$\overline{AM} = ۶a$

شکل م ۶۳.۴

۶۴.۴ قیدها و بارگذاری‌های مسئلهٔ ۶۳.۴ مطابق شکل تغییر یافته و از نوع دیگری انتخاب شده‌اند. نیرو در عضوهای AC و BD را تعیین کنید و با نتایج حاصل در مسئلهٔ ۶۳.۴ مقایسه کنید.

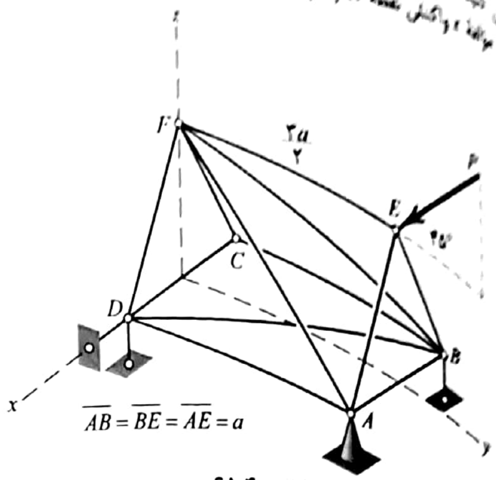


$\overline{AM} = ۶a$

شکل م ۶۴.۴

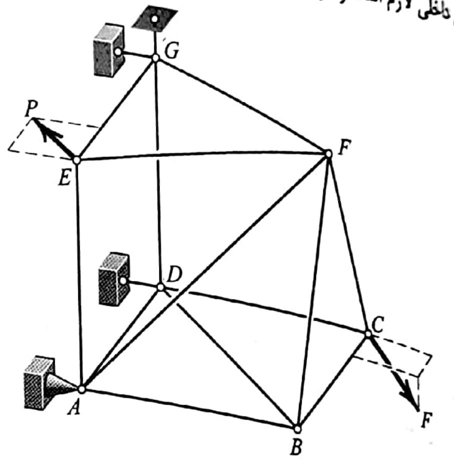
Scanned by CamScanner

۶۵.۴ در خرپای فضایی نشان‌داده‌شده، برای اطمینان از معین بودن استاتیکی خارجی ... کافی بودن تکیه‌گاه‌ها و همچنین تعداد عضوها و آرایش قرارگرفتن عضوها را ... کنید. با بارگذاری، نیرو در عضوهای DC، CH و CF را تعیین کنید. نیرو در عضو ... مؤلفهٔ x واکنش نقطهٔ D از خرپا را محاسبه کنید.



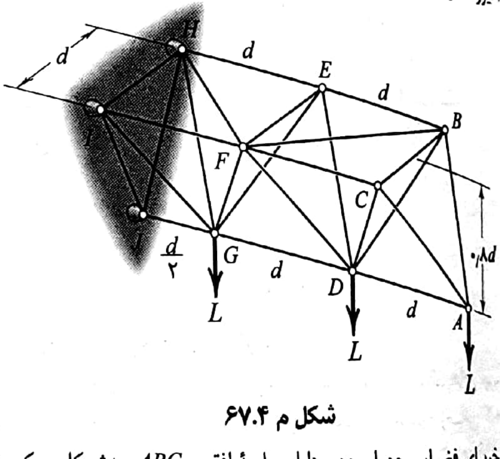
شکل م ۶۵.۴

۶۶.۴ خرپای فضایی نشان‌داده‌شده در مرحلهٔ میانی طراحی قرار دارد. قیدهای خارجی برای ایجاد تعادل خارجی کافی هستند. چه تعداد عضو اضافی برای جلوگیری از ناپایداری داخلی لازم است و در کجا آنها را می‌توان قرار داد.



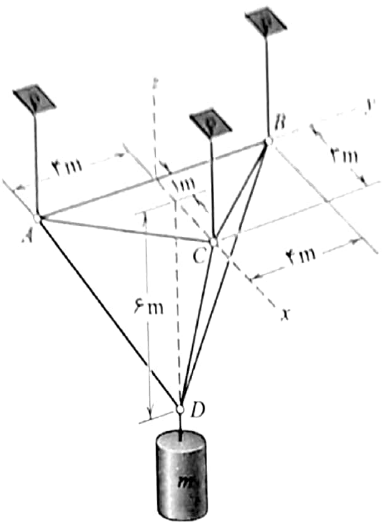
شکل م ۶۶.۴

۶۷.۴ نیروها در عضوهای AD و DG را تعیین کنید.



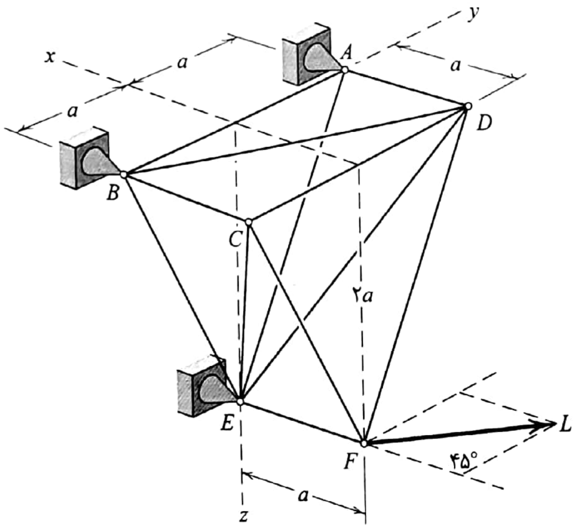
شکل م ۶۷.۴

۶۸.۴ خرپای فضایی چهاروجهی دارای پایهٔ افقی ABC به‌شکل یک مثلث متساوی‌الساقین است و پایه‌های AD، BD و CD جرم m را در نقطهٔ D نگهداری می‌کنند. هر رأس قاعده توسط یک سیم قائم به تکیه‌گاه بالایی آویزان شده است. نیروهای وارد بر عضوهای AC و AB را محاسبه کنید.



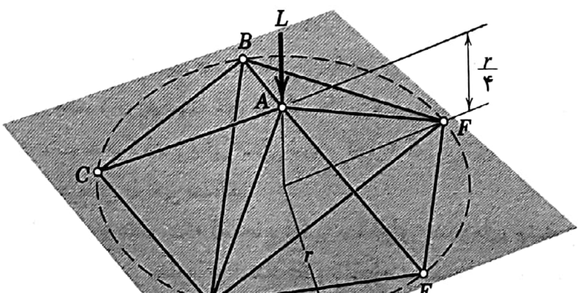
شکل م ۶۸.۴

۶۹.۴ خرپای فضایی نشان داده شده به تکیه‌گاه‌های ثابت A، B و E محکم شده است و با نیروی L با مؤلفه‌های x و y برابر و مؤلفهٔ z معادل صفر، بارگذاری‌شده است. نشان دهید که تعداد عضوها برای جلوگیری از پایداری داخلی کافی است و جای عضوها برای این منظور مناسب‌اند. سپس نیرو در عضوهای BC، CD و CE را تعیین کنید.



شکل م ۶۹.۴

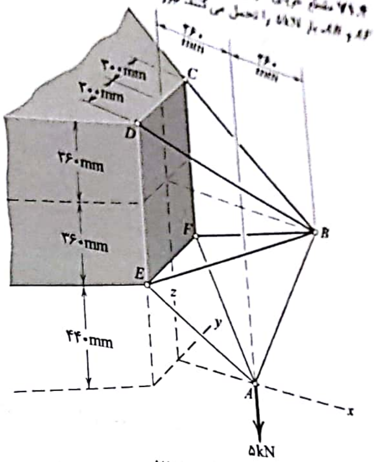
۷۰.۴ فرض می‌شود هریک از نقاط تکیه‌گاهی B، C، D، E و F با سطح افقی تکیه‌گاه تماس سادهٔ بدون اصطکاک دارند. اگر عضوهای BD و DF برداشته شوند، با توجه به بار قائم L نیروی تمامی عضوها چقدر خواهد بود؟ با حضور BD و DF، راه‌حل شما چگونه تغییر خواهد کرد؟



شکل م ۷۰.۴

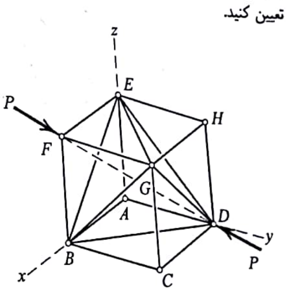
Scanned by CamScanner

۷۱.۴ مقطع خرپای هرمی $BCDEF$ حول صفحهٔ x-z متقارن است. کابل‌های AE، AF و AB بار ۵kN را تحمل می‌کنند. نیرو در عضو BE را تعیین کنید.



شکل م ۷۱.۴

۷۲.۴ خرپای فضایی به‌شکل مکعب ساخته شده و دارای شش عضو قطری مطابق شکل است. تحقیق کنید که خرپا دارای پایداری داخلی است. اگر خرپا تحت تأثیر نیروهای فشاری P وارد بر نقطهٔ F و D در امتداد قطر FD قرارگیرد، نیرو در عضوهای FE و EG را تعیین کنید.



شکل م ۷۲.۴

۶.۴ قاب‌ها و ماشین‌ها

سازه‌ای را یک *قاب* یا *ماشین* می‌نامند که حداقل یکی از عضوهای منفرد آن *عضو چندنیرویی* باشد. عضو چندنیرویی عضوی است که سه یا تعداد بیشتری نیرو بر آن اعمال می‌شود و یا تحت تأثیر دو یا چند نیرو و یک یا چند کوپل قرار گیرد. قاب‌ها سازه‌هایی هستند که برای نگهداری بارهای واردشده طراحی می‌شوند و معمولاً در موقعیت خود ثابت‌اند. ماشین‌ها سازه‌هایی هستند که دارای قطعات متحرک‌اند و برای انتقال نیرو و کوپل‌های ورودی به نیروها و کوپل‌های خروجی طراحی شده‌اند.

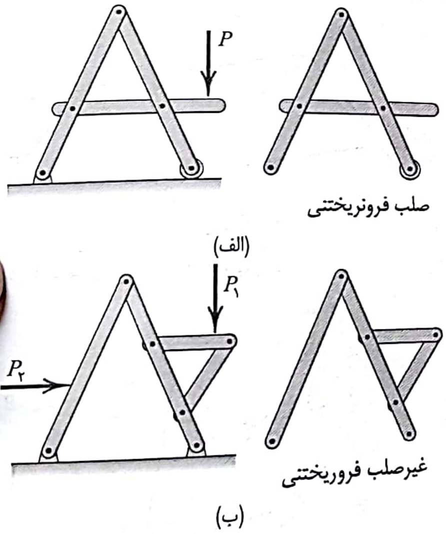
به‌طور کلی، به‌علت اینکه قاب‌ها و ماشین‌ها دارای عضوهای چندنیرویی هستند، نیروهای این عضوها در امتداد عضوها *نخواهند* بود. بنابراین نمی‌توانیم این سازه‌ها را با روش‌های مطرح‌شده در بخش‌های ۳.۴، ۴.۴ و ۵.۴ تحلیل کنیم، زیرا کاربرد این روش‌ها برای خرپاهای سادهٔ تشکیل‌شده از عضوهای دونیرویی بوده که در آن نیروها در امتداد عضوها هستند.

اجسام صلب متصل به‌هم با عضوهای چندنیرویی

در فصل ۳ دربارهٔ تعادل اجسام چندنیرویی بحث کردیم، ولی تمرکز ما همواره دربارهٔ تعادل اجسام منفرد چندنیرویی بوده است. در این فصل دربارهٔ اجسام صلب متصل به‌هم، دارای عضوهای چندنیرویی بحث می‌کنیم. اگرچه این قبیل اجسام را می‌توان مانند سیستم دوبعدی تحلیل کرد، اما نمونه‌های زیادی از قاب‌ها و ماشین‌ها که در سیستم سه‌بعدی‌اند وجود دارد.

نیروهای وارد بر هر عضو یک سیستم متصل به‌هم با جدا کردن عضو در یک نمودار جسم آزاد و به‌کار بردن معادلات تعادل به‌دست می‌آیند. وقتی نیروهای متصل به‌هم را به‌طور جداگانه در نمودار جسم آزاد نشان می‌دهیم، *اصل کنش و واکنش* باید به‌طور دقیق در نظر باشد. چنانچه سازه دارای عضو یا تکیه‌گاه‌هایی بیش از تعداد مورد نیاز برای جلوگیری از فروریختگی باشد، مانند مواردی در خرپاها، مسئله از نظر استاتیکی نامعین و اصول تعادل لزوماً برای حل کافی نیستند. هرچند که بسیاری از قاب‌ها و ماشین‌ها استاتیکی نامعین‌اند، ولی در این بخش تنها آنهایی که از نظر استاتیکی معین‌اند را در نظر می‌گیریم.

اگر قاب یا ماشین دارای یک دستگاه صلب در خودش باشد، وقتی یکی از تکیه‌گاه‌هایش را برداریم، مانند قاب A نشان داده شده در شکل ۱۴.۴ (الف)، بهترین روش تحلیل، مشخص کردن همهٔ نیروهای خارجی وارد بر سازه به‌عنوان یک جسم صلب تنهاست. سپس اجزای سازه را از هم جداساخته و تعادل هر قسمت را به‌طور مجزا در نظر می‌گیریم. معادلات تعادل اجزای مختلف را از طریق عباراتی که شامل نیروهای برهم‌کنش هستند به‌هم ارتباط می‌دهیم. اگر سازه دارای ساختار صلب در خودش نبوده ولی برای صلب بودن وابسته به تکیه‌گاه‌های خارجی باشد، همان‌طورکه در شکل ۱۴.۴ (ب) شرح داده شد، تا زمانی‌که سازه تجزیه و به‌صورت جداگانه تحلیل شود، محاسبات واکنش‌های تکیه‌گاه‌های خارجی را نمی‌توان تحلیل کرد.



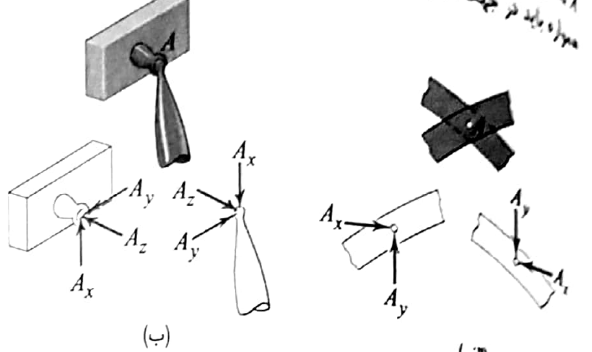
شکل ۱۴.۴

نمایش نیرو و نمودارهای جسم آزاد

در بیشتر موارد تحلیل قاب‌ها و ماشین‌ها به‌طور معمول از مؤلفه‌های نیروها در دستگاه عمود برهم استفاده می‌شود. این موضوع به‌ویژه زمانی که ابعاد قسمت‌های مفروض دوبه‌دو برهم عمود باشند مفید است. برتری این روش نمایش، سادگی محاسبهٔ بازوهای گشتاور است. در برخی مسائل سه‌بعدی، به‌خصوص زمانی‌که گشتاورها نسبت به محورهایی محاسبه می‌شوند که با محورهای مختصات موازی نیستند، استفاده از نماد برداری اولویت دارد.

Scanned by CamScanner

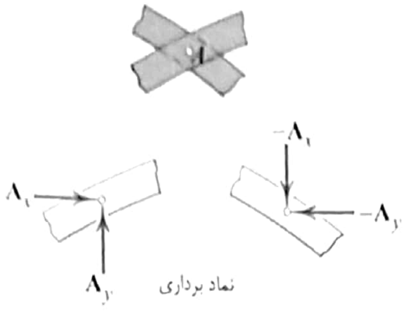
...ـروها برای ترسیم نمودار جسم آزاد همیشه تعیین جهت مناسب برای تمام نیروها ... مؤلفه‌هایشان امکان‌پذیر نیست و گاهی لازم است که جهت نیروها را به‌دلخواه ... در نظر گرفته و اصل کنش و واکنش قانون سوم نیوتن را برای تمام نیروهایی که بر نمودار جسم آزاد وارد می‌شوند مراعات کرد. در هر صورت، نیرویی که در نمودار جسم آزاد نشان داده می‌شود. *قطعاً لازم است* که جهت آن بر نمودارهای ... مختلف سازگار باشد. بنابراین برای دو جسمی که در شکل ۱۵.۴ (الف) توسط پین ... به هم متصل شده‌اند، مؤلفه‌های نیرو بر روی نمودارهای جسم آزاد جداگانه، همواره باید در جهت‌های *مخالف* یکدیگر نمایش داده شوند.



شکل ۱۵.۴

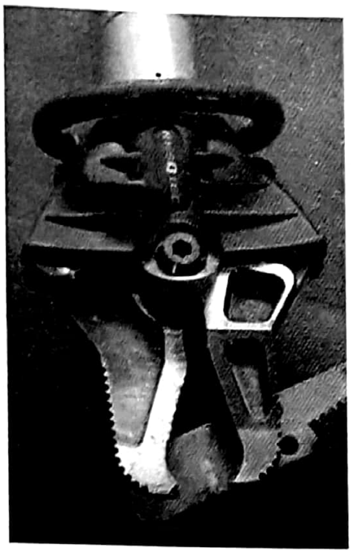
برای یک اتصال کاسه ـ ساچمه‌ای بین اعضای یک قاب فضایی، باید مطابق شکل ۱۵.۴ (ب)، اصل کنش و واکنش را برای هر سه مؤلفه به‌کار ببریم. صحت جهت فرضی برای هر نیرو با تشخیص علامت آن نیرو در جواب مسئله معین می‌شود مثلاً علامت منفی برای جواب A_x در شکل ۱۵.۴ (ب) نشان می‌دهد که جهت واقعی آن خلاف جهت انتخاب شده در ابتدای کار است. پس لازم است جهت نیرو بر روی هر دو عضو و نیز علامت نیروها در معادلات عوض شود ضمناً می‌توانیم همان جهت انتخاب‌شدهٔ اولیه را برای تعیین نیرو حفظ کرده و دقت کنیم که جهت واقعی نیرو در خلاف جهت نشان داده شده باشد.

هنگام استفاده از نماد برداری برای مشخص کردن نیروها، باید دقت کنیم که مطابق شکل ۱۶.۴ برای یک نیروی کششی علامت مثبت و برای واکنش متناظر آن، از علامت منفی استفاده کنیم.



شکل ۱۶.۴

برای تعیین نیروهای مجهول گاهی باید دو یا چند معادله را هم‌زمان حل کرد، تا مجهولات از یکدیگر جدا شوند. اما با انتخاب دقیق عضو یا مجموعه‌ای از عضوها برای رسم نمودار جسم آزاد و با انتخاب دقیق محورهای گشتاور مناسبی که جمله‌های ناخواسته را در محاسبات حذف می‌کنند، می‌توان از حل معادلات هم‌زمان اجتناب کرد. برای توضیح مطالب بالا چند مسئلهٔ نمونه حل کرده‌ایم.

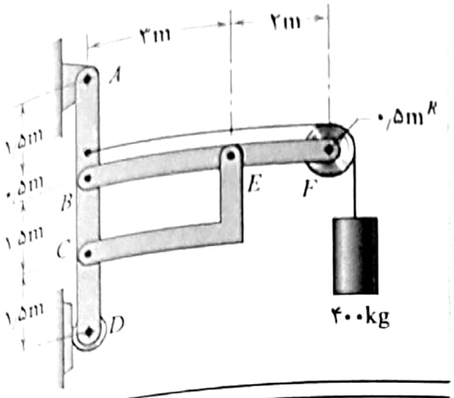


از ماشین "فک نجات" برای نجات سرنشینان از بدنهٔ مچاله‌شدهٔ اتومبیل‌های تصادفی استفاده می‌شود.

Scanned by CamScanner

مسئله نمونه ۶٫۹

قاب نشان داده‌شده بار ۴۰۰kg را تحمل می‌کند. با صرف‌نظر کردن از وزن عضوها، مؤلفه‌های افقی و عمودی نیرو در هر عضو را تعیین کنید.



حل: ❶ ابتدا ملاحظه می‌کنیم که سه عضو تکیه‌گاهی که قاب را می‌سازند مجموعهٔ صلبی را تشکیل می‌دهند که می‌توان آن را به‌عنوان یک واحد منفرد تحلیل کرد. همچنین دیده می‌شود که به‌دلیل آرایش تکیه‌گاه‌های خارجی، قاب از نظر استاتیکی معین است.

از نمودار جسم آزاد کل قاب، نیروهای واکنشی خارجی را تعیین می‌کنیم. از این‌رو

$[\Sigma M_A = ۰]$ ۵٫۵(۰٫۴)(۹٫۸۱) − ۵D = ۰ D = ۴٫۳۲kN

$[\Sigma F_x = ۰]$ A_x − ۴٫۳۲ = ۰ A_x = ۴٫۳۲kN

$[\Sigma F_y = ۰]$ A_y − ۳٫۹۲ = ۰ A_y = ۳٫۹۲kN

بعد قاب را از هم جداکرده و نمودار جسم آزاد هر عضو را جداگانه رسم می‌کنیم. این نمودارها را در وضعیت‌های نسبی تقریبی آنها قرار می‌دهیم تا بتوانیم نیروهای برهم‌کنشی مشترک را ردیابی کنیم. واکنش‌های خارجی را که این‌گونه به‌دست می‌آیند، روی نمودار AD قرار می‌دهیم. سایر نیروهای معلوم عبارت‌اند از نیروهای ۳٫۹۲kN که از محور قرقره بر عضو BF وارد شده و از نمودار جسم آزاد قرقره به‌دست می‌آیند. نیروی کشش کابل به مقدار ۳٫۹۲kN نیز در نقطهٔ اتصال کابل به عضو AD نشان داده شده است.

سپس، مؤلفه‌های همهٔ نیروهای مجهول را روی نمودارها نشان می‌دهیم. در اینجا مشاهده ❷ می‌کنیم که CE یک عضو دونیرویی است. مؤلفه‌های نیروی وارد بر CE دارای واکنش‌هایی با مقدار برابر و جهت‌های مخالف هستند، و در E بر BF و در C بر AD وارد می‌شوند. ممکن است نتوانیم با نگاه اول، جهت واقعی مؤلفه‌های نیروی B را تشخیص دهیم، بنابراین آنها را به‌دلخواه، اما به‌صورت سازگار انتخاب می‌کنیم.

با استفاده از معادلهٔ گشتاور نیروی عضو BF حول نقاط B یا E و نوشتن دو معادلهٔ نیرو، حل مسئله را ادامه می‌دهیم

$[\Sigma M_B = ۰]$ ۳٫۹۲(۵) − $\frac{1}{2}E_x$(۳) = ۰ E_x = ۱۳٫۰۸kN ج.

$[\Sigma F_y = ۰]$ B_y + ۳٫۹۲ − ۱۳٫۰۸/۲ = ۰ B_y = ۲٫۶۲kN ج.

$[\Sigma F_x = ۰]$ B_x + ۳٫۹۲ − ۱۳٫۰۸ = ۰ B_x = ۹٫۱۵kN ج.

مقادیر عددی مثبت مجهولات به این معنی است که جهت آنها را در نمودار جسم آزاد به‌درستی نشان داده‌ایم. اکنون مقدار $C_x = E_x$ = ۱۳٫۰۸kN را که با یک نگاه به نمودار جسم آزاد CE به‌دست می‌آید، به‌همراه مقادیر B_x و B_y که هم‌اکنون به‌دست آمده‌اند، بر روی نمودار AD وارد می‌کنیم. حال می‌توان معادلات تعادل را در مورد عضو AD به‌کار برد و نتایج را بازبینی کرد، زیرا تمام نیروهای وارد بر آن را پیش از این محاسبه کرده‌ایم. از این معادلات نتیجه می‌شود

$[\Sigma M_C = ۰]$ ۴٫۳۲(۳٫۵) + ۴٫۳۲(۱٫۵) − ۳٫۹۲(۲) − ۹٫۱۵(۱٫۵) = ۰

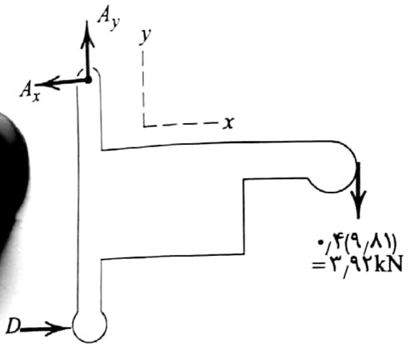
$[\Sigma F_x = ۰]$ ۴٫۳۲ − ۱۳٫۰۸ + ۹٫۱۵ + ۳٫۹۲ + ۴٫۳۲ = ۰

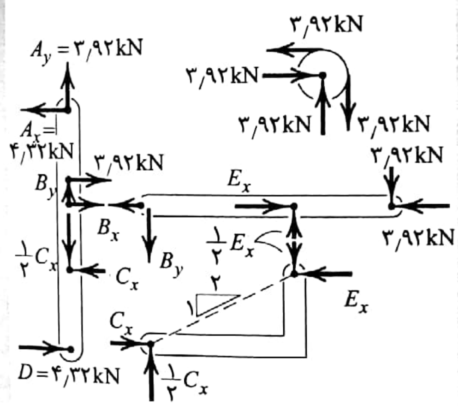
$[\Sigma F_y = ۰]$ −۱۳٫۰۸/۲ + ۲٫۶۲ + ۳٫۹۲ = ۰

راهنمایی‌های مفید

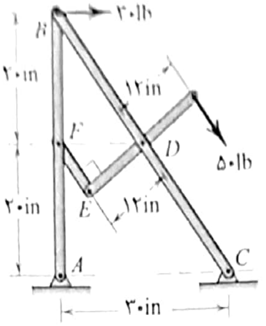
❶ ملاحظه می‌شود که این قاب از نوع نشان داده شده در شکل ۱۴.۴ (الف) می‌باشد.

❷ عدم توجه به این نکته می‌توانست حل مسئله را بسیارطولانی کند. زیرا سه معادلهٔ تعادل برای عضو BF دارای چهار مجهول B_x، B_y، E_x و E_y است. توجه کنید که خط واصل دو نقطه‌اثر نیرو، و نه شکل عضو، تعیین‌کنندهٔ جهت نیروهای وارد بر یک عضو دونیرویی است.





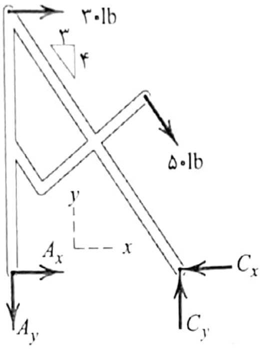
مسئله نمونه ۷.۴ نیروهای وارد بر همهٔ عضوها را تعیین کنید. از وزن قاب صرف‌نظر کنید.



حل: ابتدا توجه کنید هنگامی که این قاب از تکیه‌گاهش جدا می‌شود صلب نیست، زیرا ❶ **BDEF چهارضلعی متحرک است نه یک مثلث صلب.** در نتیجه نمی‌توان واکنش‌های خارجی را **به‌طور کامل تعیین کرد، مگر اینکه تک‌تک اعضا** مورد تحلیل قرارگیرند. البته می‌توانیم ❷ **مؤلفه‌های قائم نیروهای واکنشی** را در A و C از نمودار جسم آزاد قاب کامل به‌دست آوریم. **بنابراین**

$[\Sigma M_C = ۰]$ $\quad ۵۰(۱۲) + ۳۰(۴۰) - ۳۰A_y = ۰ \quad A_y = ۶۰\text{lb}$ ج

$[\Sigma F_y = ۰]$ $\quad C_y - ۵۰(۴/۵) - ۶۰ = ۰ \quad C_y = ۱۰۰\text{lb}$ ج



سپس عضوهای قاب را جدا می‌کنیم و نمودار جسم آزاد هر جزء را رسم می‌نماییم. از آنجاکه EF **یک عضو** دونیرویی است، جهت نیروی مؤثر بر ED در E و مؤثر بر AB در F معلوم ❸ **است. فرض** می‌کنیم نیروی ۳۰lb، به‌عنوان بخشی از عضو BC، به پین وارد شود. تعیین جهت **صحیح اعمال نیروهای** E، F، D و B_x به‌سادگی انجام خواهد شد، اما جهت B_y را نمی‌توان با **بررسی مختصر** مشخص کرد و از این‌رو روی عضو AB به‌طرف بالا و روی عضو BC به‌سمت **پایین** نشان داده می‌شود.

عضو ED. دو مجهول به‌آسانی با روابط زیر به‌دست می‌آید

$[\Sigma M_D = ۰]$ $\quad ۵۰(۱۲) - ۱۲E = ۰ \quad E = ۵۰\text{lb}$ ج

$[\Sigma F = ۰]$ $\quad D - ۵۰ - ۵۰ = ۰ \quad D = ۱۰۰\text{lb}$ ج

عضو EF. واضح است که F با مقدار ۵۰lb برابر و مخالف E است.

عضو AB. چون F اکنون معلوم است، پس B_x، A_x و B_y را از سه معادلهٔ تعادل دیگر به‌دست می‌آوریم

$[\Sigma M_A = ۰]$ $\quad ۵۰(۳/۵)(۲۰) - B_x(۴۰) = ۰ \quad B_x = ۱۵\text{lb}$ ج

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad A_x + ۱۵ - ۵۰(۳/۵) = ۰ \quad A_x = ۱۵\text{lb}$ ج

$[\Sigma F_y = ۰]$ $\quad ۵۰(۴/۵) - ۶۰ - B_y = ۰ \quad B_y = -۲۰\text{lb}$ ج

علامت منفی نشان می‌دهد که جهت B_y، در جهت درستی انتخاب نشده است.

عضو BC. نتایج B_x، B_y و D را اکنون به عضو BC منتقل می‌کنیم و مجهول باقی‌مانده، ❹ C_x، را به‌دست می‌آوریم

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad ۳۰ + ۱۰۰(۳/۵) - ۱۵ - C_x = ۰$

$C_x = ۷۵\text{lb}$ ج

می‌توانیم از دو معادلهٔ تعادل باقی‌مانده برای وارسی استفاده کنیم. بنابراین

$[\Sigma F_y = ۰]$ $\quad ۱۰۰ + (-۲۰) - ۱۰۰(۴/۵) = ۰$

$[\Sigma M_C = ۰]$ $\quad (۳۰ - ۱۵)(۴۰) + (-۲۰)(۳۰) = ۰$

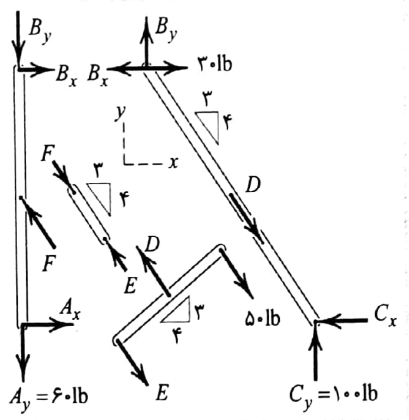
راهنمایی‌های مفید

❶ می‌بینیم که این قاب از نوع قاب نشان داده شده در شکل ۱۴.۴ (ب) است.

❷ جهت‌های A_x و C_x در اصل واضح نیستند و می‌توان به‌طور دلخواه مشخص کرد. بعداً صحت آن را در صورت لزوم تعیین خواهیم کرد.

❸ به‌طریق دیگر نیروی ۳۰lb را می‌توانستیم برای پینی که جزئی از عضو BA است اعمال کنیم. در نتیجه واکنش B_x تغییر جهت می‌دهد.

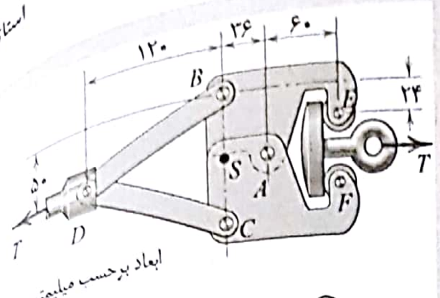
❹ به‌روشی دیگر، می‌توانستیم به نمودار جسم آزاد قاب کامل بازگردیم و C_x را به‌دست آوریم.



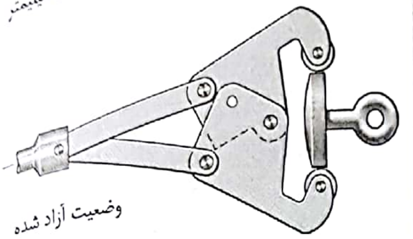
Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۸،۴

ماشین نشان داده شده وسیله‌ای است برای حفاظت و جلوگیری از افزایش بار T. پین برشی S که از مادهٔ نرمی ساخته شده است، داخل سوراخی که در نیمهٔ پایین این وسیله قرار دارد جازده شده است وقتی کل نیروی وارد بر پین از حدّ تحمل آن بیشتر می‌شود، پین می‌شکند. سپس، همان‌طور که در شکل دوم نشان داده شده، به‌علت کشش‌های BD و CD نیمهٔ بالایی و پایینی حول A می‌چرخند، در نتیجه غلتک‌های E و F پیچ گوشواره‌ای را رها می‌کنند. اگر پین S تحت اثر نیروی ۸۰۰ نیوتن شکسته شود، حداکثر بار T و نیروی نظیر وارد بر پین A را به‌دست آورید.

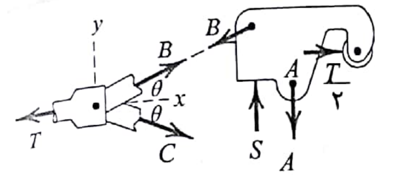


ابعاد برحسب میلیمتر



وضعیت آزاد شده

حل: به علت تقارن، فقط یکی از دو نیمهٔ این وسیله را تحلیل می‌کنیم. نیمهٔ بالایی را انتخاب کرده و نمودار جسم آزاد آن را همراه مفصل D رسم می‌کنیم. به‌علت تقارن، نیروهای وارد بر S و A، مؤلفهٔ x ندارند. عضوهای دونیرویی BD و CD نیروهایی با مقدار یکسان $B=C$ را بر مفصل D وارد می‌کنند. پس برای این مفصل می‌نویسیم



$[\Sigma F_x=۰]$ $\quad B\cos\theta + C\cos\theta - T = ۰ \qquad ۲B\cos\theta = T$

$$B = T/(۲\cos\theta)$$

از نمودار جسم آزاد برای نیمهٔ بالایی عبارت گشتاورهای تعادل حول A را بیان می‌کنیم. با قرار دادن $S = ۸۰۰\,\text{N}$ و عبارتی که برای B به‌دست آمده است، می‌نویسیم

$[\Sigma M_A=۰]$

$$\frac{T}{۲\cos\theta}(\cos\theta)(۵۰)+\frac{T}{۲\cos\theta}(\sin\theta)(۳۶)-۳۶\times(۸۰۰)-\frac{T}{۲}(۲۶)=۰$$

با قراردادن $\sin\theta/\cos\theta=\tan\theta=۵/۱۲$ و حل برای T نتیجه می‌شود

$$T\left(۲۵+\frac{۵(۳۶)}{۲(۱۲)}-۱۳\right)=۲۸۸۰۰$$

$$T=۱۴۷۷\,\text{N} \quad \text{یا} \quad T=۱{,}۴۷۷\,\text{kN}$$ ج.

سرانجام تعادل در امتداد y نتیجه می‌دهد

$[\Sigma F_y=۰]$

$$S-B\sin\theta-A=۰$$

$$۸۰۰-\frac{۱۴۷۷}{۲(۱۲/۱۳)}\frac{۵}{۱۳}-A=۰$$

$$A=۴۹۲\,\text{N}$$ ج.

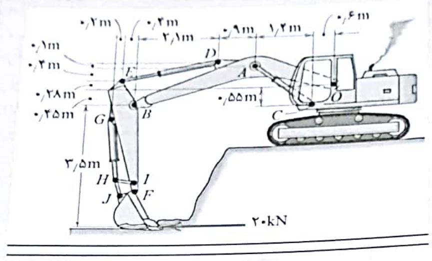
راهنمایی‌های مفید

❶ همواره تشخیص تقارن مفید است. در اینجا نیروهای وارد بر نیمهٔ بالایی و پایینی مانند تصاویر آینه‌ای نسبت به محور x عمل می‌کند. بنابراین نیروی کشش در یک عضو نمی‌تواند در جهت مثبت x باشد و واکنش آن در عضو دیگر در جهت منفی x. در نتیجه نیروها در S و A دارای مؤلفه روی محور x نیستند.

❷ مراقب باشید که گشتاور مؤلفهٔ y نیروی B را فراموش نکنید. یکاهای به‌کار رفته در این مسئله برحسب نیوتن میلیمتر هستند.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۹.۴
در وضعیت نشان داده شده، نیروی ۲۰kN را به‌موازات سطح زمین وارد می‌کند. سیلندر هیدرولیکی AC بازوی OAB و سیلندر هیدرولیکی DE بازوی $EBIF$ را کنترل می‌کنند. (الف) نیرو در سیلندر هیدرولیکی AC و فشار p_{AC} وارد بر پیستون‌های AC و (ب) نیرو در سیلندر هیدرولیکی DE و فشار p_{DE} وارد بر پیستون DE را تعیین کنید. قطر هریک از پیستون‌های AC برابر ۹۵mm و قطر پیستون DE برابر ۱۰۵mm است. از وزن عضوها در مقایسه با اثرات نیروی ۲۰ کیلونیوتنی صرف‌نظر شود.



حل: (الف) ابتدا نمودار جسم آزاد کل مجموعهٔ بازو را رسم می‌کنیم. در اینجا جزئیات سیلندرهای DE و GH را لازم نداریم. حال می‌نویسیم

$$[\Sigma M_O = ۰] \qquad -۲۰۰۰۰(۳٫۹۵) - ۲F_{AC}\cos ۴۱٫۳^\circ(۰٫۶۸) + ۲F_{AC}\sin ۴۱٫۳^\circ(۲) = ۰$$

$$F_{AC} = ۴۸۸۰۰\,\text{N} \text{ یا } ۴۸٫۸\,\text{kN}$$ ج.

❶ از رابطهٔ $F_{AC} = p_{AC}A_{AC}$ داریم

$$p_{AC} = \frac{F_{AC}}{A_{AC}} = \frac{۴۸۸۰۰}{\left(\pi\frac{۰٫۰۹۵^۲}{۴}\right)} = ۶٫۸۹(۱۰^۶)\,\text{Pa} \text{ یا } ۶٫۸۹\,\text{MPa}$$ ج.

ب) برای سیلندر DF، نمودار جسم آزاد را در نقطه‌ای "برش" می‌زنیم که نیروی سیلندر DF به‌عنوان نیروی خارجی باشد، به‌این‌ترتیب بازوی عمودی $EBIF$ همراه با جام ماشین به‌صورت یک مقطع جداگانه درمی‌آید. برای این مقطع می‌نویسیم

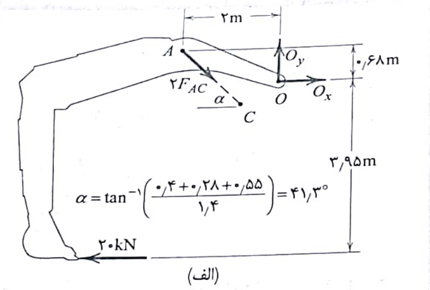
$$[\Sigma M_B = ۰] \qquad -۲۰۰۰۰(۳٫۵) + F_{DE}\cos ۱۱٫۳۱^\circ(۰٫۷۳) + F_{DE}\sin ۱۱٫۳۱^\circ(۰٫۴) = ۰$$

$$F_{DE} = ۸۸۱۰۰\,\text{N} \text{ یا } ۸۸٫۱\,\text{kN}$$ ج.

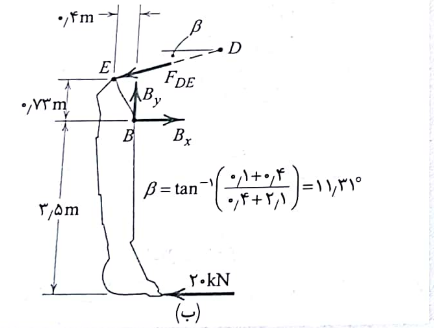
$$p_{DE} = \frac{F_{DE}}{A_{DE}} = \frac{۸۸۱۰۰}{\left(\pi\frac{۰٫۱۰۵^۲}{۴}\right)} = ۱۰٫۱۸(۱۰^۶)\,\text{Pa} \text{ یا } ۱۰٫۱۸\,\text{MPa}$$ ج.

راهنمایی مفید

❶ یادآور می‌شود که نیرو = (مساحت) (فشار).



(الف)



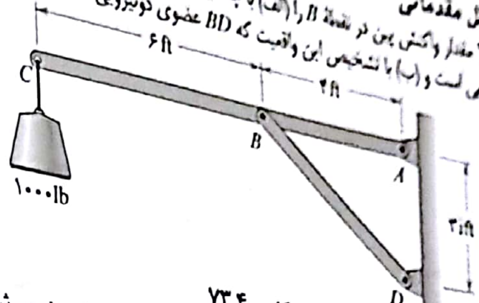
(ب)

مسائل

در مسائل زیر، از جرم عضوهای مختلف و اصطکاک در آنها صرف‌نظر کنید، مگر اینکه خلاف آن بیان شود.

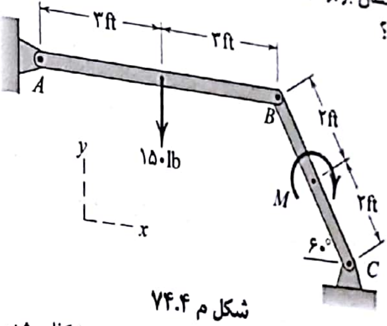
مسائل مقدماتی

۷۳.۴ مقدار واکنش پین در نقطهٔ B را (الف) با چشم‌پوشی از این واقعیت که BD یک عضو دونیرویی است و (ب) با تشخیص این واقعیت که BD عضوی دونیرویی است، تعیین کنید.



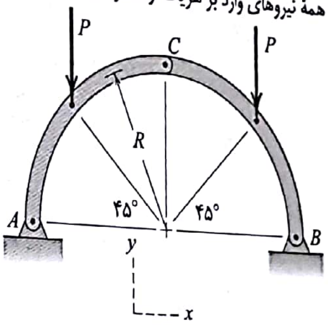
شکل م ۷۳.۴

۷۴.۴ برای چه‌مقدار M کوپل ساعتگرد مؤلفهٔ افقی A_x واکنش در A صفر می‌شود؟ اگر کوپلی یکسان برابر کوپل M قبلی در جهت پادساعتگرد وارد شود، مقدار A_x چقدر می‌تواند باشد؟



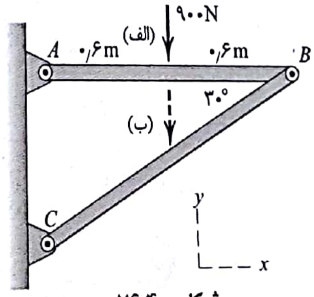
شکل م ۷۴.۴

۷۵.۴ مؤلفه‌های همهٔ نیروهای وارد بر هریک از عضوهای قاب بارگذاری‌شده را تعیین کنید.



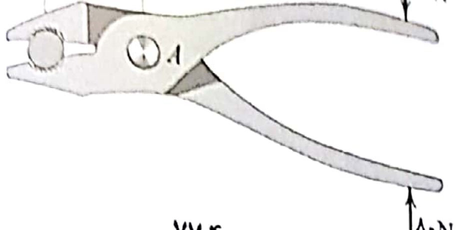
شکل م ۷۵.۴

۷۶.۴ مقدار و جهت نیرویی را که عضو BC بر عضو AB وارد می‌کند تعیین کنید، اگر (الف) بار ۹۰۰N بر مرکز عضو AB وارد شود و (ب) بار ۹۰۰N بر مرکز عضو BC وارد شود.



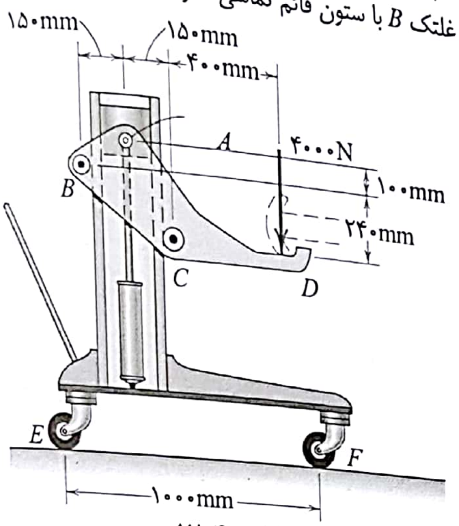
شکل م ۷۶.۴

۷۷.۴ بر اثر فشار نیروی ۸۰ نیوتنی بر دسته‌های انبردستی مطابق شکل، نیروی F وارد شده بر میل‌گرد از طرف هر فک را تعیین کنید. علاوه بر آن نیروی واردشده بر پین نقطهٔ A را محاسبه کنید.



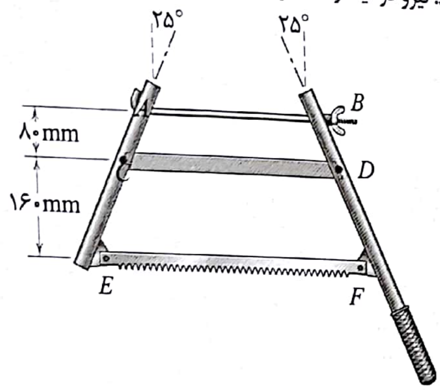
شکل م ۷۷.۴

۷۸.۴ جک فشاری اتومبیل برای تحمل بار روبه‌پایین ۴۰۰۰N طراحی شده است. با رسم نمودار جسم آزاد BCD شروع کرده و نیروی واردشده بر غلتک C را تعیین کنید. توجه کنید که غلتک B با ستون قائم تماسی ندارد.



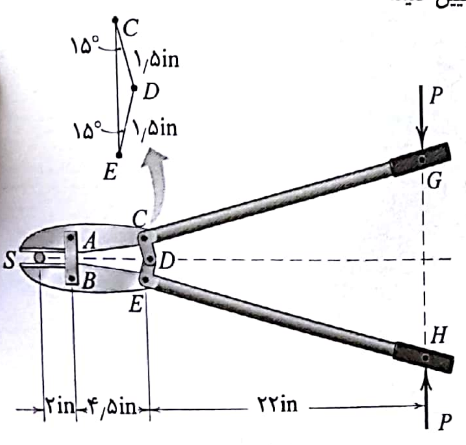
شکل م ۷۸.۴

۷۹.۴ مهرهٔ خروسکی B ارهٔ چوب‌بری زیر را آن‌قدر سفت می‌کنیم تا کشش در اتصال AB به ۲۰۰N برسد. نیرو در تیغهٔ EF و مقدار F نیروی واردشده بر پین C را تعیین کنید.



شکل م ۷۹.۴

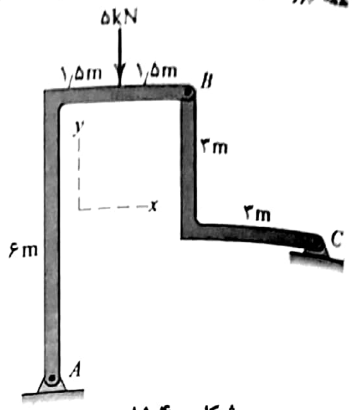
۸۰.۴ نیروی برشی F وارد بر میل‌گرد S را برحسب نیروهای P وارد بر دسته‌های ابزار برش تعیین کنید.



شکل م ۸۰.۴

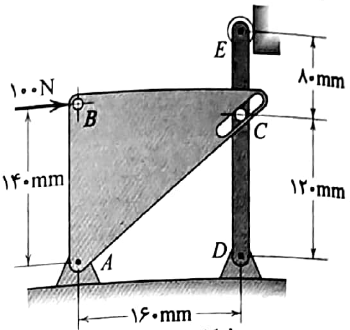
Scanned by CamScanner

۸۱.۴ مؤلفه‌های همهٔ نیروهای وارد بر هر عضو قاب بارگذاری‌شده را تعیین کنید.



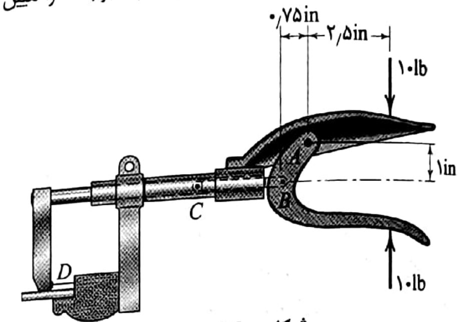
شکل م ۸۱.۴

۸۲.۴ اندازهٔ نیروی وارد بر پین D را محاسبه کنید. پین C در DE ثابت است و در برابر شکاف صاف در صفحهٔ مثلث پایداری می‌کند.



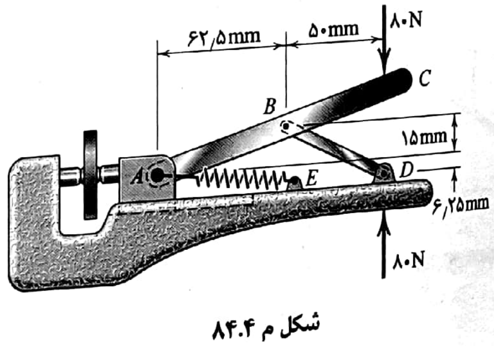
شکل م ۸۲.۴

۸۳.۴ وسیلهٔ نشان داده شده در شکل برای فرو راندن بست در چوب قاب عکس طراحی شده است. با توجه به نیروهای 10lb وارد بر دسته‌ها، نیروی F وارد بر بست را تعیین کنید.



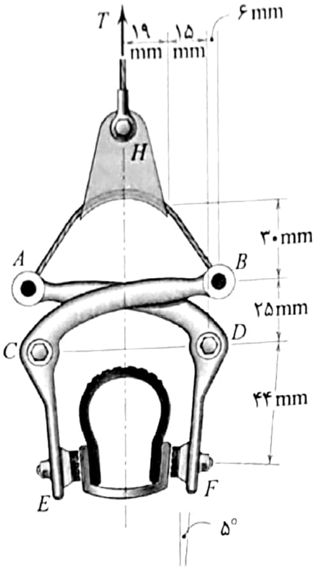
شکل م ۸۳.۴

۸۴.۴ یک جفت نیروی 80N بر دسته‌های ابزار کوچک منگنهٔ نشان داده شده وارد می‌شود. قطعه‌ای در نقطهٔ A با اصطکاک ناچیز در شکاف بخش پایینی ابزار می‌لغزد. از نیروی کوچک فنر ضعیف AE صرف‌نظر کرده و فشار نیروی P وارد بر حلقه را تعیین کنید.



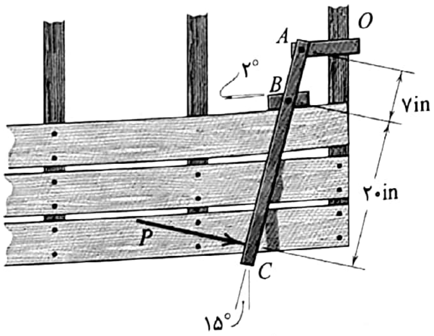
شکل م ۸۴.۴

۸۵.۴ اجزای مرکزی ترمز کششی دوچرخه مطابق شکل است. دو بازوی ترمز آزادانه حول محورهای ثابت C و D می‌چرخند (تکیه‌گاه‌های دستک نشان داده نشده‌اند). اگر کشش T کابل ترمز وارد بر نقطهٔ H نیرویی برابر 160N وارد کند، نیروهای عمود وارد بر چرخ دوچرخه را به‌واسطهٔ ترمزهای E و F تعیین کنید.



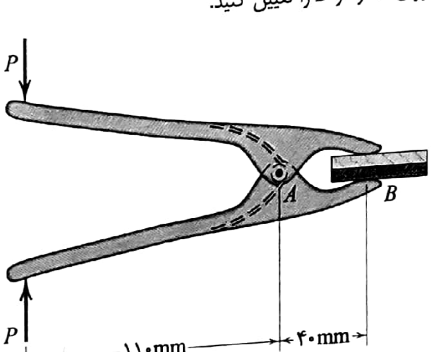
شکل م ۸۵.۴

۸۶.۴ وسیلهٔ نشان‌داده‌شده برای صاف کردن تختهٔ خمیدهٔ پوشش کف، پیش از میخ‌کوبی به دیرک‌ها، استفاده می‌شود. در نقطهٔ O برآمدگی وجود دارد (نشان داده نشده) که قطعهٔ OA را به یک دیرک متصل می‌کند، به‌گونه‌ای که لولای A می‌تواند ثابت باقی بماند. برای یک نیروی مفروض P وارد بر دستهٔ ABC که به شکل عمودی وارد می‌شود، نیروی متناظر N وارد بر نقطهٔ B را که بر تختهٔ خمیده وارد می‌شود تعیین کنید. از اصطکاک صرف‌نظر شود.



شکل م ۸۶.۴

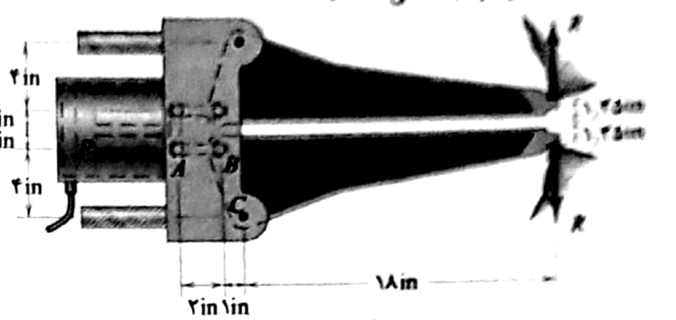
۸۷.۴ گیرهٔ فنری مطابق شکل، برای نگهداری اجسام به‌کار می‌رود. یک فنر داخلی دور پین A پیچیده شده که در برابر سطح داخلی دسته‌ها مقاومت می‌کند. در موقعیت نشان داده شده نیرویی به‌میزان $P = 25N$ برای آزاد شدن دهانهٔ گیره لازم است. اگر $P = 0$، نیروی فشار در B را تعیین کنید.



شکل م ۸۷.۴

Scanned by CamScanner

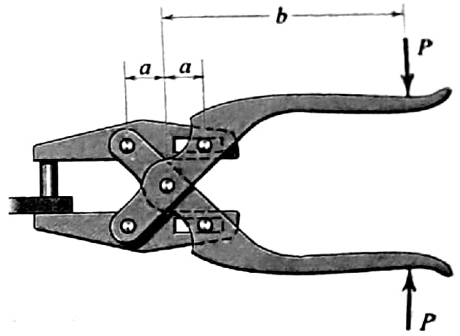
۸۸.۴ مأموران نجات برای جداکردن بدنهٔ مچاله‌شدهٔ اتومبیل‌های تصادفی از دستگاه کمک‌های نجات* استفاده می‌کنند. اگر فشار $۵۰۰lb/in^2$ در پشت پیستون P با سطح $۲in^2$ وارد شود، نیروی عمودی R که به‌واسطهٔ نوک فک‌ها بر فلز مچاله‌شده در وضعیت نشان داده شده وارد می‌شود، را تعیین کنید. توجه داشته باشید که میلهٔ AB و همسایگی آن در این موقعیت افقی هستند.



شکل م ۸۸.۴

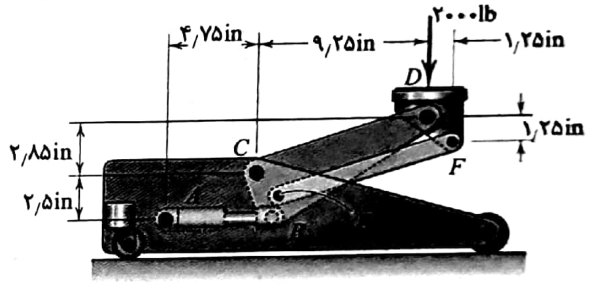
مسائل برگزیده

۸۹.۴ برای دستگاه کاغذسوراخ‌کن نشان داده شده، نیروی سوراخ‌کن Q متناظر با نیروی P وارد بر دسته را بیابید.



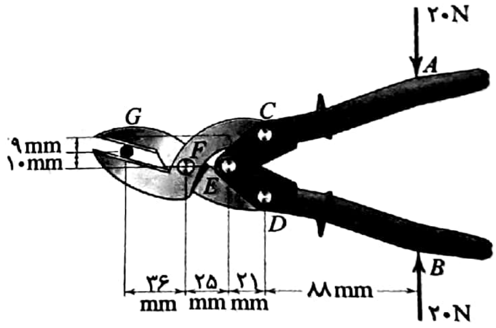
شکل م ۸۹.۴

۹۰.۴ اجزای یک جک سوسماری در شکل نشان داده شده است. شکل CDFE متوازی‌الاضلاع است. نیروی سیلندر هیدرولیکی AB متناظر با بار ۲۰۰۰lb را که مطابق شکل بر جک اعمال می‌شود محاسبه کنید. نیرو در اتصال EF چقدر است؟



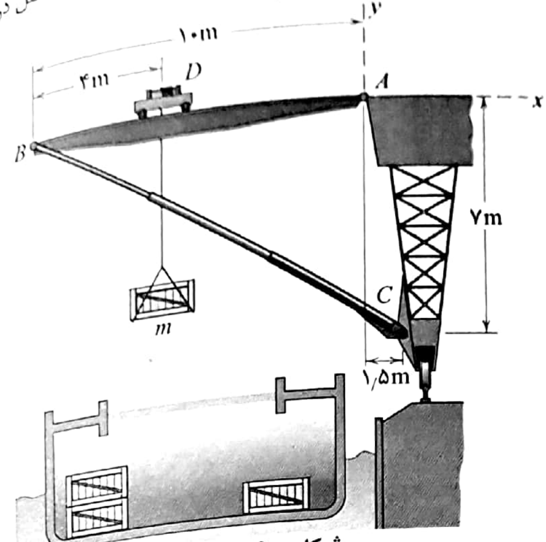
شکل م ۹۰.۴

۹۱.۴ نیروی P وارد بر نقطهٔ G را تعیین کنید. توجه کنید که در اینجا خط افقی برای تقارن دسته‌ها وجود دارد اما خط تقارنی برای فک‌ها وجود ندارد.



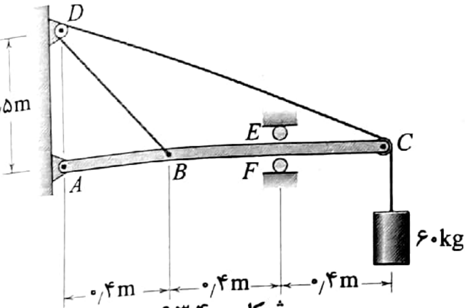
شکل م ۹۱.۴

۹۲.۴ بازوی جرثقیل متحرک برای بارگیری کشتی‌ها طراحی شده است. جرم بازوی AB برابر ۸Mg است و مرکز جرم آن در نقطهٔ میانی قرار دارد. جرم بازوی BC برابر ۲Mg است و مرکز جرم آن به فاصلهٔ ۵m از انتهای C قرار دارد. ارابهٔ D به جرم ۲۰۰۰kg حول خط مرکز خود متقارن است. مقدار نیروی وارد بر مفصل در نقطهٔ A را با فرض آنکه m = ۲۰Mg باشد، تعیین کنید.



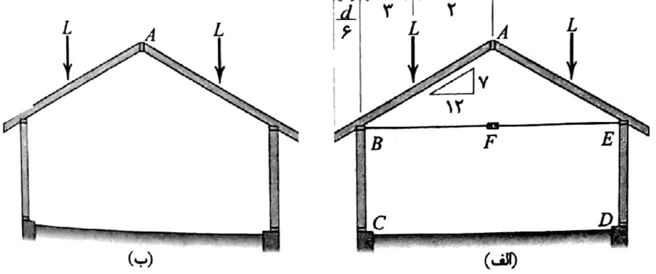
شکل م ۹۲.۴

۹۳.۴ مقدار واکنش پین در A و مقدار و جهت نیروی واکنش را در غلتک‌ها تعیین کنید. قرقره‌ها در نقاط C و D کوچک‌اند.



شکل م ۹۳.۴

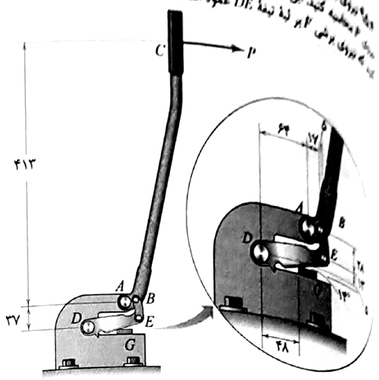
۹۴.۴ شکل، نشان‌دهندهٔ یکی از مشکلات متداول در سازه‌های ساده است. تیرهای شیروانی، تحت بارگذاری L می‌توانند بچرخند. تیر خط‌الرأس در A می‌تواند پایین بیاید و مطابق شکل (ب) دیواره‌های BC و DE به‌سمت بیرون بچرخند. این پدیده گاهی در سازه‌های چوبی قدیمی، به‌صورت شکم‌دادن ناحیهٔ وسط تیر خط‌الرأس از نمای جانبی، به‌وضوح دیده می‌شود. در شکل (الف)، یکی از روش‌های سادهٔ مقابله با این پدیده نشان داده شده است. زنجیر یا کابلی بین بست‌های B و E کشیده می‌شود و بست دو پیچهٔ F سفت می‌شود تا کشش مناسب ایجاد شود و دیواره‌ها به‌سمت بیرون خم نشوند. برای مقادیر دادهٔ شدهٔ d و بارهای نقطه‌ای L (که از بارهای گستردهٔ تیر شیروانی و وزن سقف و هر نوع بار اضافی مثل برف حاصل می‌شود)، کشش T را به‌گونه‌ای محاسبه کنید که در B و E هیچ نیرویی به‌سمت بیرون بر دیواره‌ها اعمال نشود. فرض کنید که تکیه‌گاه تیرهای شیروانی در تیرخط‌الرأس افقی هستند و تمام مفصل‌ها می‌توانند آزادانه بچرخند.



شکل م ۹۴.۴

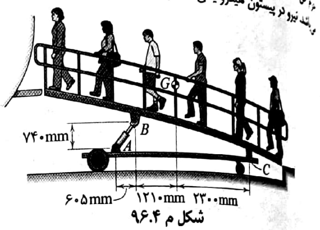
Scanned by CamScanner

... نیروی برشی F که تیغهٔ DE بر روی میله در نقطهٔ G وارد می‌کند را برحسب ... محاسبه کنید. این نیرو بر دستهٔ سنگین دستگاه برش وارد می‌شود. فرض ... که نیروی برشی F بر لبهٔ تیغهٔ DE عمود است.



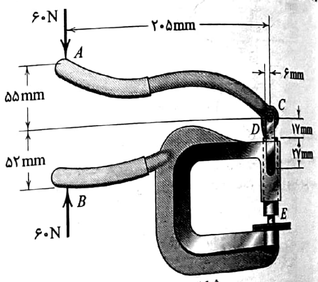
ابعاد برحسب میلیمتر
شکل م ۹۵.۴

۹۶.۴ مسیر شیب‌دار برای عبور مسافرین به هواپیما در شکل نشان داده شده است. جرم کل مسیر سطح شیب‌دار با ۶ مسافر ۷۵۰kg است و مرکز جرم در نقطهٔ G ... نیرو در پیستون هیدرولیکی AB و مقدار واکنش در پین C را محاسبه کنید.



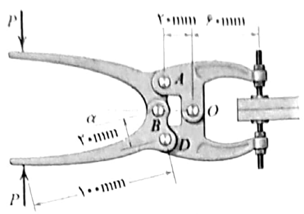
شکل م ۹۶.۴

۹۷.۴ پرس دستی زیر برای انجام کارهایی چون پرچ یا سوراخ‌کاری به‌کار می‌رود. در ... اعمال نیروی ۶۰ نیوتنی بر دسته‌های پرس، نیروی P که در E بر دسته‌های ... وارد می‌شود چقدر خواهد بود؟



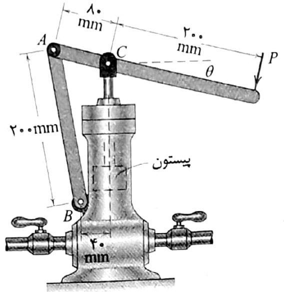
شکل م ۹۷.۴

۹۸.۴ گیرهٔ نشان داده شده برای انجام کارهای مختلف به‌کار می‌رود. با توجه به ... موقعیت مفروض که برای دستهٔ گیره، $\alpha = ۱۰^\circ$ بوده و نیروهای $P = ۱۵۰N$ بر ... دسته‌ها وارد می‌شوند، نیروی گیرشی C حاصل را تعیین کنید. توجه داشته باشید که ... نقطه‌های A و D نسبت به خط مرکز افقی ابزار متقارن هستند.



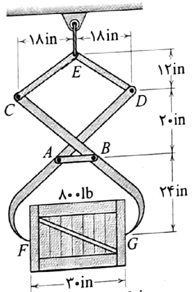
شکل م ۹۸.۴

۹۹.۴ شکل نشان داده شده یک پمپ دستی با فشار زیاد است که برای پیش‌راندن فشار روغن در هیدرولیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. وقتی دسته تحت اثر نیروی $P = ۱۲۰N$ در موقعیت $\theta = ۱۵^\circ$ در تعادل است، فشار p روغن را که بر پیستون به‌قطر ۴۶mm اعمال می‌شود تعیین کنید. (فشار در بالای سطح پیستون فشار جو است.)



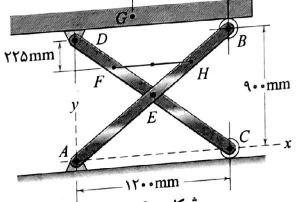
شکل م ۹۹.۴

۱۰۰.۴ نیرو در بازوی AB چنگک‌های بالابر را، که بدون تماس از روی یکدیگر عبور کرده‌اند، محاسبه نمایید.



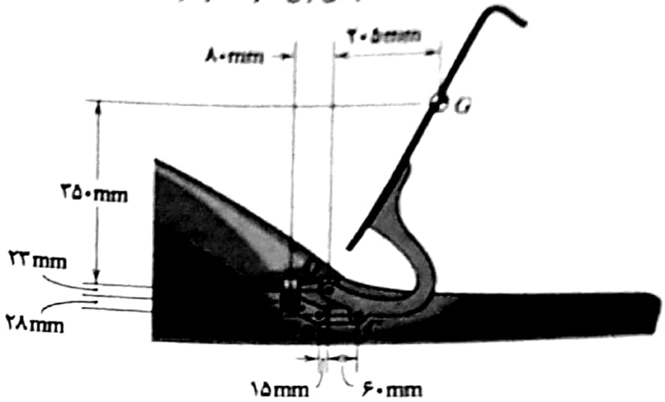
شکل م ۱۰۰.۴

۱۰۱.۴ جرم رویهٔ یک نیمکت تاشوی کارگاهی ۵۰kg بوده و مرکز جرم آن در G قرار دارد. مؤلفه‌های x و y نیروی وارد بر پین نقطهٔ E را تعیین کنید.



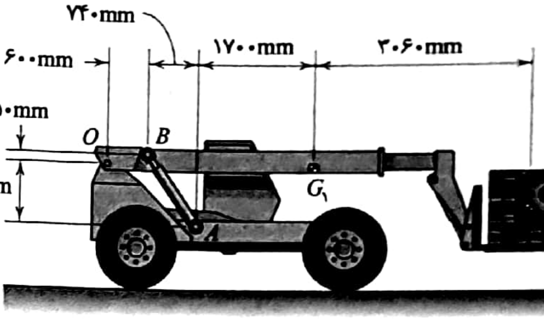
شکل م ۱۰۱.۴

۱۰۲.۴ در شکل، اجزای سازوکار قفل درب صندوق عقب نشان داده شده است. برای حفظ حالت تعادل نشان داده شده گشتاور M را که هریک از دو فنر مارپیچ A باید بر میلهٔ AB اعمال کنند، تعیین کنید. جرم درب صندوق عقب ۱۸kg و مرکز جرم آن در نقطهٔ G است. از اثر وزن عضوهای دیگر می‌توان صرف‌نظر کرد.



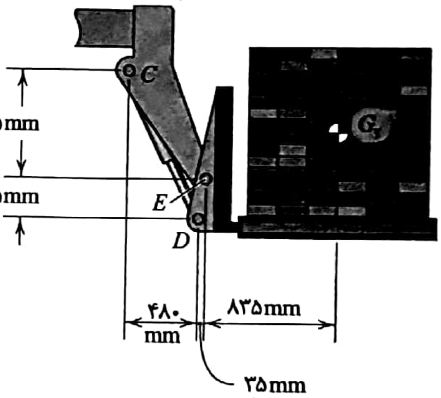
شکل م ۱۰۲.۴

۱۰۳.۴ ماشین نشان داده شده برای حرکت دادن اجسام سنگین مانند آجر در کارگاه ساختمان به‌کار می‌رود. برای تیر افقی با وضعیت نشان داده شده نیرو در هریک از دو سیلندر هیدرولیک AB را تعیین کنید. جرم تیر ۱۵۰۰kg و مرکز جرم آن در نقطهٔ G_1 و جرم آجرها ۲۰۰۰kg و مرکز جرم آن در نقطهٔ G_2 است.



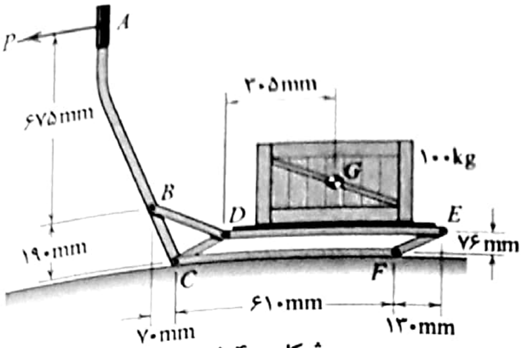
شکل م ۱۰۳.۴

۱۰۴.۴ بخش چنگالی مسئلهٔ ۱۰۳.۴ با جزئیات بیشتری در مورد ابعاد، در اینجا نشان داده شده است. نیرو در تک‌سیلندر هیدرولیکی CD را تعیین کنید. جرم تودهٔ آجر برابر ۲۰۰۰kg و مرکز جرم آن در G_2 است. می‌توانید از اثرات وزن اجزای چنگالی صرف‌نظر کنید.



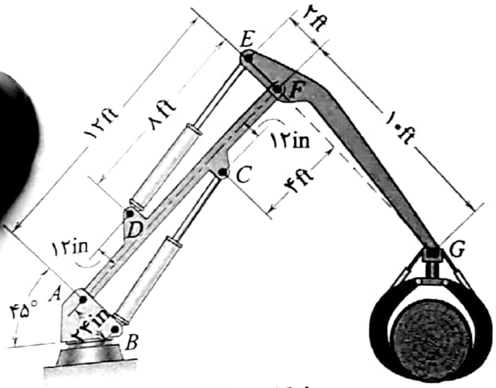
شکل م ۱۰۴.۴

۱۰۵.۴ برای تحمل صندوقی به‌جرم ۱۰۰kg، نیروی P وارد بر A را تعیین کنید. از هریک از عضوهای نشان داده شده دو عدد وجود دارد که با اعضای رابط موجود در محل هریک از مفصل‌ها (عمود بر صفحهٔ کاغذ) به یکدیگر متصل شده و یک سکوی سبک روی دو عضو DE پل می‌زند. اصطکاک محل اتصالات ناچیز بوده و همهٔ عضوها سبک هستند. اصطکاک عضوهای CF زیر برای جلوگیری از لغزش کافی است.



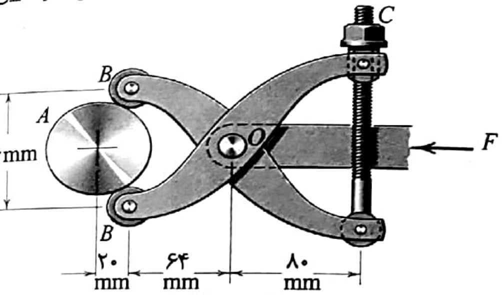
شکل م ۱۰۵.۴

۱۰۶.۴ در یک دستگاه بالابر تنه‌های درخت، در موقعیت نشان داده شده، بازوهای AF و EG بر هم عمود و AF نیز بر AB عمود است. اگر این دستگاه در حال جابه‌جاکردن تنهٔ درختی به‌وزن ۴۸۰۰lb باشد، نیروهای وارد بر پین‌های A و D حاصل از وزن تنهٔ درخت در این موقعیت را تعیین کنید.



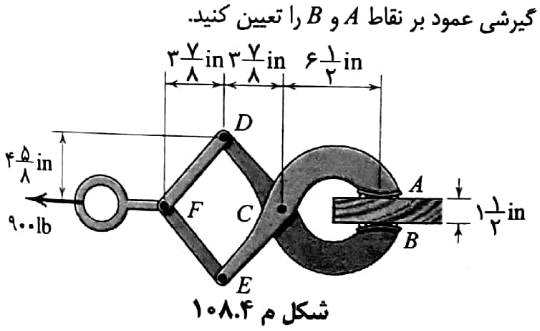
شکل م ۱۰۶.۴

۱۰۷.۴ در تراش‌کاری، برای آج‌زدن سطح میل‌گردان چرخان A از یک ابزار آج‌زنی استفاده می‌شود. نیروی واردشده از سمت غلتک‌های آج‌زنی B را می‌توان با تنظیم پیچ C و به‌کمک نیروی F واردشده از پایهٔ ابزارگیر دستگاه تراش به بدنهٔ ابزار آج‌زنی ایجاد کرد. اگر در موقعیت نشان داده شده، پیچ C تحت کشش ۱٫۲kN باشد، نیروی F پایهٔ ابزارگیر دستگاه تراش و نیروی P وارد بر هریک از غلتک‌های آج‌زنی B را تعیین کنید.



شکل م ۱۰۷.۴

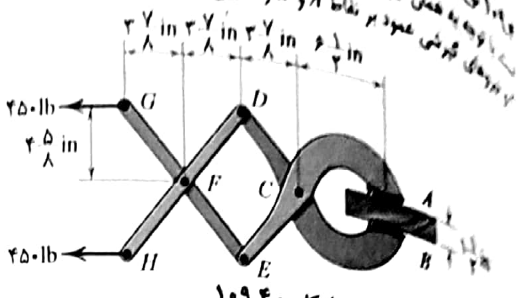
۱۰۸.۴ برای کشیدن پالت‌های چوبی تحت تأثیر بار در کف انبار از وسیلهٔ نشان داده شده استفاده می‌شود. تختهٔ چوبی نشان داده شده یکی از چند عضو سازندهٔ کف پالت است. اگر نیروی ۹۰۰lb از طرف لیفت‌تراک واردشود، مقدار نیروی وارد بر پین C و نیروهای گیرشی عمود بر نقاط A و B را تعیین کنید.



شکل م ۱۰۸.۴

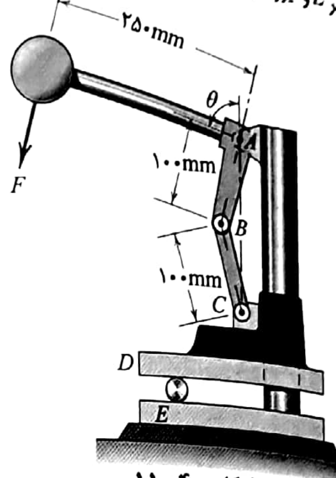
Scanned by CamScanner

۱۰۹.۴ ... انبر شکل‌یافتهٔ پالت‌کش مسئلهٔ ۱۰۸.۴ در شکل زیر نشان داده شده
... با توجه به عمل نیروی خالص ۹۰۰lb مسئلهٔ ۱۰۸.۴، مقدار نیروی وارد بر پین
... نیروهای گیرشی عمود بر نقاط A و B را تعیین کنید.



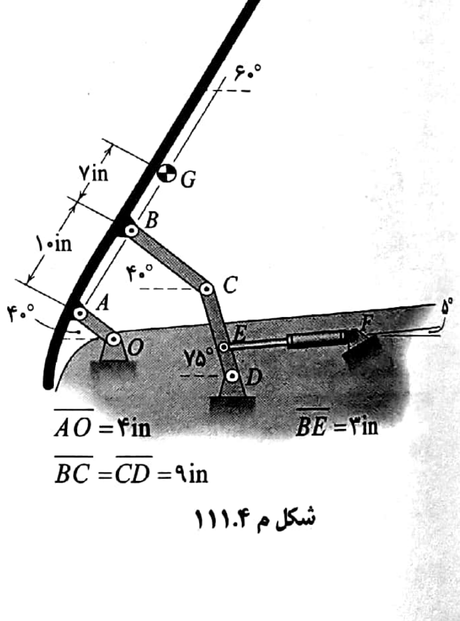
شکل م ۱۰۹.۴

۱۱۰.۴ ... بالایی D از پرس مفصلی با مقاومت اصطکاک ناچیز در امتداد ثابت قائم
... می‌لغزد. اگر نیروی $F = ۲۰۰N$ بر دستهٔ تحت زاویهٔ $\theta = ۷۵°$ وارد شود، نیروی
... R وارد بر سیلندر E و نیرویی را که توسط پین در A تحمل می‌شود، محاسبه کنید.



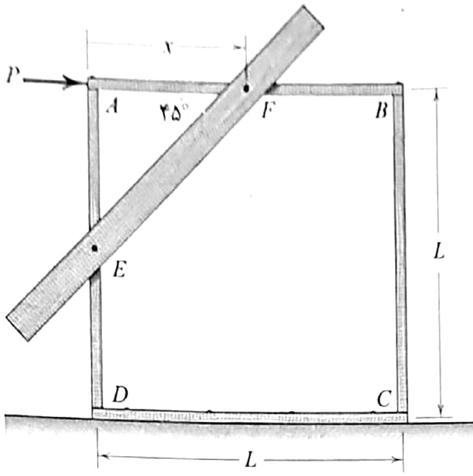
شکل م ۱۱۰.۴

۱۱۱.۴ اجزای سازوکار لولایی کاپوت اتومبیلی در شکل نشان داده شده است. اتصال‌های سبک BC و CD و کمک‌فنر گازی EF کاپوت را در حالت باز نگه می‌دارد. در این وضعیت، کاپوت می‌تواند آزادانه در جهت ساعتگرد حول پین O بچرخد. پین A قفل است و تا زمانی‌که کاپوت تا نزدیکی وضعیت افقی بسته شدن پایین بیاید قفل باقی خواهد ماند. برای کاپوتی به‌وزن ۸۰lb با مرکز گرانی در نقطهٔ G حداقل نیروی فشاری C در کمک‌فنر را که وضعیت باز کاپوت را حفظ کند، تعیین کنید. توجه کنید که در اینجا دو اتصال OA در دو طرف جلوی اتومبیل وجود دارد و از هر یک از اتصال‌ها یکی وجود دارد که در داخل گل‌گیر جلو باقی می‌ماند.



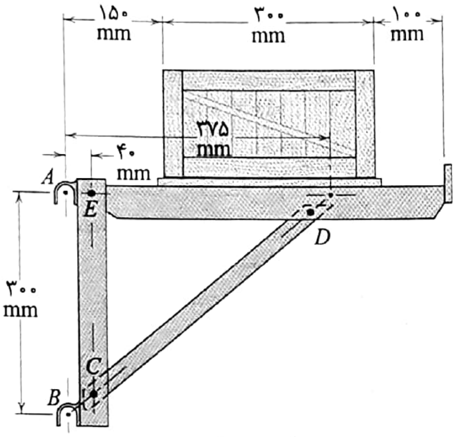
شکل م ۱۱۱.۴

۱۱۲.۴ درودگری قاب مربع‌شکل ABCD را ساخته و سپس آن را مطابق شکل برای جلوگیری از خرابی و انهدام (تغییر شکل به‌صورت لوزی) تحت تأثیر نیروی P، با بست EF مهار می‌کند. کشش T در مهار را برحسب تابعی از x معین کنید. تمام اتصالات را به‌صورت مفصل‌های پین در نظر بگیرید. عضو DC به کف محکم شده است.



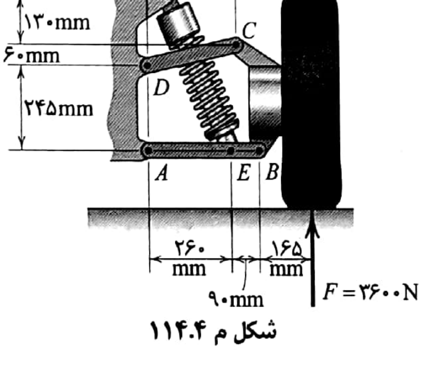
شکل م ۱۱۲.۴

۱۱۳.۴ پیمانکاری به سکوی نردبانی در A و B قلاب‌هایی جوش داده است تا با قرارگیری روی پله‌های نردبان، تکیه‌گاه زیرپایی داربست ایجاد شود. جرم ترکیب جک و تکیه‌گاه برابر ۸۴kg می‌باشد. همهٔ نیروهای عمودی به قلاب A وارد می‌شوند و سه پیچ سکو تنها نیرو تحمل می‌کنند و نه گشتاور. کل نیروی وارد بر پیچ و مهره در E را محاسبه کرده و مؤلفه‌های عمودی نیرو در E را نسبت به مؤلفهٔ قائم نیروی وارد بر قلاب A مقایسه کنید.



شکل م ۱۱۳.۴

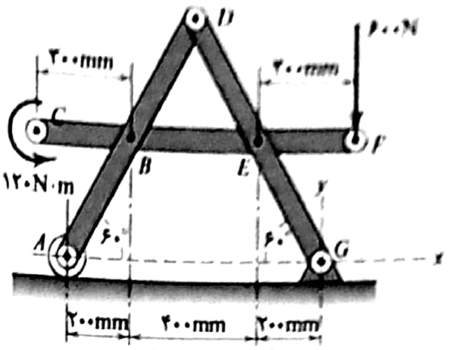
۱۱۴.۴ در شکل، اجزای سیستم تعلیق عقب یک اتومبیل دیفرانسیل جلو نشان داده شده است. اگر نیروی عمودی F وارد بر لاستیک ۳۶۰۰N باشد، مقدار نیرو در هر مفصل را معین کنید.



شکل م ۱۱۴.۴

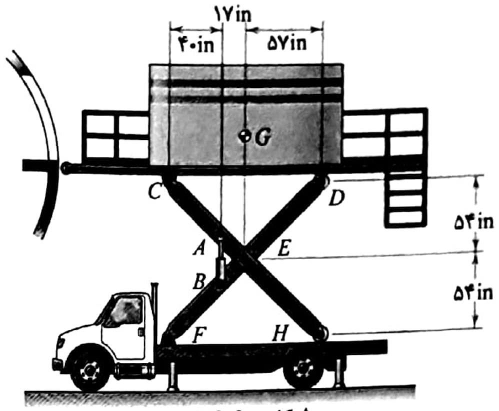
Scanned by CamScanner

۱۱۵.۴ مؤلفه‌های x و y همهٔ نیروهای وارد بر هر عضو قاب بارگذاری‌شده را حساب کنید.



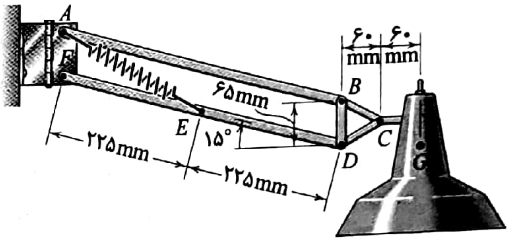
شکل م ۱۱۵.۴

۱۱۶.۴ شکل نشان داده شده وسیله‌ای برای انتقال غذا به هواپیماست. وزن آسانسور ۲۰۰۰lb و مرکز گرانی آن در نقطهٔ G است. نیروی لازم در سیلندر هیدرولیک AB را تعیین کنید.



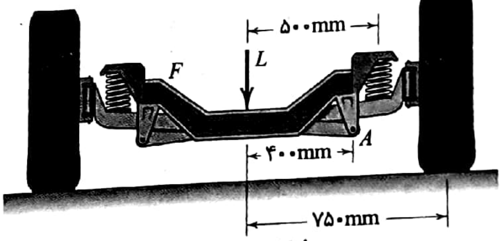
شکل م ۱۱۶.۴

۱۱۷.۴ طراحان سازوکار چراغ نشان‌داده‌شده در شکل، معمولاً به اصطکاک اتصال و کمک برای نگهداری تعادل استاتیکی اطمینان دارند. فرض کنید در نقطهٔ C برای جلوگیری از چرخش، اصطکاک کافی وجود دارد، ولی اصطکاک در همهٔ نقاط دیگر را نادیده بگیرید. اگر جرم چراغ برابر ۰٫۶kg و مرکز جرم در نقطهٔ G باشد، نیروی فنر F_S لازم برای تعادل در موقعیت نشان‌داده‌شده را تعیین کنید.



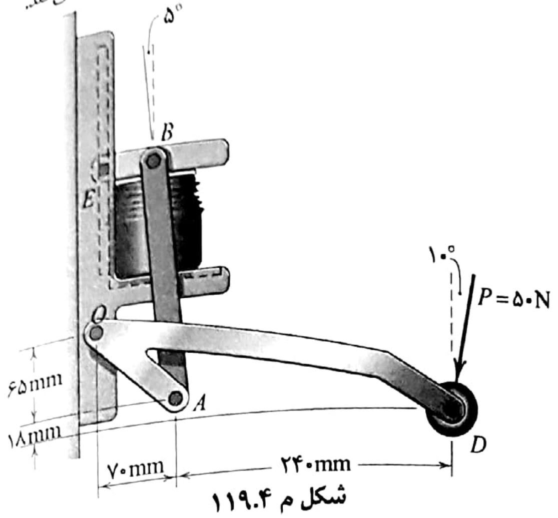
شکل م ۱۱۷.۴

۱۱۸.۴ در شکل زیر سیستم فنربندی دومحوری یک کامیون کوچک نشان داده شده است. جرم قاب مرکزی F برابر ۴۰kg و جرم هر چرخ و اتصال همراه ۳۵kg و فاصلهٔ مرکز جرم آن از خط مرکزی قائم ۶۸۰mm است. برای انتقال بار L = ۱۲kN به قاب F، سهم کل نیروی وارد بر پین نقطهٔ A را محاسبه کنید.



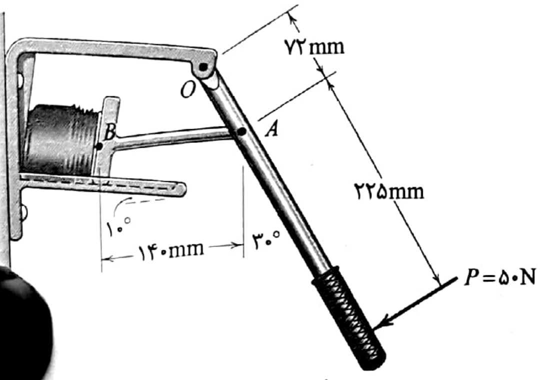
شکل م ۱۱۸.۴

۱۱۹.۴ وقتی قوطی‌له‌کن در وضعیت شکل نشان داده شده است، نیروی فشار C وارد بر قوطی فلزی تحت تأثیر نیروی P = ۵۰N را معین کنید. توجه کنید که در اینجا دو اتصال AB و دو اتصال AOD همراه با یک جفت میله‌بندی در هر سمت از قوطی وجود دارد. همچنین پین B روی خط مرکزی قائم قوطی فلزی است. سرانجام توجه کنید که برجستگی کوچک مربع‌شکل E مربوط به فک متحرک در شکاف قاب ثابت حرکت می‌کند.



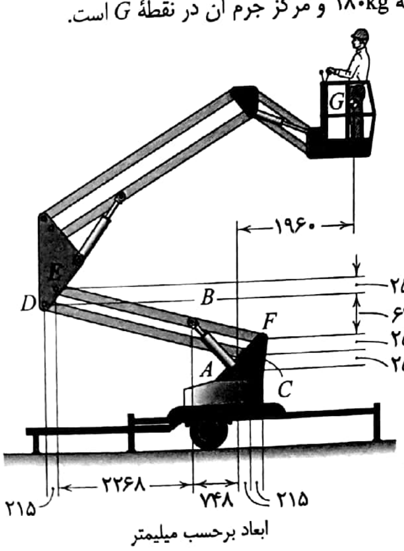
شکل م ۱۱۹.۴

۱۲۰.۴ وقتی قوطی‌له‌کن در موقعیت نشان‌داده‌شده است، فشار نیروی C وارد بر قوطی را برای نیروی واردشدهٔ P = ۵۰N معین کنید. نقطهٔ B در وسط کف قوطی فلزی قرار دارد.



شکل م ۱۲۰.۴

۱۲۱.۴ نیرو در سیلندر AB را که مربوط به ترکیب وزن اتاقک و شخص است، تعیین کنید. جرم مجموعه ۱۸۰kg و مرکز جرم آن در نقطهٔ G است.

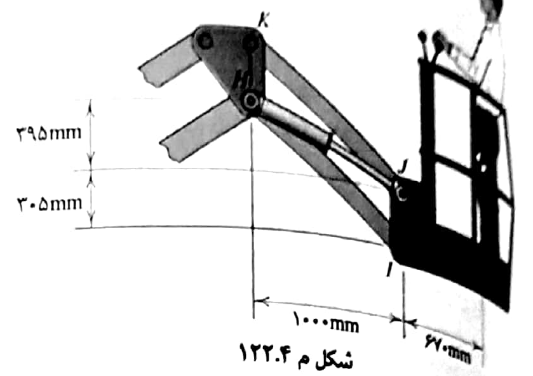


ابعاد برحسب میلیمتر

شکل م ۱۲۱.۴

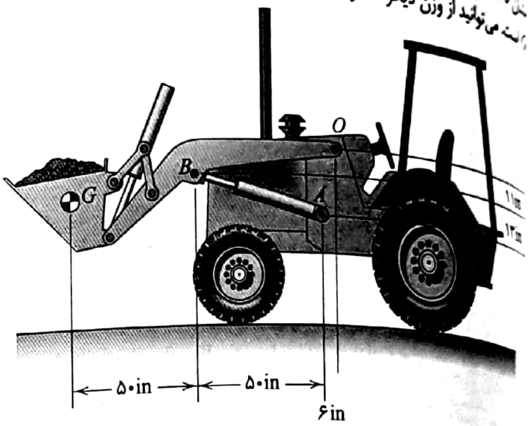
Scanned by CamScanner

۱۲۲.۴ در شکل، جزئیات بیشتری از اتاقک جرثقیل مسئلهٔ ۱۲۱.۴ نشان داده شده ... نیروی ... در سیلندر HJ را در اثر جرم ۱۸۰kg (جرم مجموعهٔ اتاقک و شخص) تعیین ... جرم ... در نقطهٔ G است.



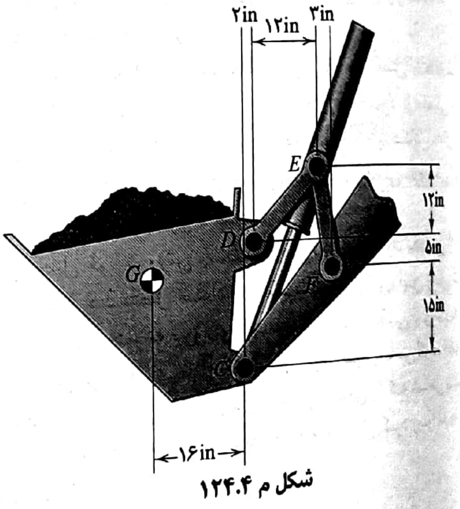
شکل م ۱۲۲.۴

۱۲۳.۴ نیرو در سیلندر هیدرولیکی AB و مقدار واکنش پین در O را برای وضعیت ... داده شده تعیین کنید جام و بار آن دارای وزن مرکب ۴۰۰۰lb و مرکز گرانی در ... است می‌توانید از وزن دیگر عضوها صرف‌نظر کنید.



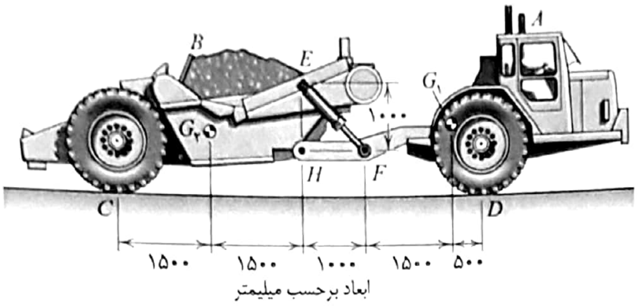
شکل م ۱۲۳.۴

۱۲۴.۴ جزئیات بیشتری از ابعاد لودر مسئلهٔ ۱۲۳.۴ را در نظر بگیرید. نیرو در سیلندر ... هیدرولیکی CE را تعیین کنید. وزن جام و بار آن ۴۰۰۰lb و مرکز گرانی در نقطهٔ G ... است می‌توانید از وزن سایر عضوها صرف‌نظر کنید.



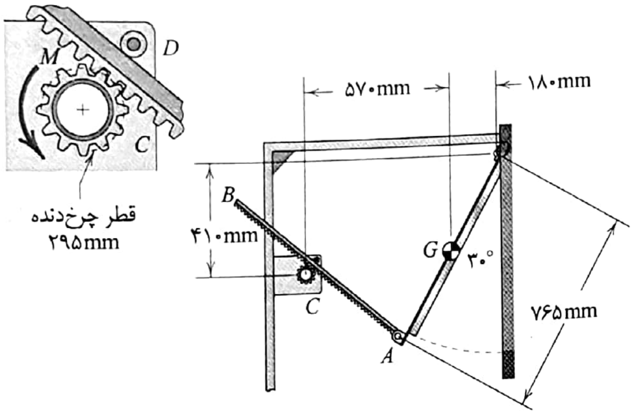
شکل م ۱۲۴.۴

۱۲۵.۴ موتور یک تراکتور شخم‌زنی A، دارای جرم ۴Mg و مرکز جرم G_1 است. تریلر شخم‌زنی B با بار پُر دارای جرم ۱۲Mg و مرکز جرم G_2 است. وضعیت شخم‌زدن با دو سیلندر هیدرولیک EF کنترل می‌شود. فشار F در هریک از سیلندرها و مقدار نیروی واردشده بر هریک از پین‌ها، در نقطهٔ H در هر سمت را محاسبه کنید. فرض کنید چرخ‌ها برای چرخیدن آزادند به‌طوری که هیچ مؤلفهٔ افقی در زیر چرخ‌ها وجود ندارد.



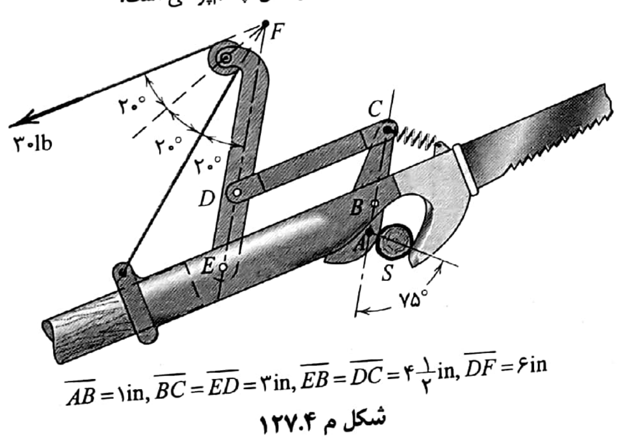
شکل م ۱۲۵.۴

۱۲۶.۴ در شکل زیر سیستم خودکار تنظیم پنجره‌های گلخانه نشان داده شده است. پنجرهٔ OA دارای جرم ۵۰kg با مرکز جرم G است. موتوری (در شکل نشان داده نشده) با چرخ‌دندهٔ C به‌نوبهٔ خود فرمان دندانه‌دار AB را به حرکت وامی‌دارد. گشتاور پیچشی M را که باید اعمال شود تا چرخ‌دندهٔ C به حرکت درآید، معین کنید. از وزن میلهٔ AB صرف‌نظر کنید.



شکل م ۱۲۶.۴

۱۲۷.۴ سازوکار هرس‌کنندهٔ یک ارهٔ دوطرفه در حال بریدن شاخهٔ S نشان داده شده است. در این وضعیت خاص، ریسمان محرک سازوکار به‌موازات دستهٔ اره قرار دارد و نیروی کششی ۳۰lb را تحمل می‌کند. نیروی برشی P وارد بر شاخهٔ درخت از طرف تیغهٔ هرس و نیز نیروی کل اعمال‌شده بر پین E را تعیین کنید. نیرویی که فنر برگردان کوچک بر C اعمال می‌کند کوچک و قابل چشم‌پوشی است.

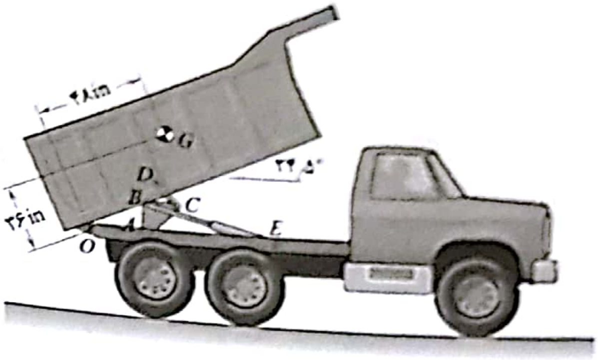


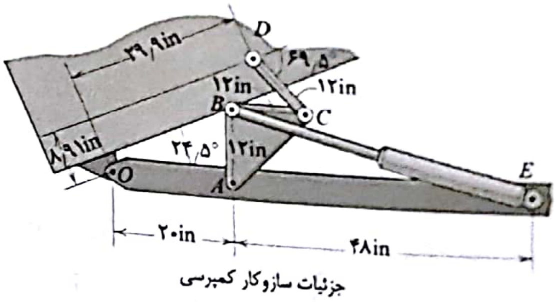
$\overline{AB}=۱\text{in}, \overline{BC}=\overline{ED}=۳\text{in}, \overline{EB}=\overline{DC}=۴\frac{۱}{۲}\text{in}, \overline{DF}=۶\text{in}$

شکل م ۱۲۷.۴

Scanned by CamScanner

* ۱۲۸.۴ طرح ساخت یک کامیون کمپرسی در شکل نشان داده شده است. فشار ? مسیلندر هیدرولیک EF و مقدار نیروی وارد بر پین A در موقعیت نشان داده شده را معین کنید که در آن AB و CDE مستقیم است و میلهٔ اتصال DC بر AC عمود می‌باشد. وزن دستگاه همراه با بار ۲۰۰۰۰lb و مرکز گرانی در نقطهٔ G می‌باشد. تمام ابعاد روی شکل نشان داده شده است.

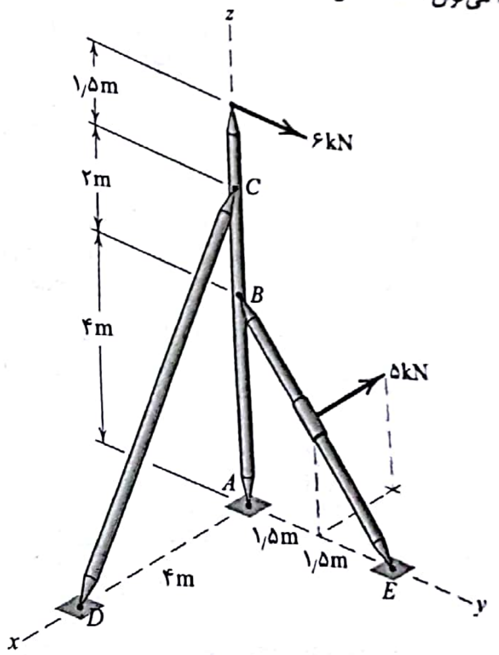




جزئیات سازوکار کمپرسی

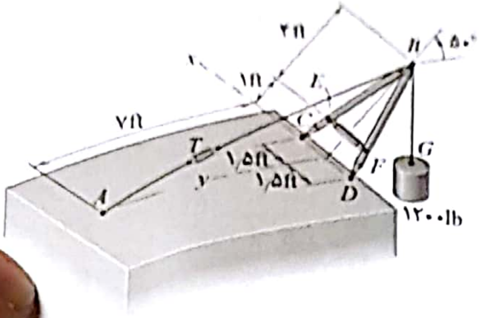
شکل م ۱۲۸.۴

۱۲۹.۴ مؤلفه‌های واکنش در A را برای قاب فضایی بارگذاری‌شده تعیین کنید. هر اتصال را می‌توان مانند مفصل کاسه ـ ساچمه‌ای در نظرگرفت.



شکل م ۱۲۹.۴

۱۳۰.۴ در نمای کلی یک سازهٔ واقعی، T یک بست دوپیچه را نشان می‌دهد. C و D لولاهای یاتاقان غیرکف‌گرد هستند که محور آنها در امتداد خط CD است و نقاط B، E و F مفصل‌های کاسه ـ ساچمه‌ای هستند. کشش T در بست دوپیچه و نیرو در عضو EF را تعین کنید.



شکل م ۱۳۰.۴

۷.۴ مروری بر فصل

در فصل ۴، اصول تعادل را برای دو گروه از مسائل به‌کار بردیم (الف) خرپاهای ساده و (ب) قاب‌ها و ماشین‌ها. در این موارد فرضیهٔ جدیدی لازم نبود، زیرا تنها با رسم نمودار جسم آزاد و نوشتن معادلات تعادل لازم، حل مسائل انجام می‌گرفت. با این وجود بررسی سازه‌ها در این فصل، موقعیت‌هایی برای درک مزایای استفاده از روش سامان‌یافتهٔ برخورد با مسائل مکانیک فراهم شد.

اساسی‌ترین جنبه‌های این دو گروه را در ادامهٔ مطلب مرور خواهیم کرد.

(الف) خرپاهای ساده

۱. خرپاهای ساده از عضوهای دونیرویی تشکیل می‌شوند، یعنی عضوهایی که سرهایشان به‌هم متصل‌اند و می‌توانندکشش یا فشار را تحمل کنند. هر نیروی داخلی، همواره در جهت عضو نظیر آن نیروست.

۲. خرپاهای ساده ابتدا به‌صورت مثلث صلب (فرونریختنی) و در خرپاهای فضایی به‌صورت چهاروجهی است. برای گسترش یک خرپای مسطح، هر بار می‌توان دو عضو جدید مفصل‌شده را به مفصل‌های اصلی موجود افزود. برای گسترش یک خرپای فضایی، هر بار می‌توان سه عضو جدید را به مفصل‌های موجود اضافه کرد.

۳. اتصال خرپاهای ساده را می‌توان به‌صورت اتصال پینی و در خرپاهای فضایی به‌شکل اتصال‌های کاسه ـ ساچمه‌ای در نظرگرفت. این اتصال‌ها تنها می‌توانند نیرو را انتقال دهند اما قادر به انتقال گشتاورها نیستند.

۴. فرض می‌شود بارهای خارجی تنها در مفصل‌ها وارد می‌شوند.

۵. اگر تعداد تکیه‌گاه‌های خارجی یک خرپا بیشتر از تعداد مورد نیاز برای حفظ تعادل آن نباشد، خرپا را معین استاتیکی خارجی می‌نامند.

۶. اگر خرپا از نوع بیان‌شده در بند ۲ باشد و تعداد عضوهای داخلی آن بیشتر از تعدادی نباشد که برای جلوگیری از فروریختگی آن نیاز است، خرپا معین استاتیکی داخلی خواهد بود.

۷. در روش *مفصل‌ها*، از معادلات تعادل نیرو برای هر مفصل استفاده می‌شود. برای تحلیل خرپاهای مسطح در *روش مفصل‌ها*، معمولاً از مفصلی شروع می‌شود که حداکثر بیشتر از دو نیروی مجهول ندارد و حداقل دارای یک نیروی معلوم باشد. در خرپاهای فضایی معمولاً از مفصلی شروع می‌شود که حداکثر سه نیروی مجهول داشته باشد.

۸. برای تحلیل خرپا در *روش مقاطع*، از نمودار جسم آزاد مقطعی از خرپا شامل دو یا چند مفصل استفاده می‌شود. به‌طورکلی، این روش شامل بررسی تعادل مجموعه نیروهای غیرهمرس است. وقتی از روش مقاطع استفاده می‌شود، معادلهٔ تعادل گشتاور ارزش خاصی پیدا می‌کند. اغلب در خرپاهای مسطح نمی‌توان نیروهای وارد بر مقطعی را که شامل بیش از سه عضو با نیروی مجهول است به‌طور کامل حل کرد زیرا فقط سه معادلهٔ تعادل مستقل داریم.

Scanned by CamScanner

... نیروی وارد بر یک مفصل با یک مقطع در همان طرف مفصل یا
... که عضو نیرو را منتقل می‌کند رسم می‌شود. طبق قرارداد، وقتی پیکان
... بهسمت خارج مفصل یا مقطع رسم شود نیرو کششی و زمانی که این
نیرو بهسمت مفصل یا مقطع باشد، نیرو فشاری است.

... بهسمت عضو قطری در یک صفحهٔ چهاروجهی انعطاف‌پذیر باشند و نتوانند
... اگر دو عضو ... را تحمل کنند، فقط عضوی که تحت کشش است در تحلیل در
... منظور ... شود (نیرو در عضو دیگر صفر است) و قاب معین استاتیکی
... باقی خواهد ماند.

... اگر برای جلوگیری از کمانش دو عضو بارگذاری‌شده که در امتداد هم به
یکدیگر مفصل شده‌اند یک عضو جدید در امتداد متفاوت به محل اتصال آنها
... کنیم، نیرو در عضو جدید صفر خواهد بود، مگر اینکه مفصل تحت یک
نیروی خارجی قرارگیرد که در جهت عمود بر دو عضو قبلی مؤلفه داشته باشد.

ب) قاب‌ها و ماشین‌ها

۱. قاب‌ها و ماشین‌ها سازه‌هایی هستند که شامل یک، یا چند عضو چندنیرویی‌اند. یک عضو چندنیرویی، عضوی است که بر آن سه یا بیشتر از سه نیرو وارد می‌شود؛ یا دو یا بیشتر از دو نیرو و یک یا چند کوپل بر آن وارد می‌گردد.

۲. قاب‌ها سازه‌هایی هستند که برای تحمل بارها طراحی می‌شوند، به‌طورکلی تحت شرایط استاتیکی قرار می‌گیرند، ماشین‌ها سازه‌هایی هستند که نیرو و گشتاورهای ورودی را به نیرو و گشتاورهای خروجی تبدیل می‌کنند. به‌طور معمول ماشین‌ها دارای چند قطعهٔ متحرک هستند. بعضی از سازه‌ها را می‌توان در یکی از دو گروه قاب‌ها یا ماشین‌ها قرار داد.

۳. تنها قاب‌ها و ماشین‌هایی که از نظر استاتیکی معین خارجی و داخلی هستند در این کتاب در نظرگرفته می‌شوند.

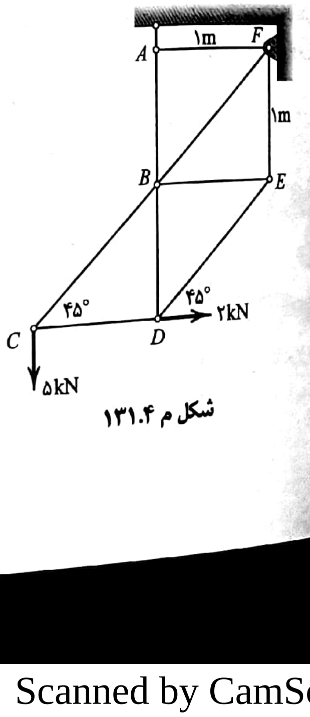
۴. اگر قاب یا ماشین به‌طورکلی با جداشدن از تکیه‌گاه‌های خارجی‌اش به‌صورت یک واحد صلب باقی بماند (فرونریختنی)، در این صورت با محاسبهٔ واکنش‌های خارجی وارد بر کل واحد، تحلیل آن را شروع می‌کنیم. اگر یک قاب یا ماشین در کل صلب نباشد، نمی‌توان تحلیل واکنش‌های خارجی را تکمیل کرد، مگر آنکه عضوهای سازه جدا شوند.

۵. نیروهای وارد بر اتصال‌های داخلی قاب‌ها و ماشین‌ها با جداکردن عضوهای سازه و رسم نمودار جسم آزاد هر بخش به‌دست می‌آیند. اصل کنش و واکنش باید دقیقاً رعایت شود، چون در غیر این‌صورت نتیجهٔ نادرست حاصل می‌شود.

۶. برای محاسبهٔ مجهول‌های مورد نیاز، باید معادلات تعادل نیرو و گشتاور لازم را برای عضوها به‌کار برد.

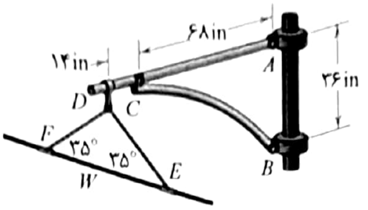
مسائل دوره‌ای

۱۳۱.۴ نیرو در عضو BE از خرپای بارگذاری‌شده را معین کنید.



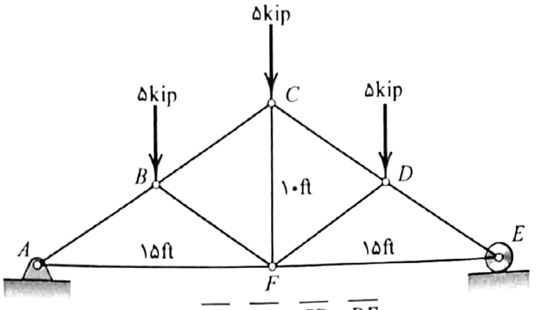
شکل م ۱۳۱.۴

۱۳۲.۴ در شکل نشان‌داده‌شده که مربوط به تکیه‌گاه کابل برق یک ترن سریع‌السیر سبک است، اگر کشش ۵۰۰lb در کابل EDF موجود باشد، نیروی F تکیه‌گاه در پیچ B را تعیین کنید.



شکل م ۱۳۲.۴

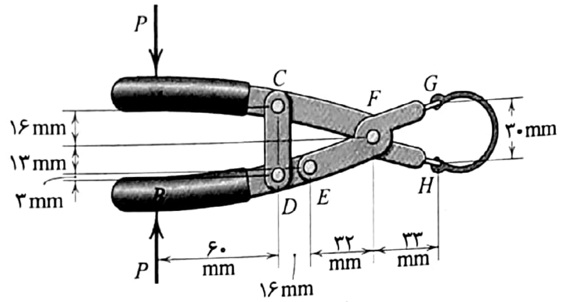
۱۳۳.۴ نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری‌شده را تعیین کنید.



$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$

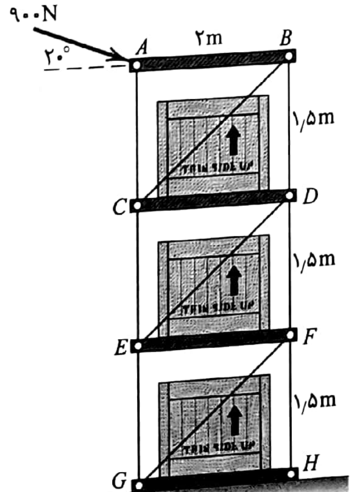
شکل م ۱۳۳.۴

۱۳۴.۴ از وسیلهٔ ویژه‌ای برای نصب و بیرون آوردن خار فنری زیر استفاده می‌شود. اگر $P = ۵۰\text{N}$، نیروی وارد بر نقطهٔ G و H را تعیین کنید.



شکل م ۱۳۴.۴

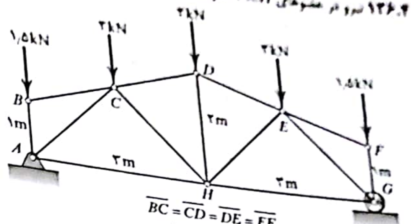
۱۳۵.۴ جرم هریک از سطوح افقی ۲۰kg بوده و حامل صندوقی به‌وزن ۱۸۰kg است. سطح با عضوهای دونیرویی نگهداری می‌شود. اگر نیروی ۹۰۰N بر نقطهٔ A وارد شود، نیرو در عضوهای DE، CE و DF را تعیین کنید.



شکل م ۱۳۵.۴

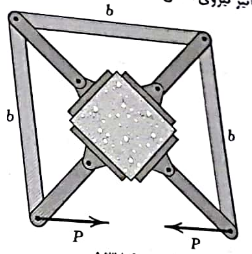
Scanned by CamScanner

۱۳۶.۴ نیرو در عضوهای AH، CH و CD از خرپای بارگذاری‌شده را تعیین کنید.



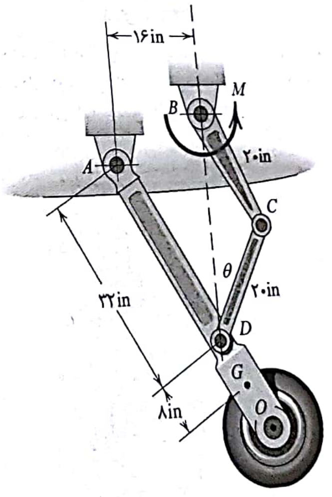
شکل م ۱۳۶.۴

۱۳۷.۴ قابی متشکل از چهار بالشتک فشاری، چهار اتصال حامل فشار و سه اتصال خارجی که در یک مربع جاسازی شده‌اند، برای آزمایش مقاومت فشاری قطعات بتنی طراحی شده است. نیروی فشاری در نقطهٔ C را که بر هر وجه مربع قطعهٔ بتنی اعمال می‌شود، تحت تأثیر نیروی اعمال‌شدهٔ P بیان کنید.



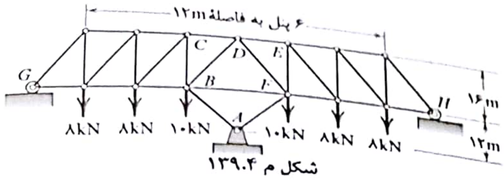
شکل م ۱۳۷.۴

۱۳۸.۴ مجموعهٔ چرخ هواپیما با اعمال گشتاور M بر میلهٔ BC، از طریق میل گردان B بالا می‌رود. اگر جرم بازو و چرخ AO برابر ۱۰۰lb و مرکز گرانی آنها در G باشد، مقدار M مورد نیاز برای بالابردن چرخ را زمانی که D مستقیماً زیر B قرار دارد، یعنی در موقعیت θ برابر ۳۰°، بیابید.



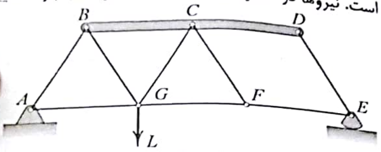
شکل م ۱۳۸.۴

۱۳۹.۴ می‌دانیم که پین مرکزی A، نیمی از بار عمودی نشان داده شده در شکل را تحمل می‌کند. نیروی عضو BF را تعیین کنید.



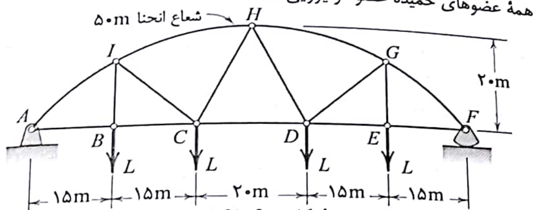
شکل م ۱۳۹.۴

۱۴۰.۴ همهٔ عضوهای دونیرویی از خرپای بارگذاری‌شده هم‌اندازه‌اند. عضو BCD یک تیر صلب است. نیروها در عضوهای BG و CG را برحسب بار L تعیین کنید.



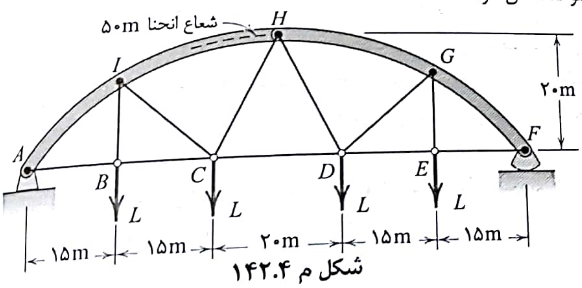
شکل م ۱۴۰.۴

۱۴۱.۴ نیروها در عضوهای AB، BI و CI را در خرپای ساده تعیین کنید. توجه کنید که همهٔ عضوهای خمیده عضو دونیرویی هستند.



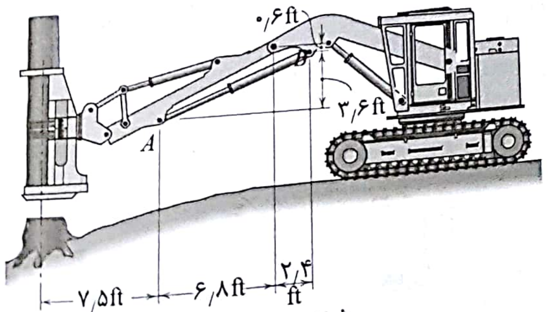
شکل م ۱۴۱.۴

۱۴۲.۴ آرایش مسئلهٔ ۱۴۱.۴ به‌جای چهار عضو خمیده با دو عضو AIH و HGF جایگزین شده است. کشش‌های عضوهای CH و DH هریک $0.5L$ است. نیرو در عضوهای AB، BI و CI را معین کنید. آیا مسئله را می‌توان بدون اطلاع از نیرو در عضو CH حل کرد؟



شکل م ۱۴۲.۴

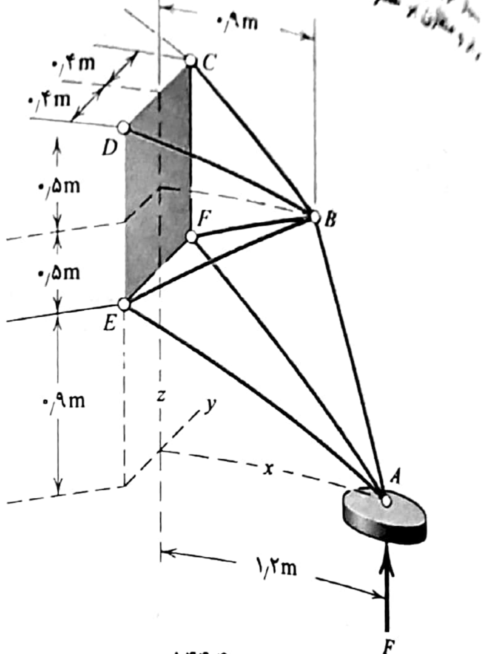
۱۴۳.۴ ماشین قطع درختان، درخت‌های بزرگ را نزدیک زمین قطع و سپس تنهٔ درخت را نگه می‌دارد. اگر وزن درخت ۶۰۰۰lb باشد، نیرو در سیلندر هیدرولیک AB برای وضع نشان داده شده را معین کنید. مقدار فشار لازم بر پیستونی به‌قطر ۴٫۷۲in در سیلندر هیدرولیک را محاسبه کنید.



شکل م ۱۴۳.۴

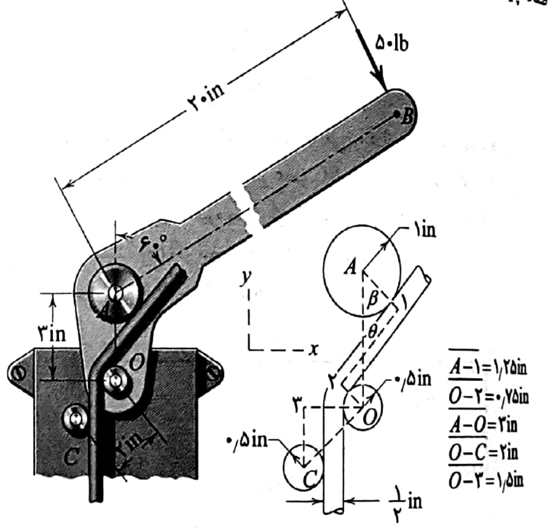
Scanned by CamScanner

۱۴۴.۴ یکی از پایه‌های فرود یک سیاره‌پیما مانند یک خرپای فضایی متقارن که حول محور x-x دوران می‌کند مطابق شکل طراحی شده است. نیروی $F = ۲٫۲kN$ در حین فرود به زمین لازم است. نیروی نظیر در عضو BE را محاسبه کنید. اگر جرم خرپا کوچک باشد، فرض تعادل استاتیکی برای خرپا مجاز است. فرض کنید بارهای مساوی بر عضوها وارد می‌شود.



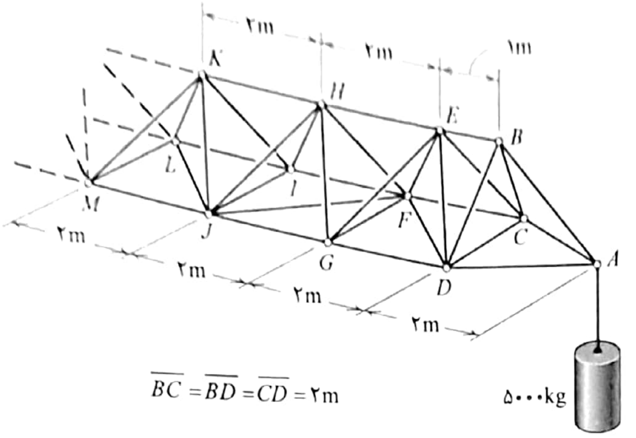
شکل م ۱۴۴.۴

۱۴۵.۴ دستگاه میل‌گرد خم‌کن برای شکل‌دادن میل‌گردهای فولادی آرماتوربندی از اهرم OAB آویزان در O در صفحه ثابت پایه تشکیل شده است. غلتک‌های چیده‌شده در A، O و C همه آزادند. برای چرخیدن در موقعیت °۶۰ نشان داده شده، یک نیروی ۵۰lb روی دسته لازم است. مؤلفه‌های x و y نیروی R وارد بر میل‌گردان غلتک O را برای این وضعیت محاسبه کنید. [**پیشنهاد:** نمودار جسم آزاد میلهٔ خمیده را به‌طور جداگانه رسم و تحلیل کنید (با اتصال به غلتک‌ها). مشاهده می‌کنید که نیروی وارده توسط میل‌گرد روی غلتک در نقطهٔ O به نیروی R وارد شده از طرف صفحهٔ پایه اضافه شده است.]



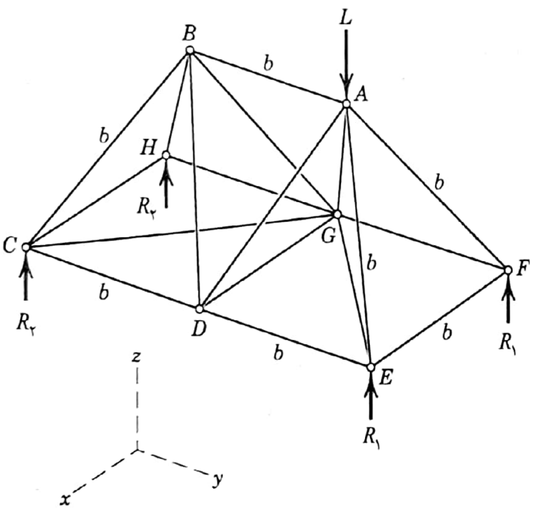
شکل م ۱۴۵.۴

۱۴۶.۴ دکل طولی یک جرثقیل ساختمانی که قسمتی از آن نشان داده شده، مثالی از یک سازهٔ تناوبی است که در آن، سازه از واحدهای سازندهٔ مشابه و تکراری تشکیل شده است. با استفاده از روش مقاطع، نیرو در عضوهای FJ و GJ را به‌دست آورید.



شکل م ۱۴۶.۴

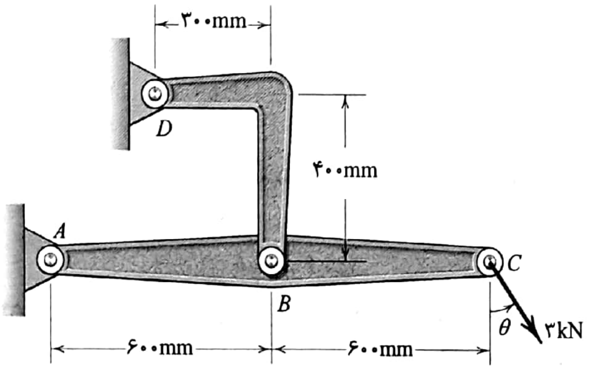
۱۴۷.۴ خرپای فضایی شامل دو هرم یکسان با قاعدهٔ مربع در صفحهٔ افقی x-y با ضلع مشترک DG می‌باشد. رأس A خرپا با بار L به‌سمت پایین بارگذاری‌شده و با واکنش نشان‌داده‌شده در گوشه نگهداری می‌شود. همهٔ عضوها به غیر از دو قطر قاعده، طول یکسان b دارند. از دو صفحهٔ قائم متقارن استفاده کنید و نیروها را در AB و DA تعیین کنید. (توجه کنید که اتصال AB از چرخش دو هرم حول DG جلوگیری می‌کند.)



شکل م ۱۴۷.۴

مسائل کامپیوتری

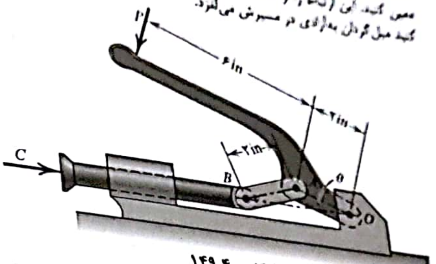
۱۴۸.۴* عضوهای سازه‌ای بار ۳kN را، که ممکن است تحت هر زاویهٔ θ از °۹۰− تا °۹۰+ بر آنها وارد شود، تحمل می‌کنند. پین در نقطهٔ A را باید چنان طراحی کرد تا بتواند مقدار ماکزیمم نیروی انتقالی به نقطهٔ A را تحمل کند. نیروی F_A در A را به‌صورت تابعی از θ رسم کرده و مقدار ماکزیمم و زاویهٔ نظیر آن، θ، را تعیین کنید.



شکل م ۱۴۸.۴

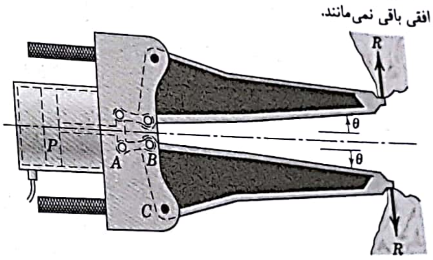
Scanned by CamScanner

۱۴۹.۴* با توجه به نیروی مفروض P وارد بر دستهٔ گیرهٔ اهرمی، نیروی گیرشی C با کاهش زاویهٔ θ به‌طور زیادی افزایش می‌یابد. ارتباط بین C و θ را برای $P = ۲۰lb$، معین کنید. این ارتباط را از $\theta = ۳°$ تا $\theta = ۳۰°$ به‌صورت یک تابع رسم کنید. فرض کنید میل گردان به‌آزادی در مسیرش می‌لغزد.



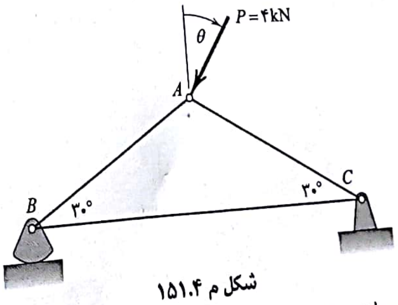
شکل م ۱۴۹.۴

۱۵۰.۴* وسیلهٔ مسئلهٔ ۸۸.۴، "فک‌های نجات"، دوباره در اینجا مطرح می‌شود. این وسیله با فک‌های باز، فشار پشت پیستون P با سطح $۲۰in^۲$ در $۵۰۰lb/in^۲$ را نگه می‌دارد. نیروی R را برحسب تابعی از θ در گسترهٔ $۰ \le \theta \le ۴۵°$، درصورتی‌که R نیروی عمودی وارد بر ابزاردستی نشان داده شده باشد، محاسبه و رسم کنید. حداکثر مقدار R و مقدار متناظر زاویهٔ فک را معین کنید. برای ابعاد و هندسهٔ مربوط با شرط $\theta = ۰$ شکل مسئلهٔ ۸۸.۴ را ببینید. توجه کنید که اتصال AB و همتای آن در شکل در حالت $\theta = ۰$ هر دو افقی هستند ولی برای بازشدن فک‌ها افقی باقی نمی‌مانند.



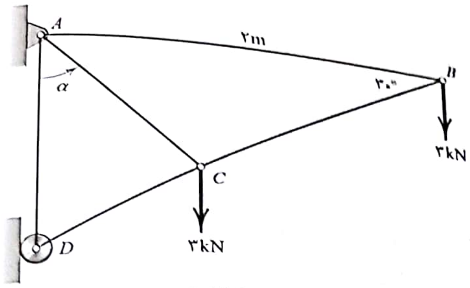
شکل م ۱۵۰.۴

۱۵۱.۴* نیرو را در سه عضو خرپای ساده برای مقادیر θ در گسترهٔ $۰ \le \theta \le ۱۲۰°$ رسم و تعیین کنید. وقتی θ از $۱۲۰°$ تجاوز کند چه رخ خواهد داد؟ برای ترسیم، نیروهای کششی را مثبت در نظر بگیرید. ماکزیمم کشش و ماکزیمم نیروی فشار در هر عضو را تعیین کنید.



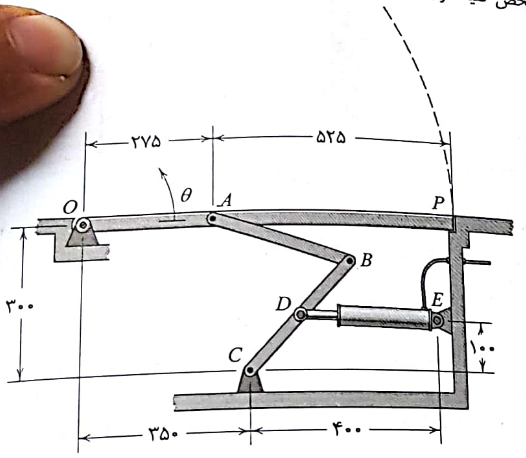
شکل م ۱۵۱.۴

۱۵۲.۴* نیروها در همهٔ عضوهای خرپای سادهٔ بارگذاری‌شده را به‌صورت تابعی از زاویهٔ α در گسترهٔ $۰ \le \alpha \le ۹۰°$ ترسیم و تعیین کنید. مقدار حداقل را در عضوهای AC و CD و مقادیر α را در جایی که حداقل رخ می‌دهد مشخص کنید.



شکل م ۱۵۲.۴

۱۵۳.۴* دریچهٔ تخلیهٔ یکنواخت ۳۰ کیلوگرمی OAP با سازوکار نشان داده شده باز است. نیروی لازم در استوانهٔ DE را به‌صورت تابعی از زاویهٔ گشودگی θ دریچه در گسترهٔ $۰ \le \theta \le \theta_{max}$ که در آن θ_{max} حداکثر گشودگی است، رسم کنید. مقادیر ماکزیمم و مینیمم این نیرو و زوایایی که در آنها این ماکزیمم و مینیمم رخ می‌دهد را مشخص کنید. توجه کنید که استوانه به‌ازای $\theta = ۰$ در حالت افقی نیست.

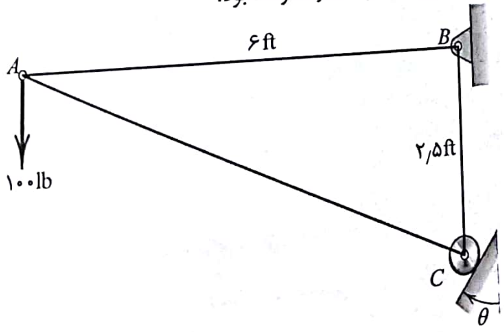


$\overline{AB} = ۳۰۰$ $\qquad$ $\overline{CD} = \overline{DB} = ۱۵۰$

ابعاد برحسب میلیمتر

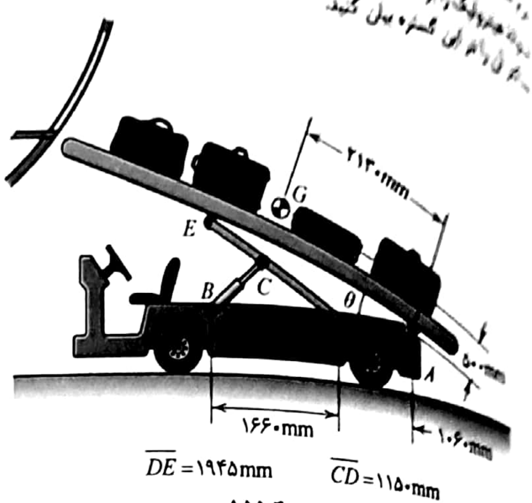
شکل م ۱۵۳.۴

۱۵۴.۴* زاویهٔ θ در سطح تکیه‌گاه در نقطهٔ C می‌تواند از صفر (در حالت قائم) تا $۹۰°$ (در حالت افقی) تغییر کند. (الف) نیرو در عضو BC را به‌صورت تابعی از θ در این گستره رسم کنید. به هرگونه شرایط غیرمعمول توجه کنید. (ب) برای چه اندازهٔ θ، مقدار نیرو در عضو BC صفر است؟ (ج) اگر عضو BC برای بار $۱۰۰۰lb$ در کشش یا فشار از کار بیفتد، گسترهٔ مجاز برای زاویهٔ θ چه اندازه خواهد بود؟



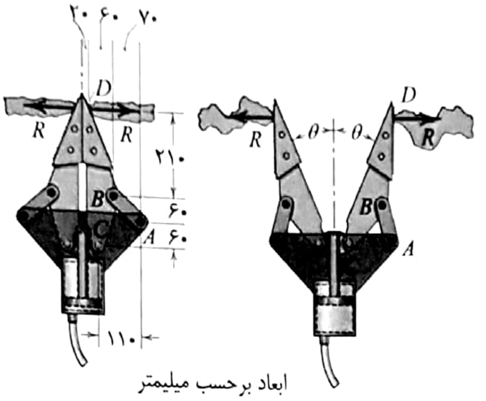
شکل م ۱۵۴.۴

... شکل داده شده برای بارگذاری چمدان در هواپیما به کار می‌رود. مجموع ... و چمدان‌ها برابر ۱۰۰kg و مرکز جرم آن در نقطه G قرار دارد. نیرو در ... هیدرولیک را برحسب تابع θ در گسترهٔ $5^\circ \le \theta \le 30^\circ$ تعیین و رسم کنید و مقدار ... آن را در این گستره بیان کنید.



شکل م ۱۵۵.۴

۱۵۶.۴* "فک‌های نجات" برای بیرون کشیدن سرنشینان از بدنهٔ مچاله‌شدهٔ اتومبیل‌های تصادفی به کار می‌رود. فشار $35MPa$ ($35 \times 10^6 N/m^2$) بر پشت پیستون به‌شعاع ۵۰mm ایجاد می‌شود. با توجه به شرایط شکل سمت چپ، نیروی R، نیرو در میلهٔ AB و نیروی واکنش افقی در C را برحسب زاویهٔ θ تعیین کنید. سپس عبارتی برای بیان این کمیت‌ها برحسب زاویهٔ θ (شکل سمت راست) در گسترهٔ $0 \le \theta \le 45^\circ$ به‌دست آورید و نمودار تغییرات آن را رسم کنید. حداقل مقدار R و θ را که این مینیمم در آن رخ داده مشخص کنید.



شکل م ۱۵۶.۴

Scanned by CamScanner

۵

نیروهای گسترده

۱.۵ مقدمه

قسمت (الف): مراکز جرم و مراکز هندسی

۲.۵ مرکز جرم

۳.۵ مراکز هندسی خطوط، سطوح و حجم‌ها

۴.۵ اجسام و شکل‌های مرکب: تقریب‌ها

۵.۵ قضیهٔ پاپوس

قسمت (ب): مباحث ویژه

۶.۵ تیرها ـ اثرات خارجی

۷.۵ تیرها ـ اثرات داخلی

۸.۵ کابل‌های انعطاف‌پذیر

۹.۵ استاتیک سیالات

۱۰.۵ مروری بر فصل

۱.۵ مقدمه

در فصل‌های گذشته تمام نیروها را متمرکز بر خط اثر و نقطه اثرشان فرض می‌کردیم. با این فرض مدل خوبی از این نیروها به‌دست آوردیم. در حقیقت، نیروهای "متمرکز" به مفهوم واقعی کلمه وجود ندارد، چون هر نیروی خارجی وارد بر یک جسم روی یک سطح محدود هر قدر هم که کوچک باشد، پخش می‌شود.

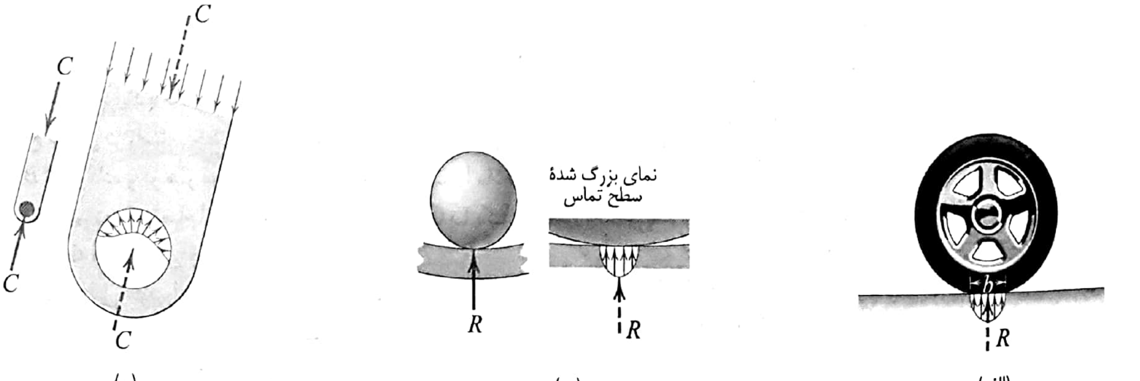
برای مثال نیروی وارد شده از سطح خیابان به لاستیک اتومبیل، در سراسر سطح تماس لاستیک وارد می‌شود [شکل ۱.۵(الف)]، که فقط وقتی قابل ارزیابی است که لاستیک چرخ، نرم باشد. هنگام ارزیابی نیروهای وارد بر اتومبیل به‌صورت یکجا، اگر مقدار b متعلق به سطح تماس در مقابل ابعاد دیگر اتومبیل، همانند فاصلهٔ بین چرخ‌ها، قابل صرف‌نظر باشد، می‌توانیم نیروهای تماس گسترده را با یک نیروی برایند R از نوع متمرکز جایگزین کنیم. حتی نیروی تماس میان یک ساچمهٔ فولادی سخت و مسیر آن در یک بلبرینگ [شکل ۱.۵(ب)]، بر یک سطح تماس بسیار کوچک اعمال می‌شود. همان‌طورکه در شکل ۱.۵(ج) نشان داده شده نیروهای وارد شده بر یک عضو دو نیرویی یک خرپا، بر سطح تماس میان پین داخل سوراخ و در راستای مقطع برش خورده وارد می‌شود. در چنین مثال‌هایی می‌توانیم هنگام تحلیل اثرات خارجی نیروهای وارد بر اجسام، آنها را متمرکز فرض کنیم.

از سوی دیگر، اگر بخواهیم توزیع نیروی داخلی در مصالح سازندهٔ جسم در اطراف محل تماس را بررسی کنیم، که تنش‌ها و کرنش‌های داخل در آنجا قابل توجه است، نباید نیروها را متمرکز فرض کنیم بلکه باید توزیع واقعی آنها را در نظر بگیریم. این حالت در اینجا مطرح نمی‌شود چرا که نیاز به شناخت خواص ماده دارد و مربوط به قسمت‌های پیچیده‌تر از مقاومت مصالح و تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته است.

هنگامی‌که نیروها بر یک ناحیه با ابعاد غیرقابل صرف‌نظر در مقابل ابعاد دیگر اعمال می‌شوند، لازم است که نحوهٔ توزیع نیروها را در نظر بگیریم. این کار را با استفاده از جمع کردن اثر این نیروها به روش انتگرال‌گیری بر روی سطح ناحیه انجام می‌دهیم. برای این کار لازم است که از شدت نیرو در هر نقطه باخبر باشیم. به‌طور کل با سه دسته از مسائل مواجه می‌شویم:

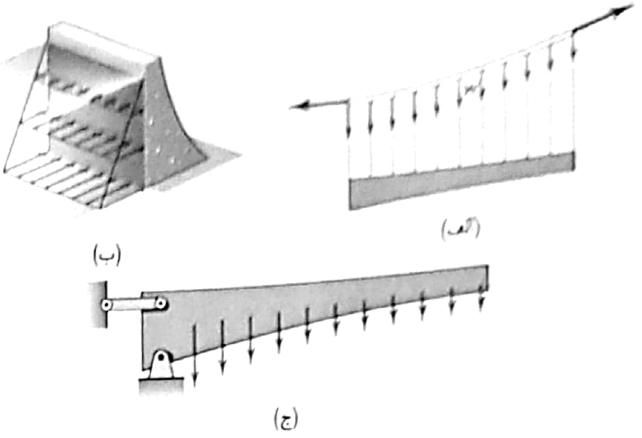
۱. توزیع خطی. هنگامی‌که نیرو در راستای یک خط توزیع شده است، مانند بار عمودی تحمل شده به‌وسیلهٔ یک کابل آویزان در شکل ۲.۵ (الف)، شدت نیرو را به‌وسیلهٔ w برحسب نیرو بر یکای واحد طول بیان می‌کنند که به‌صورت نیوتن بر متر (N/m) و یا پوند بر فوت (lb/ft) خواهد بود.

۲. توزیع سطحی. هنگامی‌که نیرو بر راستای یک سطح توزیع می‌شود، مانند فشار هیدرولیکی آب جمع شده پشت سد به دیوارهٔ داخلی آن که در شکل ۲.۵ (ب) نشان داده شده است، شدت نیرو با نیرو بر یکای سطح توصیف می‌شود. یکای اصلی برای فشار یا تنش در SI، نیوتن بر متر مربع (N/m^2) است که به آن *پاسکال* (Pa) نیز می‌گویند. با این حال، این یکا برای بیشتر کاربردها، کوچک است



(الف) (ب) (ج)

شکل ۱.۵



شکل ۲.۵

(۶۸۹۵ Pa = ۱lb/in^۲). کیلوپاسکال (kPa) که معادل ۱۰^۳ پاسکال است، بیشتر برای فشار سیالات استفاده می‌شود و مگاپاسکال، که برابر ۱۰^۶ پاسکال است، برای تنش استفاده می‌شود. در سیستم یکاهای .U.S، هم فشار سیالات و هم تنش مکانیکی برحسب پوند بر اینچ مربع (lb/in^۲) بیان می‌شوند.

۳. *توزیع حجمی.* به نیرویی که بر حجم یک جسم اعمال شود، *نیروی جسمی* می‌گویند. معمول‌ترین مثال از نیروی جسمی، نیروی جاذبهٔ گرانشی است، که بر تمام عناصر یک جسم اعمال می‌شود. به‌عنوان مثال، تعیین نیروهای وارد بر تکیه‌گاه‌های سازهٔ یک سر گیردار شکل ۲.۵(ج)، نیاز به در نظر گرفتن توزیع نیروهای گرانشی در سراسر سازه دارد. شدت نیروی گرانشی معادل *وزن مخصوص* ρg است، که در آن ρ معادل چگالی جسم و g شتاب جاذبه است. یکاهای معمول برای ρg، N/m^۳ = (kg/m^۳)(m/s^۲) در SI و lb/ft^۳ یا lb/in^۳ در سیستم یکاهای .U.S می‌باشد.

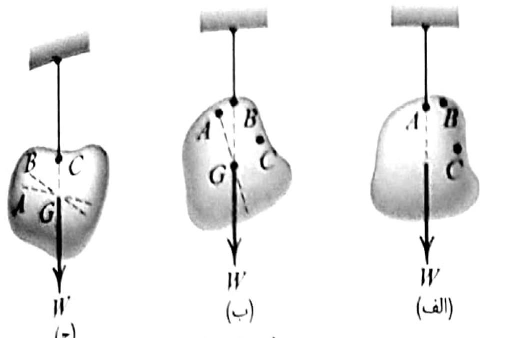
نیروی جسمی حاصل از جاذبهٔ گرانشی زمین (وزن)، متداول‌ترین نیروی گسترده‌ای است که با آن مواجه می‌شوید. قسمت (الف) در این فصل مربوط به پیدا کردن نقطه‌ای از جسم است که برایند نیروی گرانشی به آن اعمال می‌شود و همچنین در مورد ویژگی‌های هندسی خطوط، سطوح و حجم‌ها به بحث می‌پردازد. قسمت (ب) نیروهای گسترده (توزیع شده)ای را که بر تیرها و کابل‌های انعطاف‌پذیر اعمال می‌شوند و همچنین نیروهای گسترده‌ای را که سیالات بر سطوح اعمال می‌کنند، مورد بررسی قرار می‌دهد.

قسمت (الف): مراکز جرم و مراکز هندسی

۲.۵ مرکز جرم

یک جسم سه‌بعدی به جرم m را با هر اندازه و شکل دلخواهی در نظر بگیرید. اگر جسم را مانند شکل ۳.۵ از هر نقطه‌ای مانند A آویزان کنیم، جسم تحت اثر نیروی کشش در طناب و W برایند نیروهای گرانشی وارد بر تمامی ذره‌های جسم در تعادل خواهد بود. واضح است که برایند با طناب هم‌خط است. فرض کنید که مکان آن را با ایجاد یک سوراخ فرضی در راستای خط اثر آن علامت بزنیم. این کار را برای نقاط دیگر مانند B انجام داده و در هر مرحله خط اثر نیروی برایند را علامت می‌زنیم. در عمل خواهیم دید که تمام این خطوط در یک نقطهٔ G با یکدیگر متقاطعند که به این نقطه *مرکز گرانی* جسم می‌گویند.

با این حال، اگر تحلیل خود را دقیق‌تر کنیم، لازم است که تفاوت کوچک نیروهای وارد شده بر ذرات مختلف جسم را در نظر بگیریم زیرا جهت این نیروها به سوی مرکز زمین است. همچنین به‌دلیل آنکه ذرات در فواصل متفاوت از مرکز زمین قرار گرفته‌اند، شدت نیروی زمین در سراسر جسم یکسان



شکل ۳.۵

نیست. در نتیجه خط اثر برایندهای نیروهای جاذبه، که در آزمایش بالا توضیح داده شد، کاملاً متقاطع نخواهند بود و در نتیجه مرکز گرانی دارای نقطهٔ دقیقی نیست. اما در عمل، این موضوع تا زمانی که محدودهٔ کار ما با اجسامی با ابعاد قابل صرف‌نظر نسبت به ابعاد زمین باشد، مهم نیست. در نتیجه ما میدان نیروهای زمین حاصل از نیروی گرانشی را یکنواخت و موازی فرض می‌کنیم و این فرض باعث به‌دست آمدن یک نقطهٔ یکتا برای مرکز گرانی می‌شود.

تعیین مرکز گرانی

برای تعیین محل مرکز گرانی یک جسم به روش ریاضی [شکل ۴.۵(الف)]، از *اصل گشتاور* استفاده می‌کنیم (بخش ۶.۲). گشتاور برایند نیروی گرانشی W حول هر محوری برابر با مجموع گشتاورهای نیروی گرانشی dW وارد بر تمام ذرات جسم، حول همان محور است. برایند نیروهای گرانشی وارد بر تمام اجزای یک جسم معادل وزن آن جسم است و آن را می‌توان از $W=\int dW$ به‌دست آورید. به‌عنوان مثال اگر اصل گشتاور را حول محور y به کار بریم، گشتاور حاصل از وزن یک جزء جسم حول این محور برابر $x\,dW$ است و مجموع این گشتاورها برای تمام اجزای جسم معادل $\int x\,dW$ می‌باشد. مجموع این گشتاورها باید برابر با $W\bar{x}$ یعنی همان گشتاور مجموع باشد، بنابراین $\bar{x}W=\int x\,dW$.

با استفاده از روابط مشابه برای دو مؤلفهٔ دیگر، می‌توانیم مختصات مرکز گرانی G را به‌صورت زیر بیان کنیم

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dW}{W} \qquad \bar{y}=\frac{\int y\,dW}{W} \qquad \bar{z}=\frac{\int z\,dW}{W} \qquad (۱.۵\ \text{الف})$$

برای نشان دادن گشتاورهای فیزیکی گرانشی در معادلهٔ سوم، می‌توانیم جسم و محورهای آن را تغییر وضعیت دهیم تا محور z به حالت افقی درآید. لازم است دقت کنید که انتگرال داخلی هر یک از این تساوی‌ها بیانگر *مجموع گشتاورهاست*، درحالی‌که گشتاور حاصل از W و نقطهٔ متناظر G بیانگر *گشتاور مجموع* است. از این اصل گشتاور در مکانیک، به‌دفعات استفاده می‌شود.

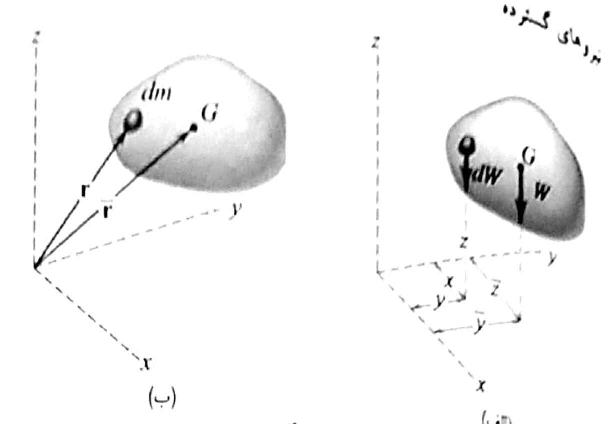
با جایگزین کردن $W=mg$ و $dW=g\,dm$، رابطهٔ مربوط به مختصات مرکز گرانی به شکل زیر درخواهد آمد

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dm}{m} \qquad \bar{y}=\frac{\int y\,dm}{m} \qquad \bar{z}=\frac{\int z\,dm}{m} \qquad (۱.۵\ \text{ب})$$

به‌کمک شکل ۴.۵ (ب) می‌توان معادلات (۱.۵ ب) را به شکل برداری بازنویسی کرد، که در آن مکان جرم جزء و مرکز جرم G به‌وسیلهٔ بردارهای جهت $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و $\bar{\mathbf{r}}=\bar{x}\mathbf{i}+\bar{y}\mathbf{j}+\bar{z}\mathbf{k}$ نشان داده می‌شوند. بنابراین معادلات (۱.۵ ب) مؤلفه‌های تک معادلهٔ برداری زیر می‌باشند

$$\bar{\mathbf{r}}=\frac{\int \mathbf{r}\,dm}{m} \qquad (۲.۵)$$

Scanned by CamScanner



شکل ۴.۵

چگالی ρ یک جسم معادل مقدار جرم آن در یکای حجم است، بنابراین جرم یک جزء دیفرانسیلی با حجم dV به‌صورت $dm = \rho\, dV$ نوشته می‌شود. اگر ρ در سراسر جسم ثابت نباشد ولی بتوان آن را به‌صورت تابعی از مختصات جسم بیان کرد، لازم است که این تغییرات را به‌صورت محاسبهٔ صورت و مخرج کسرهای معادلهٔ (۱.۵ ب) در نظر بگیریم. در آن صورت معادلات به‌صورت زیر نوشته خواهند شد

$$\bar{x} = \frac{\int x\rho\, dV}{\int \rho\, dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\rho\, dV}{\int \rho\, dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\rho\, dV}{\int \rho\, dV} \qquad (۳.۵)$$

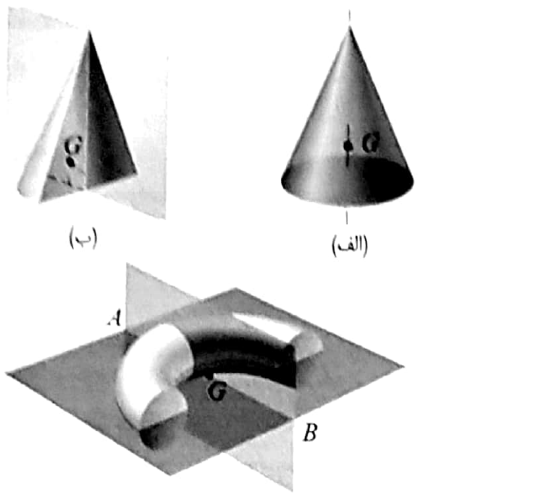
مرکز جرم در مقابل مرکز گرانی

معادلات (۱.۵ ب)، (۲.۵) و (۳.۵) با توجه به عدم ظاهر شدن g در آنها، از نیروهای گرانشی مستقل‌اند. در نتیجه آنها نقطه‌ای یکتا در جسم را نشان می‌دهند که در حقیقت تابعی برای نشان دادن توزیع جرم است. به این نقطه مرکز جرم می‌گویند و واضح است که تا زمانی که میدان جاذبه یکنواخت و موازی در نظر گرفته شود، بر مرکز گرانی منطبق است.

صحبت از مرکز گرانی جسم در حالتی که جسم از میدان جاذبهٔ زمین خارج شده باشد امری بیهوده است، چرا که نیروی جاذبه‌ای به آن وارد نمی‌شود. با این حال، جسم کماکان مرکز جرم یکتای خود را خواهد داشت. در نتیجه ما معمولاً به‌جای مرکز گرانی، از مرکز جرم استفاده می‌کنیم. همچنین، مرکز جرم دارای برتری خاصی در محاسبهٔ پاسخ دینامیکی یک جسم در برابر نیروهای نامتعادل است. این دسته مسائل در کتاب *دینامیک* مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

در بسیاری از مسائل، محاسبهٔ محل مرکز جرم را می‌توان با انتخاب هوشمندانهٔ محورهای مرجع، به امری ساده تبدیل کرد. به‌طورکلی، محورها باید طوری انتخاب شوند که تا حد ممکن معادلات مرزهای جسم ساده شوند. لذا برای اجسام با مرزهای دایره‌ای، مختصات قطبی مناسب خواهند بود.

بهترین راهنمایی برای تعیین مرکز جرم، توجه به تقارن جسم است. هنگامی‌که در یک جسم همگن، یک خط یا صفحهٔ تقارن وجود داشته باشد، محور مختصات باید منطبق بر آن خط یا صفحه انتخاب شود. مرکز جرم همواره بر روی آن خط یا صفحه قرار خواهد داشت، چرا که گشتاورهای حاصل از اجزای متقارن نسبت به هم، همواره یکدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین مرکز جرم G مخروط قائم‌الزاویهٔ دایره‌ای نشان‌داده‌شده در شکل ۵.۵ (الف)، در مکانی در امتداد محور مرکزی آن قرار خواهد داشت که همان خط تقارن آن است. مرکز جرم نیم‌مخروط دایره‌ای در شکل ۵.۵ (ب) نیز بر روی صفحهٔ تقارن آن قرار خواهد داشت. مرکز جرم نیم حلقهٔ شکل ۵.۵ (ج) در هر دو صفحهٔ تقارن آن قرار خواهد داشت و لذا محل آن بر روی خط AB خواهد بود. راحت‌تر است که برای تعیین مرکز جرم، در صورت امکان از تقارن موجود در جسم استفاده شود.



شکل ۵.۵

۳.۵ مراکز هندسی خطوط، سطوح و حجم‌ها

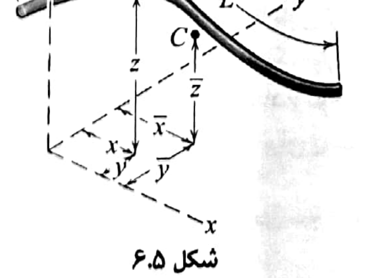
هنگامی‌که ρ، چگالی یک جسم در سراسر آن جسم یکنواخت باشد، یک مقدار ثابت در صورت و مخرج معادلات (۳.۵) وجود خواهد داشت و لذا حذف خواهد شد. جملات باقی مانده، تنها بیانگر ویژگی‌های هندسی جسم می‌باشند چرا که تمام عوامل مربوط به جرم جسم، از معادله حذف شده‌اند. اصطلاح مرکز هندسی برای حالتی استفاده می‌شود که محاسبات ما فقط به شکل هندسی جسم بر می‌گردد. لذا فقط هنگامی‌که با یک جسم فیزیکی سروکار داریم، از اصطلاح مرکز جرم استفاده می‌کنیم. درصورتی‌که چگالی جسم یکنواخت باشد، موقعیت مرکز جرم و مرکز هندسی بر یکدیگر منطبق خواهد بود، اما اگر چگالی متغیر باشد، این دو نقطه عموماً بر هم منطبق نیستند.

محاسبهٔ مراکز هندسی، در سه حالت صورت می‌گیرد، که به مدلسازی شکل جسم مورد نظر، به‌صورت یک خط، یک صفحه و یا یک حجم بستگی دارد.

۱. خطوط. برای یک میلهٔ باریک یا یک سیم به طول L، با سطح مقطع A و چگالی ρ، مطابق شکل ۶.۵، جسم را می‌توان به‌صورت قسمتی از یک خط تقریب زد و نوشت $dm = \rho A\, dL$. اگر ρ و A در طول میله ثابت باشند، **مختصات مرکز جرم با مختصات مرکز هندسی C از قسمت خط یکسان خواهد بود که از معادلهٔ (۱.۵ ب) می‌توان نوشت**

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dL}{L} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dL}{L} \qquad (۴.۵)$$

دقت کنید که عموماً مرکز هندسی C بر روی جسم قرار نخواهد گرفت. اگر میله در یک صفحه، مثلاً صفحهٔ x-y قرار داشته باشد، فقط نیاز به محاسبهٔ دو مختصه است.



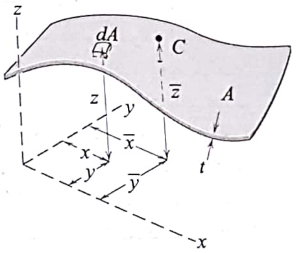
شکل ۶.۵

Scanned by CamScanner

۲. سطوح. هنگامی که جسمی با چگالی ρ، دارای ضخامت کوچک اما ثابت t باشد، می‌توانیم آن را به‌صورت یک سطح A مدلسازی کنیم، که در شکل ۷.۵ می‌بینید. جرم یک جزء برابر با $dm = \rho t\, dA$ خواهد شد. بار دیگر، اگر ρ و t در تمام سطح ثابت باشند، مختصات مرکز جرم جسم با مختصات مرکز هندسی C سطح یکی خواهند شد و با توجه به معادلهٔ (۱.۵ ب)، مختصات را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dA}{A} \tag{۵.۵}$$

به‌صورت‌های کسرهای معادلات (۵.۵)، *گشتاور اول سطح* می‌گویند.[۱] همان‌طور که در شکل ۷.۵ برای بخشی از پوسته نشان داده شده است، اگر سطح جسم انحنا داشته باشد، هر سه مختصات باید محاسبه شود. در حالت کلی مرکز هندسی C برای سطح خمیده بر روی سطح قرار نخواهد داشت. اما اگر سطح مورد نظر تخت باشد، به‌طور مثال فقط در صفحهٔ x-y قرار داشته باشد، فقط به محاسبهٔ مختصات C در آن صفحه نیاز داریم.



شکل ۷.۵

۳. حجم‌ها. برای یک جسم به حجم V و چگالی ρ، جزء مورد نظر جرمی برابر با $dm = \rho\, dV$ خواهد داشت. درصورتی‌که چگالی ρ در سراسر حجم ثابت باشد، از رابطه حذف خواهد شد و مختصات مرکز جرم جسم با مختصات C مرکز هندسی یکی خواهد شد. با استفاده از معادلات (۳.۵) یا (۱.۵ ب) خواهیم داشت

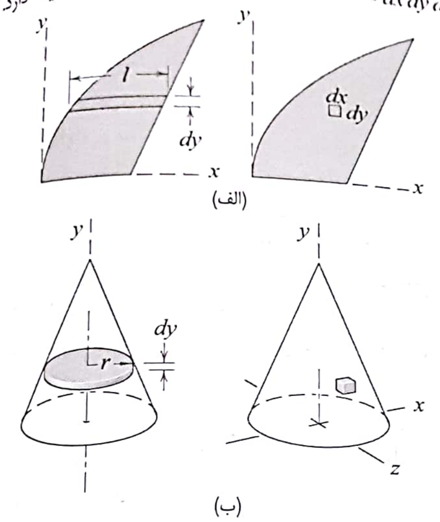
$$\bar{x} = \frac{\int x\, dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dV}{V} \tag{۶.۵}$$

مفاهیم کلیدی

انتخاب جزء برای انتگرال‌گیری

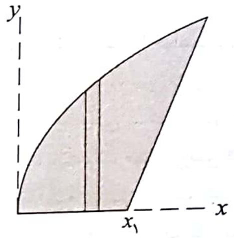
دشواری یک قضیه اغلب در فهم مفاهیم آن نیست بلکه در طریقهٔ استفاده از آنهاست. در مراکز جرم و مراکز هندسی، مفهوم اصل گشتاور به حد کافی ساده است، قسمت مشکل آن انتخاب جزء دیفرانسیلی و نوشتن انتگرال‌های مربوط به آن است. پنج نکتهٔ زیر برای این عمل مفید خواهند بود:

۱. مرتبهٔ جزء. در صورت امکان، بهتر است که به‌جای استفاده از اجزایی با مرتبهٔ بالا، از اجزای مرتبه یک استفاده شود تا بتوان از یک انتگرال برای کل شکل استفاده نمود. لذا در شکل ۸.۵ (الف)، یک نوار سطحی افقی مرتبه یک $da = l\, dy$ فقط نیاز به یک انتگرال در امتداد y خواهد داشت تا بتوان تمام شکل را پوشش داد. جزء مرتبه دو $dx\, dy$، برای پوشش دادن کل شکل، نیاز به دو انتگرال خواهد داشت، اولی برای x و دومی برای y. به‌عنوان یک مثال دیگر برای مخروط توپر در شکل ۸.۵ (ب)، جزء را یک قطاع دایره‌ای با حجم $dV = \pi r^2\, dy$ انتخاب خواهیم کرد که از مرتبه یک است. این انتخاب فقط نیاز به یک انتگرال خواهد داشت و بنابراین بر انتخاب جزء مرتبه سه به‌صورت $dV = dx\, dy\, dz$، که نیازمند سه انتگرال است، ارجحیت دارد.



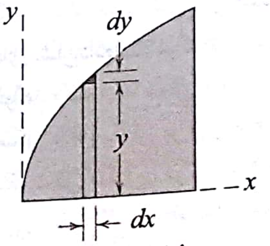
شکل ۸.۵

۲. پیوستگی. در صورت امکان، جزء را طوری انتخاب می‌کنیم که بتوان از آن در یک مرحلهٔ پیوسته انتگرال گرفت و این انتگرال، کل شکل را پوشش دهد. لذا نوار افقی در شکل ۸.۵ (الف)، بر نوار عمودی در شکل ۹.۵ ارجحیت دارد، چرا که به‌دلیل تغییر تابع تعیین‌کنندهٔ ارتفاع در $x = x_1$، اگر از نوار عمودی استفاده شود، نیاز به دو بار انتگرال‌گیری وجود خواهد داشت.



شکل ۹.۵

۳. عدم استفاده از جمله‌های درجه بالاتر. جمله‌های درجه بالاتر در مقابل جمله‌های درجه پایین‌تر، تقریباً همیشه حذف می‌شوند (بخش ۷.۱). لذا نوار عمودی سطح زیر منحنی شکل ۱۰.۵، به‌وسیلهٔ جملهٔ درجه اول $dA = y\, dx$ بیان شده و جملهٔ درجه دوم $\frac{1}{2} dx\, dy$ که بیانگر سطح مثلثی است، عملاً استفاده نمی‌شود. البته در حالت حدی، خطایی وجود نخواهد داشت.

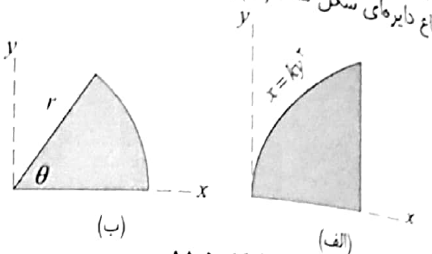


شکل ۱۰.۵

۱. گشتاور دوم سطح (گشتاورِ گشتاور اول) که گشتاور اینرسی سطح نیز نامیده می‌شود، بعداً در بحث گشتاورهای دوم سطح در پیوست الف خواهد آمد.

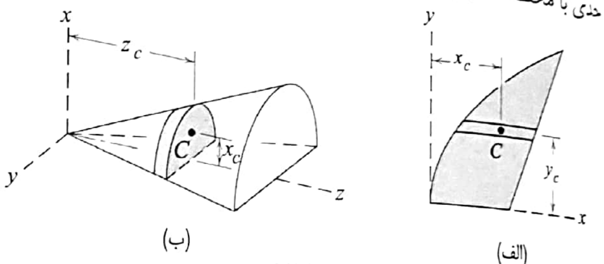
Scanned by CamScanner

۴. انتخاب مختصات. به‌عنوان یک قانون کلی، از سیستم مختصاتی استفاده می‌کنیم که به بهترین صورت با مرزهای شکل سازگار است. بنابراین مرزهای سطح شکل ۱۱.۵ (الف) در مختصات قائم، به بهترین نحو بیان می‌شود در صورتی که مرزهای قطاع دایره‌ای شکل ۱۱.۵ (ب) با مختصات قطبی سازگارتر است.



شکل ۱۱.۵

۵. مختصات مرکز هندسی جزء. هنگامی که از یک جزء درجه یک یا درجه دو استفاده می‌کنیم، لازم است که برای نشان دادن گشتاور جزء دیفرانسیلی، از *مختصات هندسی جزء* برای بازوی گشتاور استفاده کنیم. لذا برای یک نوار افقی از سطح شکل ۱۲.۵ (الف)، گشتاور dA حول محور y برابر $x_c\,dA$ خواهد بود که x_c، مختصات x از مرکز هندسی جزء C است. دقت کنید که x_c، با x که بیانگر مرزهای سطح می‌باشد یکی *نیست*. برای این جزء در جهت y، بازوی گشتاور y_c برای مرکز هندسی جزء در حالت حدی با مختصات y مرزهای آن یکسان است.



شکل ۱۲.۵

به‌عنوان مثال دیگر، نیم مخروط توپر شکل ۱۲.۵ (ب) را در نظر گرفته و جزء حجمی آن را یک قطاع نیم‌دایره‌ای با ضخامت دیفرانسیلی فرض کنید. بازوی گشتاور این جزء در راستای x برابر با فاصلهٔ x_c، یعنی فاصلهٔ بین محور تا مرکز قطاع است؛ و نه x، فاصلهٔ محور تا مرز قطاع. با این حال، در راستای z، بازوی گشتاور z_c که فاصلهٔ محور تا مرکز هندسی جزء است با مختصهٔ z جزء یکی است.

با در نظر گرفتن این مثال‌ها، معادلات (۵.۵) را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\bar{x} = \frac{\int x_c\,dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y_c\,dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z_c\,dA}{A} \qquad \text{(۵.۵ الف)}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c\,dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y_c\,dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z_c\,dV}{V} \qquad \text{(۶.۵ الف)}$$

لازم است که دقت کنید زیرنویس c به‌عنوان یک یادآوری است که بازوهای گشتاور ظاهر شده در صورت‌های عبارت‌های انتگرالی همیشه همان *مختصات مرکز هندسی جزء* خاص انتخاب شده‌اند.

حال شما باید مطمئن شوید که اصول گشتاورها را، که در بخش ۴.۲ معرفی شد، به‌خوبی فهمیده‌اید. شما باید مفهوم فیزیکی این اصل را همان‌طورکه در سیستم وزن‌های موازی در شکل ۴.۵ (الف) نشان‌داده‌شده، متوجه شوید. تساوی میان گشتاور برایند وزن W و جمع (انتگرال) گشتاورهای اجزای وزن dW را در خاطر داشته باشید تا از بروز اشتباه در استفاده از روابط ریاضی اجتناب کنید. استفاده از اصول گشتاورها در پیدا کردن عبارت درست برای x_c، y_c و z_c که مختصات مرکز هندسی یک جزء دیفرانسیلی می‌باشند، به ما کمک می‌کند.

با به یاد داشتن شکل فیزیکی اصل گشتاورها، متوجه خواهیم شد که معادلات (۴.۵)، (۵.۵) و (۶.۵)، که روابط هندسی می‌باشند، بیان کنندهٔ اجسام فیزیکی همگن نیز می‌باشند چرا که چگالی ρ حذف می‌شود. اگر چگالی جسم مورد نظر ثابت نباشد اما در طول جسم برحسب تابعی از مختصات تغییر کند، از صورت و مخرج عبارت مرکز جرم، حذف نخواهد شد. پس همان‌طورکه قبلاً توضیح داده شد، باید از معادلهٔ (۳.۵) استفاده کنیم.

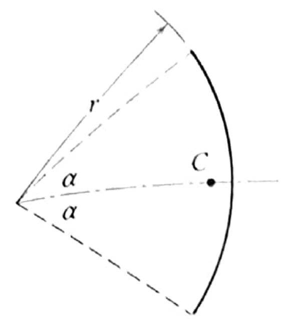
مسائل نمونهٔ ۱.۵ تا ۵.۵ با دقت طوری انتخاب شده‌اند تا بتوان از معادلات (۴.۵)، (۵.۵) و (۶.۵)، برای محاسبهٔ محل مرکز هندسی پاره‌خط‌ها (میله‌های باریک)، سطوح (صفحه‌های نازک مسطح) و حجم‌ها (اجسام توپُر همگن) استفاده کرد. پنج نکتهٔ توضیح داده شده در بالا در این مثال‌ها به‌خوبی نشان داده شده‌اند.

بند ج.۱۰ از پیوست ج شامل جدول انتگرال‌هایی است که برای مسائل این فصل لازم است. همچنین خلاصه‌ای از مختصات مراکز هندسی شکل‌های متداول در جدول‌های ۳.د و ۴.د در پیوست د آمده است.

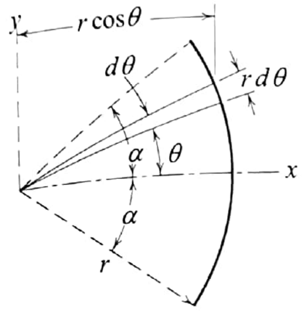
Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۵

مرکز هندسی یک قطاع دایره‌ای. مرکز هندسی قطاع دایره‌ای نشان داده شده در شکل را به‌دست آورید.



حل: با انتخاب محور x به‌عنوان خط تقارن، مقدار $\bar{y}=0$ خواهد شد. یک جزء دیفرانسیلی از
❶ کمان در مختصات قطبی، طولی برابر $dL=r\,d\theta$ خواهد داشت و مختصهٔ x از جزء $r\cos\theta$ خواهد بود.



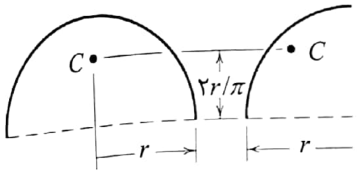
با استفاده از قسمت اول معادلات (۴.۵) و جایگذاری $L=2\alpha r$ خواهیم داشت

$$\left[L\bar{x}=\int x\,dL\right] \qquad (2\alpha r)\bar{x}=\int_{-\alpha}^{\alpha}(r\cos\theta)\,r\,d\theta$$

$$2\alpha r\bar{x}=2r^{2}\sin\alpha$$

$$\bar{x}=\frac{r\sin\alpha}{\alpha} \qquad \text{ج.}$$

برای یک کمان نیم‌دایره‌ای داریم $2\alpha=\pi$، که نتیجه می‌دهد $\bar{x}=2r/\pi$. با تقارن خواهیم دید که این نتیجه برای ربع دایره هم صادق خواهد بود.

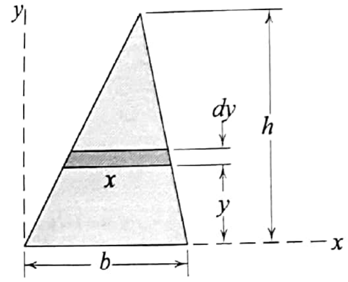


راهنمایی مفید

❶ کاملا واضح است که برای بیان طول یک کمان، مختصات قطبی بسیار مناسب‌تر از مختصات قائم (دکارتی) است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۵

مرکز هندسی یک سطح مثلثی. فاصلهٔ $\bar{h}$ قاعدهٔ مثلثی به‌ارتفاع h را تا مرکز هندسی سطح آن به‌دست آورید.



حل: محور x بر روی قاعده انتخاب شده است. یک نوار دیفرانسیلی به مساحت ❶ $dA=x\,dy$ انتخاب می‌شود. با توجه به مثلث‌های متشابه داریم $x/(h-y)=b/h$. با استفاده از قسمت دوم معادلات (۵.۵ الف) خواهیم داشت

$$\left[A\bar{y}=\int y_c\,d_A\right] \qquad \frac{bh}{2}\bar{y}=\int_{0}^{h}y\frac{b(h-y)}{h}dy=\frac{bh^{2}}{6}$$

و

$$\bar{y}=\frac{h}{3} \qquad \text{ج.}$$

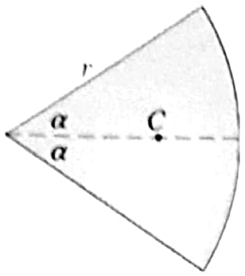
اگر یکی از دو ضلع دیگر را به‌عنوان قاعده انتخاب کنیم و مراحل بالا را برایشان تکرار کنیم، نتیجه یکی خواهد شد. لذا مرکز هندسی در محل تقاطع میانه‌ها قرار دارد، زیرا فاصلهٔ بین این نقطه و هر ضلع، برابر با یک سوم ارتفاع بر همان ضلع است.

راهنمایی مفید

❶ در اینجا با استفاده از یک جزء مرتبه یک، فقط نیاز به یک بار انتگرال‌گیری داریم. دقت کنید که dA باید برحسب متغیر انتگرال یعنی y بیان شود، در نتیجه به $x=f(y)$ نیازمندیم.

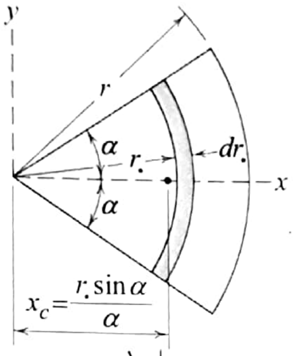
Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۵ **مرکز هندسی سطح یک قطاع دایره‌ای.** مرکز هندسی سطح یک قطاع دایره‌ای را نسبت به رأس آن به‌دست آورید.



حل ۱: محور x به‌عنوان محور تقارن انتخاب می‌شود و لذا $\bar{y}$ خود به خود صفر خواهد بود. محدوده را می‌توانیم با جابه‌جایی یک جزء به شکل یک قطاع حلقوی، همانند شکل، از مرکز تا منحنی خارجی، پوشش دهیم. شعاع حلقه برابر با r_0 بوده و ضخامت آن dr_0 است لـذا مساحت آن برابر خواهد بود با

$$dA = ۲r_0 \alpha\, dr_0$$



حل ۱

❶ مختصهٔ x برای مرکز هندسی جزء با توجه بـه مسـئلهٔ نمونـهٔ ۱.۵ برابـر $x_c = r_0 \sin\alpha/\alpha$ است که در فرمول ❷ r_0 جایگزین r می‌شود. بنابراین، معادلـهٔ اول از معـادلات (۵.۵ الـف) نتیجـه می‌دهد

$$[A\bar{x} = \int x_c\, dA] \qquad \frac{۲\alpha}{۲\pi}(\pi r^۲)\bar{x} = \int_۰^r \left(\frac{r_0 \sin\alpha}{\alpha}\right)(۲r_0 \alpha\, dr_0)$$

$$r^۲ \alpha \bar{x} = \frac{۲}{۳} r^۳ \sin\alpha$$

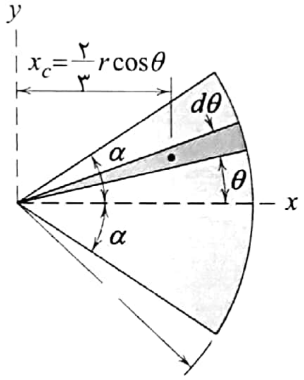
ج. $$\bar{x} = \frac{۲}{۳}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

راهنمایی‌های مفید

❶ دقت کنید که باید میان r و r_0 تمایز قائل شوید.

❷ مواظب باشید که از r_0 به‌عنـوان مختصـات مرکـز هندسی استفاده نکنید.

حل ۲: سطح را می‌توان همچنین با چرخاندن یک جـزء دیفرانسـیلی مثلثـی شـکل حـول رأس و به‌اندازهٔ زاویهٔ رأس، پوشش داد. این مثلث همان‌طورکه در شکل نشان داده شده اسـت، مساحتی برابر با $dA = (r/۲)(r\,d\theta)$ دارد که در آن جملات مرتبه بالا در نظر گرفته نشده‌اند. از مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۵ مرکز هندسی سطح یک جزء مثلثی در فاصلهٔ دو سومی ارتفاع آن از رأس قرار دارد. بنابراین مختصات x برای مرکز هندسی جزء برابر با $x_c = \frac{۲}{۳} r\cos\theta$ خواهد بود. با استفاده از قسمت اول معادلهٔ (۵.۵ الف) خواهیم داشت



حل ۲

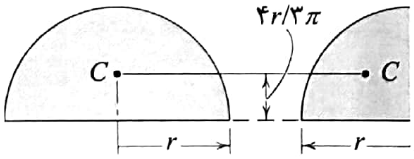
$$[A\bar{x} = \int x_c\, dA] \qquad (r^۲\alpha)\bar{x} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{۲}{۳} r\cos\theta\right)\left(\frac{۱}{۲} r^۲ d\theta\right)$$

$$r^۲ \alpha \bar{x} = \frac{۲}{۳} r^۳ \sin\alpha$$

و

ج. $$\bar{x} = \frac{۲}{۳}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

برای سطح نیم‌دایره‌ای داریم: $۲\alpha = \pi$ که به ما می‌دهد $\bar{x} = ۴r/۳\pi$. با استفاده از تقـارن می‌بینیم که این نتیجه برای ربع دایره با مشخصات نشان داده شده نیز برقرار است.

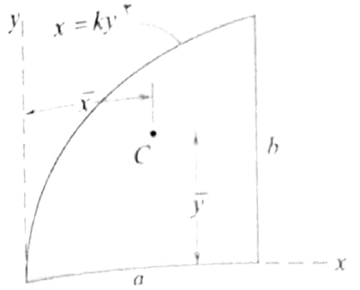


لازم به ذکر است که اگر از جزء مرتبهٔ دو $r_0\, dr_0\, d\theta$ استفاده مـی‌کـردیم، انتگـرال نسـبت به θ حلقه‌ای را که در حل ۱ از آن استفاده شد، نتیجه می‌داد، اما انتگرال‌گیری نسبت بـه r_0 در ابتدا به ما جزء مثلثی را که در حل ۲ استفاده شد ارائه می‌کرد.

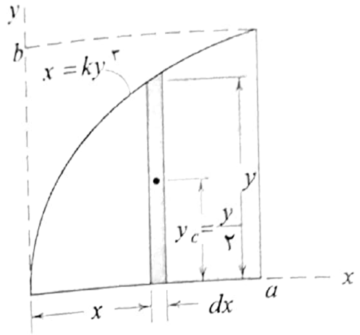
Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۵.۴

مرکز هندسی سطح زیر منحنی $x=ky^3$ را از $x=0$ تا $x=a$ به‌دست آورید.



حل ۱: یک جزء عمودی از سطح $dA=y\,dx$ را همان‌طورکه در شکل نشان داده شده، انتخاب می‌کنیم. مختصات x از مرکز هندسی از قسمت اول معادلات (۵.۵ الف) به‌دست می‌آید



❶ $[A\bar{x}=\int x_c\,dA]$ $\qquad \bar{x}\int_0^a y\,dx=\int_0^a xy\,dx$

با جایگذاری $y=(x/k)^{1/3}$ و $k=a/b^3$ و انتگرال‌گیری خواهیم داشت

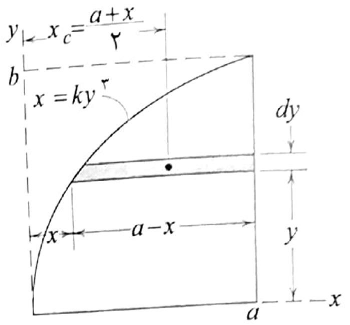
ج. $\qquad \frac{3ab}{4}\bar{x}=\frac{3a^2b}{7} \qquad \bar{x}=\frac{4}{7}a$

در به‌دست آوردن $\bar{y}$ از قسمت دوم معادله (۵.۵ الف) مختصات مرکز هندسی مستطیلی برابر با $y_c=y/2$ است که در آن y ارتفاع نوار با توجه به معادلهٔ منحنی $x=ky^3$ است. لذا اصل گشتاور به‌صورت زیر در می‌آید

$[A\bar{y}=\int y_c\,dA]$ $\qquad \frac{3ab}{4}\bar{y}=\int_0^a\left(\frac{y}{2}\right)y\,dx$

با جایگزین کردن $y=b(x/a)^{1/3}$ و انتگرال‌گیری خواهیم داشت

ج. $\qquad \frac{3ab}{4}\bar{y}=\frac{3ab^2}{10} \qquad \bar{y}=\frac{2}{5}b$



حل ۲: جزء افقی سطح نشان داده شده در شکل پایینی را می‌توان به جای جزء عمودی استفاده نمود مختصات x. برای مرکز هندسی جزء مستطیلی به‌صورت $x_c=x+\frac{1}{2}(a-x)=\frac{a+x}{2}$ است که در حقیقت همان میانگین مختصات a و x از دو انتهای نوار است. در نتیجه

$[A\bar{x}=\int x_c\,dA]$ $\qquad \bar{x}\int_0^b(a-x)dy=\int_0^b\left(\frac{a+x}{2}\right)(a-x)dy$

مقدار $\bar{y}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$[A\bar{y}=\int y_c\,dA]$ $\qquad \bar{y}\int_0^a(a-x)dy=\int_0^a y\,(a-x)dy$

که در اینجا برای نوار افقی $y_c=y$ می‌باشد می‌توان درستی نتایج قبل را با استفاده از این انتگرال‌ها بررسی کرد.

راهنمایی مفید

❶ دقت کنید که برای جزء عمودی داریم $x_c=x$.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۵.۵

حجم نیم‌کره. مرکز هندسی حجم یک نیم‌کره به شعاع r را نسبت به رأس آن پیدا کنید.

حل ۱: با انتخاب محورها به‌صورت نشان داده شده در شکل الف، با استفاده از تقارن، $\bar{x}=\bar{z}=0$ خواهد شد. مناسب‌ترین جزء قابل انتخاب یک قطاع دایره‌ای با ضخامت dy به موازات صفحهٔ x-z است. با توجه به اینکه نیم‌کره صفحهٔ y-z را در دایرهٔ $y^۲+z^۲=r^۲$ قطع می‌کند، شعاع قطاع دایره‌ای برابر خواهد بود با $z=+\sqrt{r^۲-y^۲}$. در نتیجه حجم این جزء برابر خواهد بود با

$$dV=\pi(r^۲-y^۲)\,dy$$

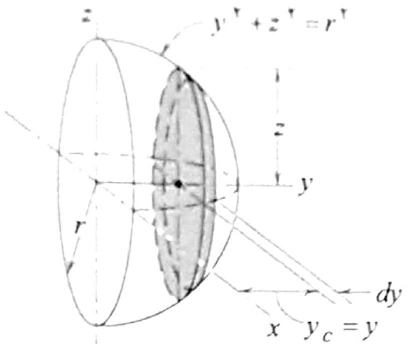
قسمت دوم معادلات (۶.۵ الف) ایجاب می‌کند که ❶

$$\left[V\bar{y}=\int y_c\,dV\right] \qquad \bar{y}\int_۰^r \pi(r^۲-y^۲)dy=\int_۰^r y\,\pi\,(r^۲-y^۲)dy$$

که در آن $y_c=y$. با انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$\frac{۲}{۳}\pi r^۳\bar{y}=\frac{۱}{۴}\pi r^۴ \qquad \bar{y}=\frac{۳}{۸}r$$

ج.



حل ۱

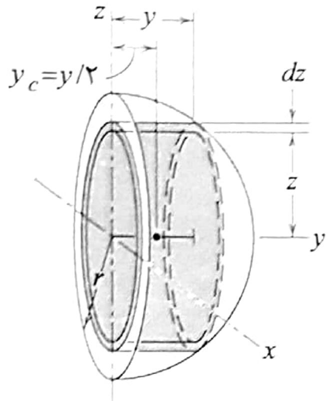
حل ۲: به‌عنوان یک راه حل دیگر، همان‌طورکه در شکل ب نشان داده شده، می‌توانیم برای جزء دیفرانسیلی مورد نیازمان از یک پوستهٔ استوانه‌ای با طول y، شعاع z و ضخامت dz استفاده کنیم. با تغییر دادن شعاع پوسته از صفر تا r می‌توانیم تمام حجم را پوشش دهیم. با توجه به تقارن، مرکز هندسی جزء پوسته‌ای در مرکز آن قرار دارد، به‌طوری که $y_c=y/۲$. حجم جزء برابر خواهد بود با $dV=(۲\pi z\,dz)(y)$. با نوشتن y برحسب z با استفاده از معادلات دایره خواهیم داشت: $y=+\sqrt{r^۲-z^۲}$. با استفاده از مقدار $\frac{۲}{۳}\pi r^۳$ که در حل ۱ برای حجم نیم‌کره محاسبه شد و جایگذاری آن در قسمت دوم از معادلات (۶.۵ الف)، خواهیم داشت

$$\left[V\bar{y}=\int y_c\,dV\right] \qquad \left(\frac{۲}{۳}\pi r^۳\right)\bar{y}=\int_۰^r \frac{\sqrt{r^۲-z^۲}}{۲}\left(۲\pi z\sqrt{r^۲-z^۲}\right)dz$$

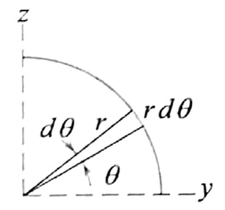
$$=\int_۰^r \pi(r^۲z-z^۳)dz=\frac{\pi r^۴}{۴}$$

$$\bar{y}=\frac{۳}{۸}r$$

ج.



حل ۲



حل ۳

حل‌های ۱ و ۲ از نظر دشواری هر دو یکسان‌اند زیرا در هر کدام از آنها جزئی با شکل ساده انتخاب شده و انتگرال‌گیری در هر دوی آنها فقط بر روی یک متغیر صورت می‌گیرد.

حل ۳: به‌عنوان راه حل دیگر، می‌توانیم زاویهٔ θ را به‌عنوان متغیر در بازهٔ صفر تا $\pi/۲$ در نظر بگیریم. شعاع هر یک از دو جزء برابر خواهد بود با $r\sin\theta$، به‌طوری‌که ضخامت جزء *حل ۱*، برابر با $dy=(r\,d\theta)\sin\theta$ و برای *حل ۲*، برابر با $dz=(r\,d\theta)\cos\theta$ خواهد بود. در نتیجه طول پوسته برابر خواهد شد با $y=r\cos\theta$.

راهنمایی مفید

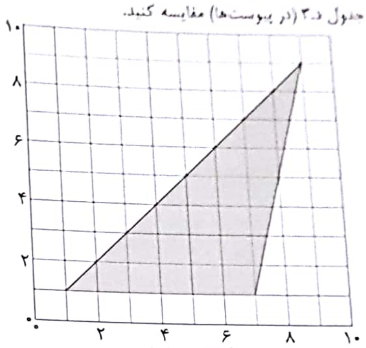
❶ آیا می‌توانید جزء حجم مرتبهٔ بالاتری را که از عبارت dV حذف شده است، تشخیص دهید؟

Scanned by CamScanner

مسائل

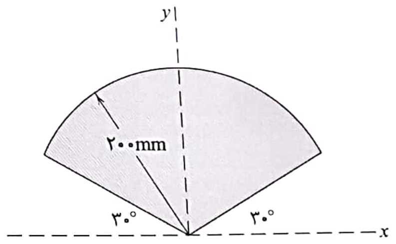
مسائل مقدماتی

۱.۵ به‌صورت چشمی، نقطه‌ای را که به نظر شما مرکز هندسی است، با یک مداد بر روی سطح مثلث شکل تخمین بزنید. نقطهٔ انتخاب شده را با نتایج حاصل از مسئله نمونهٔ ۲.۵ و جدول د.۳ (در پیوست‌ها) مقایسه کنید.



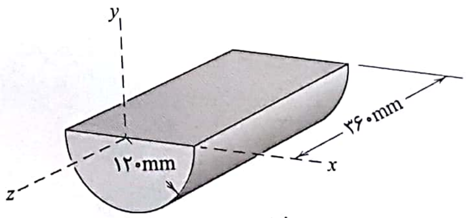
شکل م ۱.۵

۲.۵ به‌صورت چشمی، نقطه‌ای را که به نظر شما مرکز هندسی است، با یک مداد بر روی قطاع دایره‌ای شکل تخمین بزنید. تخمین خود را با نتیجهٔ مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۵ مقایسه کنید.



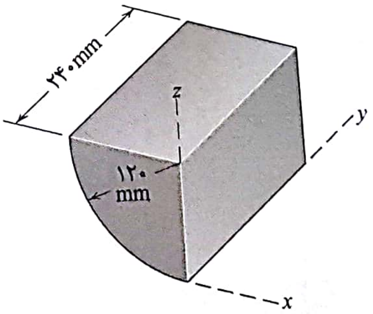
شکل م ۲.۵

۳.۵ مختصات x، y و z را برای مرکز جرم نیم استوانهٔ یکنواخت زیر به‌دست آورید.



شکل م ۳.۵

۴.۵ مختصات x، y و z را برای مرکز جرم ربع استوانه‌ای توپر و یکنواخت زیر به‌دست آورید.

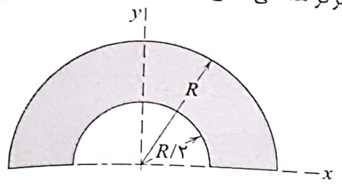


شکل م ۴.۵

۵.۵ یک میلهٔ نیم‌دایره‌ای با شعاع r به یک یاتاقان در انتهای بالایی آن متصل شده و می‌تواند آزادانه در سطح عمودی بچرخد. زاویهٔ θ ی به‌وجود آمده بین قطر و خط عمود را برای حالت تعادل به‌دست آورید.

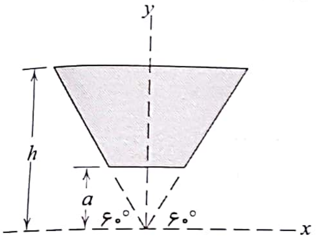
شکل م ۵.۵

۶.۵ مختصهٔ y از مرکز هندسی سطح زیر را با استفاده از انتگرال‌گیری معین کنید.



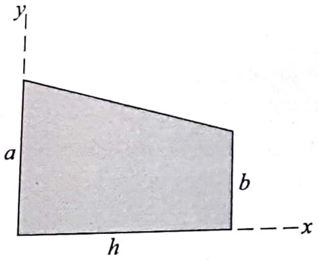
شکل م ۶.۵

۷.۵ مختصهٔ y را برای مرکز هندسی سطح سایه‌خورده تعیین کنید. نتیجهٔ خود را برای حالت خاص $a=۰$ بررسی کنید.



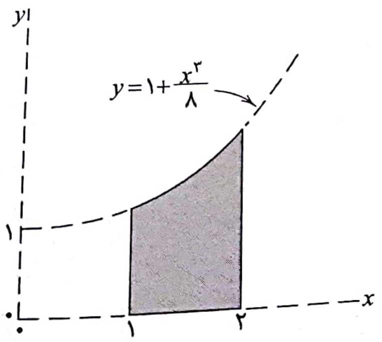
شکل م ۷.۵

۸.۵ مختصات x و y را برای مرکز هندسی سطح ذوزنقه‌ای زیر تعیین کنید.



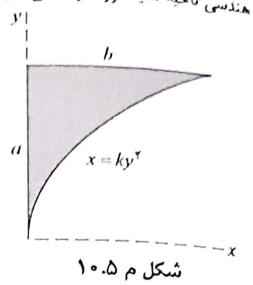
شکل م ۸.۵

۹.۵ مختصات x و y را برای مرکز هندسی سطح سایه‌خوردهٔ زیر تعیین کنید.



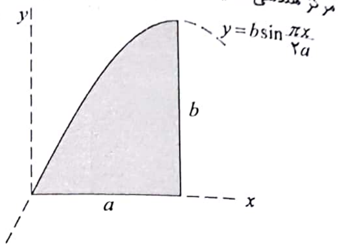
شکل م ۹.۵

۱۰.۵ مختصات مرکز هندسی ناحیهٔ سایه‌خورده را معین کنید.



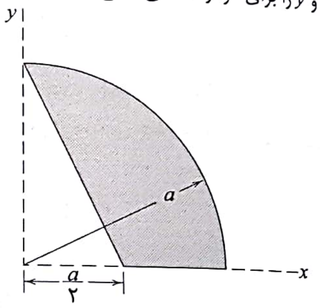
شکل م ۱۰.۵

۱۱.۵ مختصات مرکز هندسی ناحیهٔ سایه‌خورده را معین کنید.



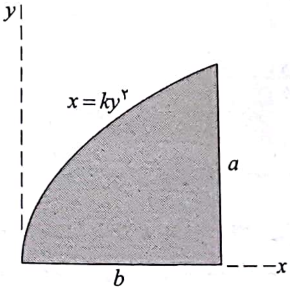
شکل م ۱۱.۵

۱۲.۵ مختصات x و y را برای مرکز هندسی سطح سایه‌خوردهٔ زیر تعیین کنید.



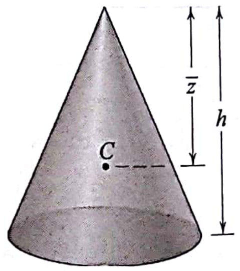
شکل م ۱۲.۵

۱۳.۵ مختصات مرکز هندسی ناحیهٔ سایه‌خورده را تعیین کنید.



شکل م ۱۳.۵

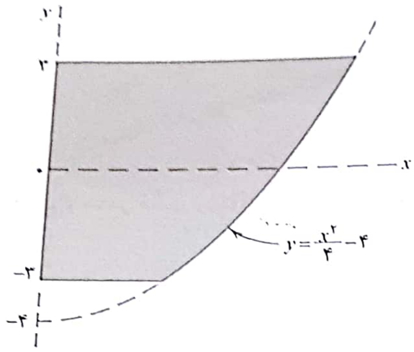
۱۴.۵ فاصلهٔ $\bar{z}$ از رأس مخروط دایره‌ای تا مرکز هندسی حجم آن را تعیین کنید.



شکل م ۱۴.۵

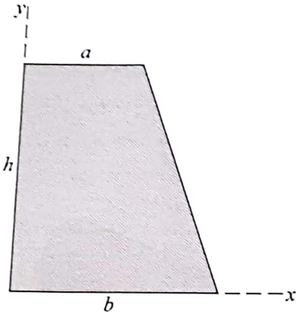
مسائل برگزیده

۱۵.۵ مختصات مرکز هندسی ناحیهٔ سایه‌خورده را معین کنید.



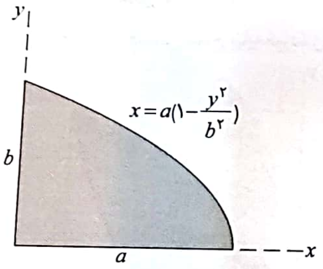
شکل م ۱۵.۵

۱۶.۵ مختصات x و y را برای مرکز هندسی سطح ذوزنقه‌ای زیر تعیین کنید.



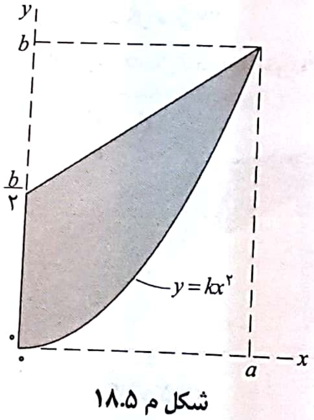
شکل م ۱۶.۵

۱۷.۵ مختصات مرکز هندسی ناحیهٔ سایه‌خورده را معین کنید.



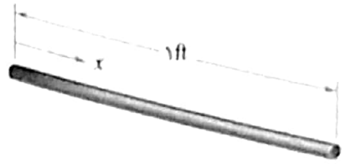
شکل م ۱۷.۵

۱۸.۵ مختصات مرکز هندسی ناحیهٔ سایه‌خورده را معین کنید.



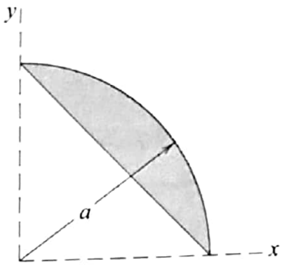
شکل م ۱۸.۵

۱۹.۵ مقدار جرم بر یکای سطح میلهٔ نازک زیر برحسب مکان طبق رابطهٔ $\rho = \rho_0(1 - x/2)$ تغییر می‌کند، که در آن x به فوت است. مکان مرکز جرم میله را تعیین نمایید.



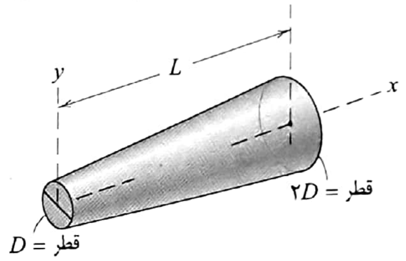
شکل م ۱۹.۵

۲۰.۵ مختصات مرکز هندسی قسمتی از یک دایره را که در شکل زیر نشان داده شده، معین کنید.



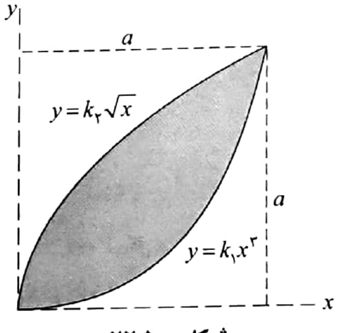
شکل م ۲۰.۵

۲۱.۵ مختصهٔ x را برای مرکز جرم میلهٔ فولادی مخروطی شکل زیر به‌طول L که قطر آن در انتهای بزرگتر آن دو برابر قطر انتهای کوچکتر است، تعیین کنید.



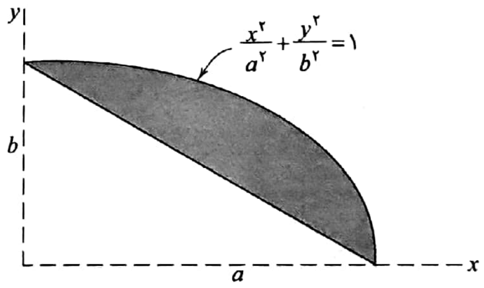
شکل م ۲۱.۵

۲۲.۵ مختصات x و y را برای مرکز هندسی سطح سایه‌خوردهٔ زیر تعیین کنید.



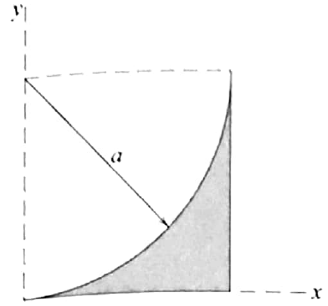
شکل م ۲۲.۵

۲۳.۵ مختصات x و y را برای مرکز هندسی سطح سایه‌خوردهٔ زیر تعیین کنید.



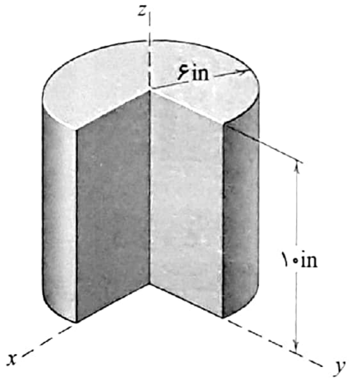
شکل م ۲۳.۵

۲۴.۵ مکان مرکز هندسی سطح نشان داده در شکل را به‌کمک انتگرال‌گیری به‌دست آورید. (توجه: به علامت جبری درست رادیکال موجود در محاسبات دقت کنید.)



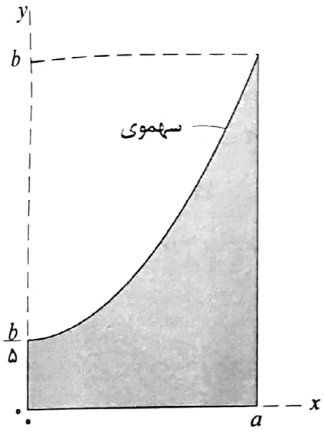
شکل م ۲۴.۵

۲۵.۵ از نتایج مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۵ استفاده کرده و مختصات مرکز جرم قسمتی از یک استوانهٔ همگن توپر به شکل زیر را به‌دست آورید.



شکل م ۲۵.۵

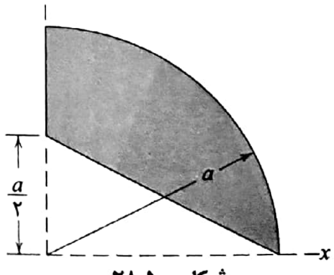
۲۶.۵ مختصهٔ y را برای مرکز هندسی سطح سایه‌خوردهٔ زیر تعیین کنید.



شکل م ۲۶.۵

۲۷.۵ اگر سطح سایه‌خوردهٔ مسئلهٔ ۲۶.۵ به مقدار °۳۶۰ حول محور y دوران کند، مختصهٔ y از مرکز هندسی حجم حاصل شده را به‌دست آورید.

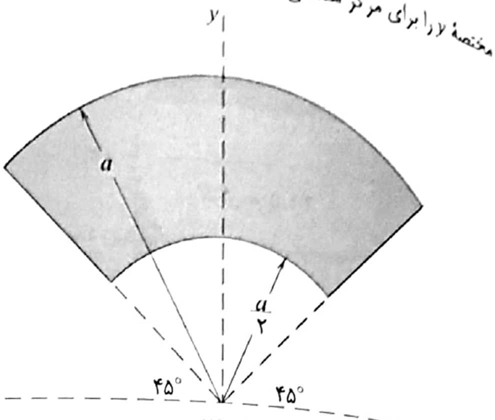
۲۸.۵ مختصات x و y را برای مرکز هندسی سطح سایه‌خوردهٔ زیر تعیین کنید.



شکل م ۲۸.۵

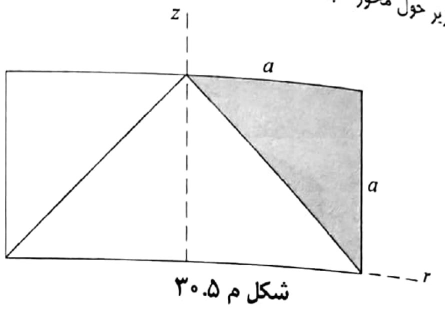
Scanned by CamScanner

۲۹.۵ مختصهٔ y را برای مرکز هندسی سطح سایه‌خوردهٔ زیر تعیین کنید.



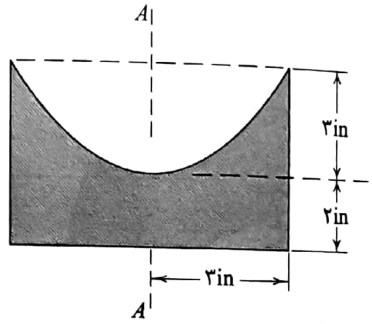
شکل م ۲۹.۵

۳۰.۵ مختصهٔ z را برای مرکز هندسی حجم به‌وجود آمده به‌وسیلهٔ دوران ناحیهٔ سایه‌خوردهٔ زیر حول محور z با اندازهٔ $360°$ به‌دست آورید.



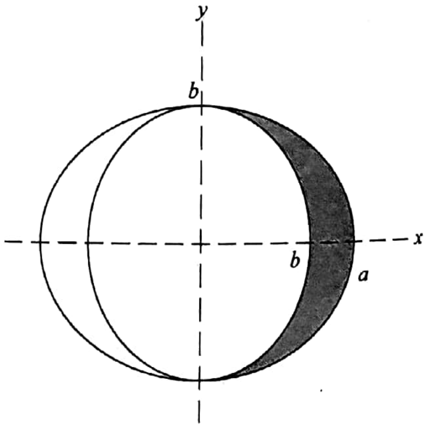
شکل م ۳۰.۵

۳۱.۵ شکل نشان داده شده یک ورق آهنی مسطح و متقارن نسبت به خط AA را نشان می‌دهد که مرز بالایی آن به شکل سهمی است. مختصات را انتخاب کرده و فاصلهٔ $\bar{h}$ میان رأس و مرکز گرانی جسم را به‌دست آورید.



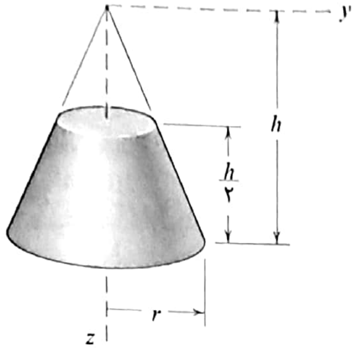
شکل م ۳۱.۵

۳۲.۵ مرکز هندسی محدودهٔ سایه‌خوردهٔ میان بیضی و دایره را معین کنید.



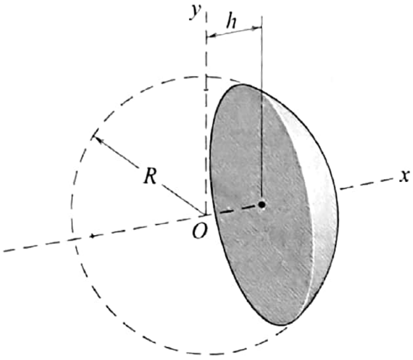
شکل م ۳۲.۵

۳۳.۵ فاصلهٔ $\bar{h}$ میان رأس و مرکز هندسی حجم مخروط ناقص نشان داده شده را به‌دست آورید.



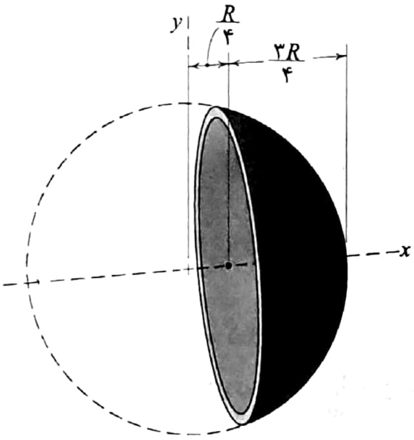
شکل م ۳۳.۵

۳۴.۵ مختصهٔ x از مرکز هندسی قسمتی از کره را که در شکل نشان داده شده، به‌دست آورید. نتیجهٔ خود را با مقادیر $h = R/4$ و $h = 0$ ارزیابی کنید.



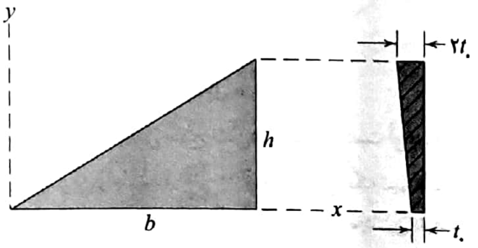
شکل م ۳۴.۵

۳۵.۵ مختصهٔ x از مرکز جرم بخشی از پوستهٔ کروی همگن با ضخامت کم را تعیین کنید.



شکل م ۳۵.۵

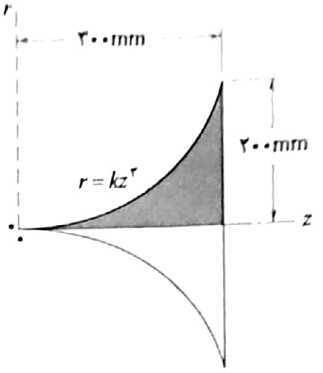
۳۶.۵ ضخامت صفحهٔ مثلثی به‌صورت خطی برحسب y از مقدار $t_{.}$ در امتداد قاعدهٔ آن در $y = 0$ تا $2t_{.}$ در $y = h$ تغییر می‌کند. مختصهٔ y مرکز جرم صفحه را تعیین کنید.



شکل م ۳۶.۵

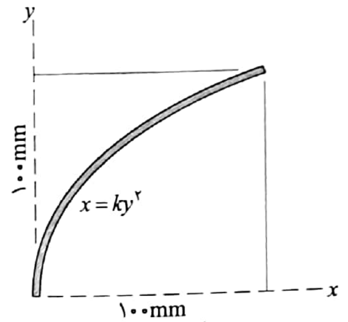
Scanned by CamScanner

۳۷.۵ مرکز جرم جسم همگنی را تعیین کنید که با دوران سطح سایه‌خورده به مقدار ۳۶۰° حول محور z حاصل می‌شود.



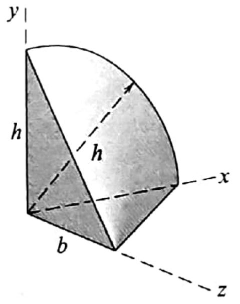
شکل م ۳۷.۵

۳۸.۵ میلهٔ باریک همگن زیر دارای سطح مقطع ثابت بوده و همانند شکل خم شده است. مختصهٔ y از مرکز جرم میله را تعیین کنید. (*یادآوری*: طول یک منحنی دیفرانسیلی برابر است با $dL = \sqrt{(dx)^۲ + (dy)^۲} = \sqrt{۱ + (dx/dy)^۲}\, dy$.)



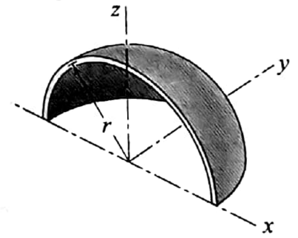
شکل م ۳۸.۵

۳۹.۵ مختصهٔ y از مرکز هندسی حجم تشکیل شده به‌وسیلهٔ دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ سایه‌خورده حول محور z به اندازهٔ ۹۰° را به‌دست آورید.



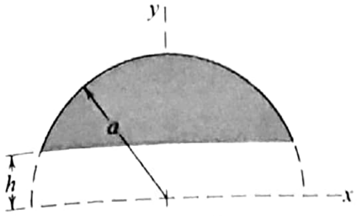
شکل م ۳۹.۵

◂ **۴۰.۵** مختصهٔ z از مرکز جرم پوستهٔ ربع کروی با شعاع r را تعیین کنید.



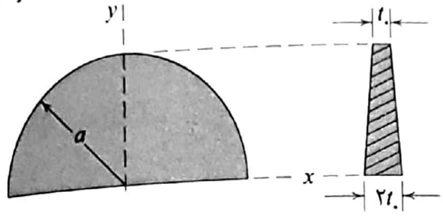
شکل م ۴۰.۵

◂ **۴۱.۵** مختصهٔ y از مرکز هندسی سطح نشان‌داده‌شده را به‌دست آورید. $h = ۰$ را در نتیجهٔ خود جایگذاری کنید و آن را با نتیجهٔ $\overline{y} = \frac{۴a}{۳\pi}$ برای سطح یک نیم دایرهٔ کامل مقایسه کنید (به مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۵ و جدول د.۳ نگاه کنید). همچنین نتیجهٔ خود را برای حالات $h = \frac{a}{۴}$ و $h = \frac{a}{۲}$ بررسی کنید.



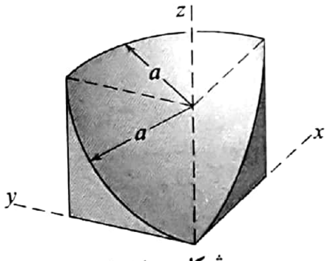
شکل م ۴۱.۵

◂ **۴۲.۵** ضخامت صفحهٔ نیم‌دایره‌ای به‌صورت خطی برحسب y، از مقدار $۲t_۰$ در امتداد قاعدهٔ آن در $y = ۰$، تا $t_۰$ در $y = a$ تغییر می‌کند. مختصهٔ y مرکز جرم صفحه را تعیین کنید.



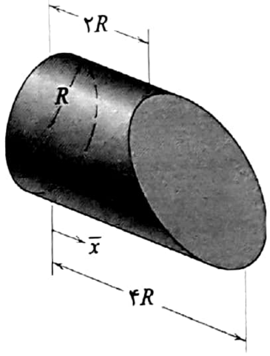
شکل م ۴۲.۵

◂ **۴۳.۵** مختصات مرکز هندسی حجم حاصل شده به‌وسیلهٔ دوران سطح سایه‌خورده حول محور z به مقدار ۹۰° را تعیین کنید.



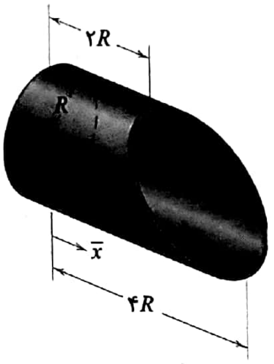
شکل م ۴۳.۵

◂ **۴۴.۵** مختصهٔ x از مرکز جرم جسم توپر همگن زیر را تعیین کنید.



شکل م ۴۴.۵

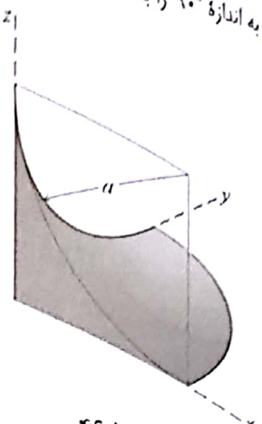
◂ **۴۵.۵** مختصهٔ x از مرکز جرم پوستهٔ استوانه‌ای نشان داده شده با ضخامت ثابت و کوچک را تعیین کنید.



شکل م ۴۵.۵

Scanned by CamScanner

...های گنبده ... حجم به‌وجود آمده به‌وسیلهٔ دوران سطح
... خورده حول محور z به اندازهٔ ۹۰° را به‌دست آورید. ... ۴۶.۵ مختصات x و y از مرکز هندسی



شکل م ۴۶.۵

۴.۵ اجسام و شکل‌های مرکب: تقریب‌ها

هرگاه بتوان یک شکل یا جسم را به چند قسمت تقسیم کرد که مرکز جرم آن به ... قابل محاسبه باشد، از اصل گشتاورها استفاده کرده و هر قسمت را به‌عنوان جزئی از کل جسم فرض می‌کنیم. چنین جسمی در شکل ۱۳.۵ نشان داده شده ... قسمت‌های آن دارای جرم های $m_۱$، $m_۲$ و $m_۳$ می‌باشند و مرکز جرم آنها در راستای x به ترتیب $\bar{x}_۱$، $\bar{x}_۲$ و $\bar{x}_۳$اند. با توجه به اصل گشتاورها

$$(m_۱+m_۲+m_۳)\bar{X}=m_۱\bar{x}_۱+m_۲\bar{x}_۲+m_۳\bar{x}_۳$$

که در آن $\bar{X}$ همان مختصات x از مرکز جرم کل جسم می‌باشد. مشابه این روابط برای دو راستای مختصات دیگر نیز برقرار است.

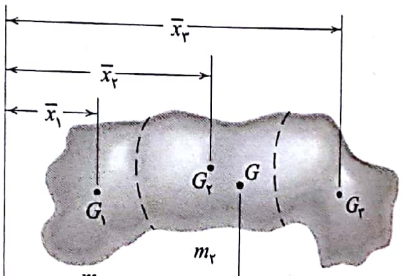
به‌طور کلی برای یک جسم با هر تعداد قسمت، می‌توان مختصات مرکز جرم آن را به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$\bar{X}=\frac{\Sigma m\bar{x}}{\Sigma m}\qquad \bar{Y}=\frac{\Sigma m\bar{y}}{\Sigma m}\qquad \bar{Z}=\frac{\Sigma m\bar{z}}{\Sigma m}\qquad (۷۵)$$

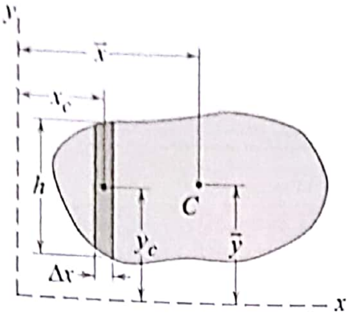
مشابه این روابط برای خطوط، سطوح و حجم‌های مرکب برقرار است که در آنها mها به ترتیب به‌وسیلهٔ Lها، Aها و Vها جایگزین می‌شود. دقت کنید که حفره یا فرورفتگی به‌عنوان یکی از قسمت‌های یک جسم یا شکل مرکب شمرده می‌شود که البته جرم مربوط به آن حفره یا فرورفتگی با علامت منفی در نظر گرفته می‌شود.

یک روش تقریبی

در عمل ممکن است که قادر به بیان یک سطح یا حجم برحسب شکل‌های هندسی ساده یا شکل‌های با معادلات معلوم نباشیم. برای چنین حالت‌هایی، از روشی به نام تقریب استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال، فرض کنید که می‌خواهیم



شکل ۱۳.۵



شکل ۱۴.۵

مرکز هندسی C را برای سطح نامنظم نشان داده شده در شکل ۱۴.۵ تعیین کنیم. سطح مورد نظر را به نوارهایی به عرض و ارتفاع متغیر h تقسیم می‌کنیم. سطح A از هر نوار، که در شکل با سایهٔ تیره‌تر نشان داده شده است، برابر با $h\Delta x$ است و در مختصات x_c و y_c از مرکز هندسی آن ضرب می‌شود تا گشتاورهای جزء سطح آن به‌دست آید. مجموع تمام گشتاورهای نوارها، تقسیم بر مجموع سطح این نوارها، مختصات مرکز هندسی متناظر را نتیجه می‌دهد. با استفاده از یک جدول‌بندی منظم نتایج، می‌توان یک تخمین منظم از مجموع سطوح ΣA، حاصل‌جمع‌های ΣAx_c و ΣAy_c و مختصات مراکز هندسی به‌دست آورد

$$\bar{x}=\frac{\Sigma Ax_c}{\Sigma A}\qquad \bar{y}=\frac{\Sigma Ay_c}{\Sigma A}$$

می‌توانیم دقت این تقریب را با کاهش عرض نوارها، افزایش دهیم. در هر حالت، میانگین ارتفاع نوارها را می‌توان با تقریب زدن در سطوح، تخمین زد. با اینکه عموماً بهتر است که از اجزایی با عرض‌های مساوی استفاده شود، اجباری در آن نیست. در واقع می‌توانیم از هر شکل و با هر اندازه‌ای استفاده کنیم تا تقریب سطح‌مان را به‌دقت مورد نظر برسانیم.

حجم‌های نامنظم

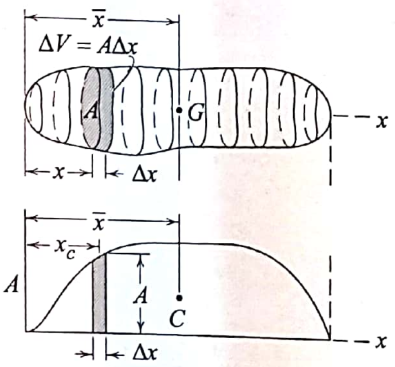
برای پیدا کردن مرکز هندسی یک حجم نامنظم، مسئله را به تعیین مرکز هندسی یک سطح تبدیل می‌کنیم. حجم نشان داده شده در شکل ۱۵.۵ را در نظر بگیرید که در آن نمودار A، مساحت مقطع عمود بر محور x است. سطح زیر منحنی برای هر یک از نوارها برابر با $A\Delta x$ است که معادل با حجم ΔV از جزء متناظر با آن است. لذا سطح زیر منحنی نشان‌دهندهٔ حجم جسم است و مختصات x از مرکز هندسی سطح زیر منحنی نمودار از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\bar{x}=\frac{\Sigma(A\ \Delta x)x_c}{\Sigma A\ \Delta x}$$

که برابر است با

$$\bar{x}=\frac{\Sigma Vx_c}{\Sigma V}$$

که همان مرکز هندسی حجم اصلی است.

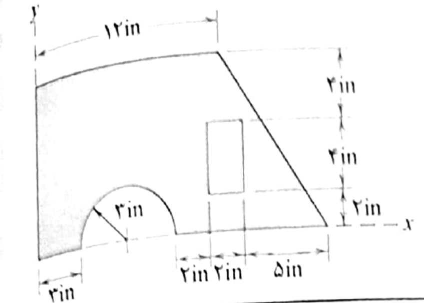


شکل ۱۵.۵

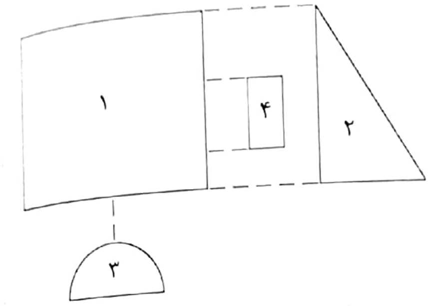
Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۶.۵

مرکز هندسی سطح سایه‌خورده را به‌دست آورید.



حل: سطح مرکب به چهار شکل هندسی ساده که در شکل پایینی نشان داده شده تقسیم می‌شود. مکان مرکز هندسی هریک از این شکل‌ها را می‌توانید با استفاده از جدول د.۳ در پیوست‌ها به‌دست آورید. دقت کنید که سطوح متناظر با حفره‌ها (قسمت‌های ۳ و ۴) در جدول، منفی فرض شده‌اند:



قسمت	A, in^2	$\bar{x}, in$	$\bar{y}, in$	$\bar{x}A, in^3$	$\bar{y}A, in^3$
۱	۱۲۰	۶	۵	۷۲۰	۶۰۰
۲	۳۰	۱۴	۱۰٫۳	۴۲۰	۱۰۰
۳	−۱۴٫۱۴	۶	۱٫۲۷۳	−۸۴٫۸	−۱۸
۴	−۸	۱۲	۴	−۹۶	−۳۲
مجموع	۱۲۷٫۹			۹۵۹	۶۵۰

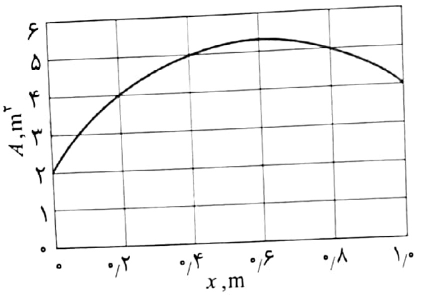
حال می‌توانیم از معادلات (۷.۵) استفاده کنیم

ج. $\bar{X} = \frac{۹۵۹}{۱۲۷٫۹} = ۷٫۵۰\ \text{in}$ $\left[\bar{X} = \frac{\Sigma A\bar{x}}{\Sigma A}\right]$

ج. $\bar{Y} = \frac{۶۵۰}{۱۲۷٫۹} = ۵٫۰۸\ \text{in}$ $\left[\bar{Y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A}\right]$

مسئلهٔ نمونهٔ ۷.۵

مختصهٔ x از مرکز هندسی حجم یک جسم با طول ۱m و سطح مقطع متغیر را به‌صورت نشان داده شده در شکل تقریب بزنید.



حل: جسم به پنج قسمت تقسیم می‌شود. برای هر قسمت سطح میانگین، حجم و مکان مرکز هندسی در جدول زیر نشان داده شده‌اند:

فاصله	A_{av}, m^2	(حجم V)$, m^3$	$\bar{x}, m$	$V\bar{x}, m^4$
۰−۰٫۲	۳	۰٫۶	۰٫۱	۰٫۰۶۰
۰٫۲−۰٫۴	۴٫۵	۰٫۹۰	۰٫۳	۰٫۲۷۰
۰٫۴−۰٫۶	۵٫۲	۱٫۰۴	۰٫۵	۰٫۵۲۰
۰٫۶−۰٫۸	۵٫۲	۱٫۰۴	۰٫۷	۰٫۷۲۸
۰٫۸−۱٫۰	۴٫۵	۰٫۹۰	۰٫۹	۰٫۸۱۰
مجموع		۴٫۴۸		۲٫۳۸۸

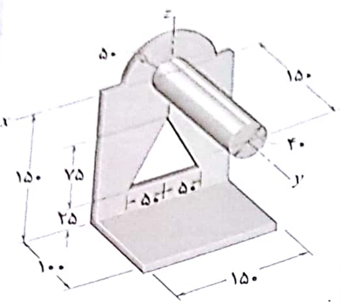
➊ ج. $\bar{X} = \frac{۲٫۳۸۸}{۴٫۴۸} = ۰٫۵۳۳\ \text{m}$ $\left[\bar{X} = \frac{\Sigma V\bar{x}}{\Sigma V}\right]$

راهنمایی مفید

➊ دقت کنید که شکل این جسم به‌صورت تابعی از y بوده و z در $\bar{X}$ تأثیری نمی‌گذارد.

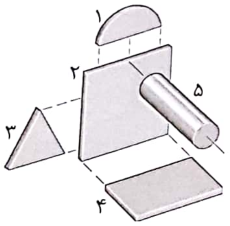
Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۸.۵ مرکز جرم مجموعهٔ دیوارکوب و میل‌گردان نشان داده شده را تعیین کنید. سطح عمودی از ورق لبه‌ای ساخته شده که جرمی معادل $۲۵\,kg/m^2$ دارد. قسمت افقی از ماده‌ای به جرم $۴۰\,kg/m^2$ ساخته شده است و میل‌گردان فولادی چگالی معادل با $۷٫۸۳\,Mg/m^3$ دارد.



ابعاد برحسب میلیمتر

حل: جسم مرکب را می‌توان از ترکیب پنج قسمت نشان‌داده‌شده در شکل پایینی در نظر گرفت. قسمت مثلثی به‌عنوان جرم منفی در نظر گرفته خواهد شد. با توجه به مختصات در نظر گرفته شده و تقارن، واضح است که مختصات x از مرکز جرم برابر صفر است.



جرم m برای هر قسمت به راحتی قابل محاسبه است و نیاز به توضیح بیشتر ندارد. برای قسمت ۱، با استفاده از مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۵ می‌دانیم

$$\bar{z} = \frac{۴r}{۳\pi} = \frac{۴(۵۰)}{۳\pi} = ۲۱٫۲\ \text{mm}$$

برای قسمت ۳، از مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۵ داشتیم که مرکز هندسی یک جرم مثلثی شکل در فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع از قاعدهٔ آن قرار دارد. با اندازه‌گیری نسبت به محورهای مختصات خواهیم داشت

$$\bar{z} = -\left[۱۵۰ - ۲۵ - \frac{۱}{۳}(۷۵)\right] = -۱۰۰\ \text{mm}$$

مختصات y و z از مراکز جرم قسمت‌های باقی‌مانده به‌راحتی با بررسی قابل تعیین است. جملات مورد نیاز برای استفاده در معادلات (۷.۵) در جدول زیر محاسبه شده‌اند:

قسمت	m kg	$\bar{y}$, mm	$\bar{z}$, mm	$m\bar{y}$, kg·m	$m\bar{z}$, kg·mm
۱	۰٫۰۹۸	۰	۲۱٫۲	۰	۲٫۰۸
۲	۰٫۵۶۲	۰	−۷۵٫۰	۰	−۴۲٫۱۹
۳	−۰٫۰۹۴	۰	−۱۰۰٫۰	۰	۹٫۳۸
۴	۰٫۶۰۰	۵۰٫۰	−۱۵۰٫۰	۳۰٫۰	−۹۰٫۰۰
۵	۱٫۴۷۶	۷۵٫۰	۰	۱۱۰٫۷	۰
مجموع	۲٫۶۴۲			۱۴۰٫۷	−۱۲۰٫۷۳

حال با استفاده از معادلات (۷.۵) خواهیم داشت

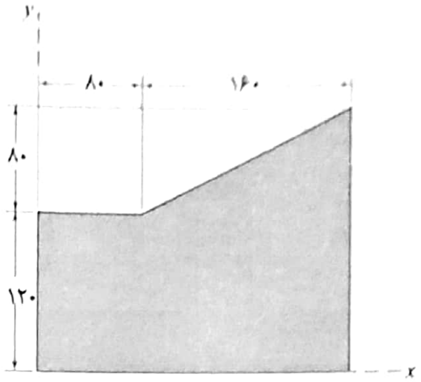
ج. $\bar{Y} = \frac{۱۴۰٫۷}{۲٫۶۴۲} = ۵۳٫۳\ \text{mm}$ $\left[\bar{Y} = \frac{\Sigma m\bar{y}}{\Sigma m}\right]$

ج. $\bar{Z} = \frac{-۱۲۰٫۷۳}{۲٫۶۴۲} = -۴۵٫۷\ \text{mm}$ $\left[\bar{Z} = \frac{\Sigma m\bar{z}}{\Sigma m}\right]$

مسائل

مسائل مقدماتی

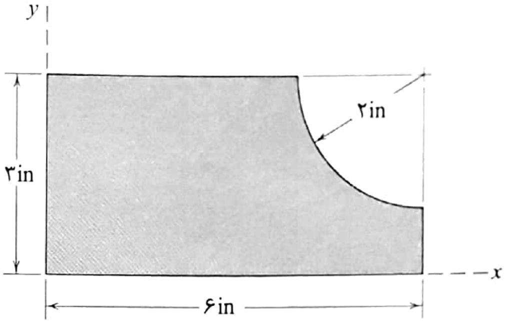
۴۷.۵ مختصات x و y از مرکز هندسی سطح سایه‌خورده را به‌دست آورید.



ابعاد برحسب میلیمتر

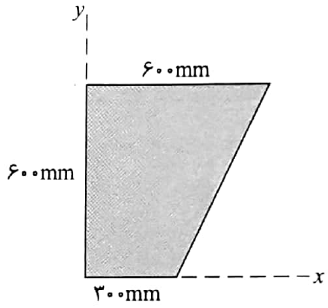
شکل م ۴۷.۵

۴۸.۵ مختصات مرکز هندسی سطح سایه‌خورده را تعیین کنید.



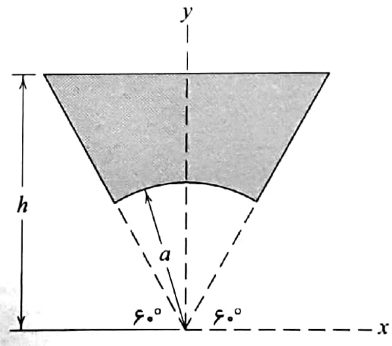
شکل م ۴۸.۵

۴۹.۵ مختصات مرکز هندسی سطح ذوزنقه‌ای سایه‌خورده را تعیین کنید.



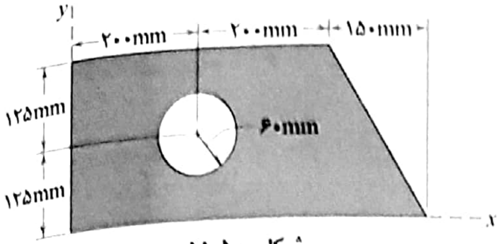
شکل م ۴۹.۵

۵۰.۵ مختصهٔ y از مرکز هندسی سطح سایه‌خورده را تعیین کنید.



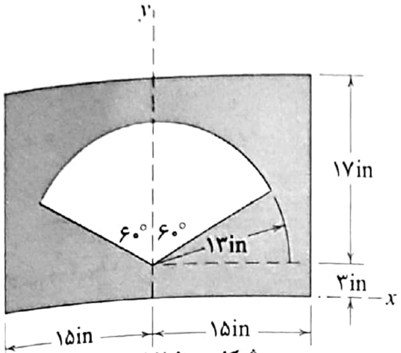
شکل م ۵۰.۵

۵۱.۵ مختصات مرکز هندسی سطح سایه‌خورده را تعیین کنید.



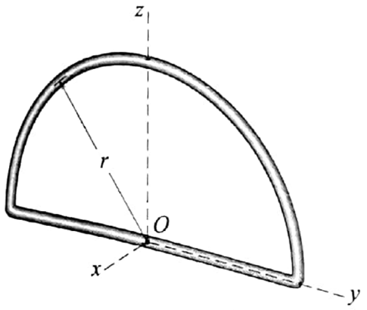
شکل م ۵۱.۵

۵۲.۵ مختصهٔ y از مرکز هندسی سطح سایه‌خورده را تعیین کنید.



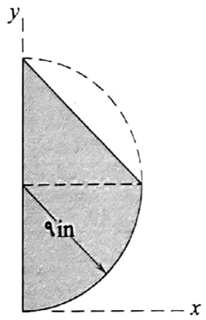
شکل م ۵۲.۵

۵۳.۵ مختصات x، y و z از مرکز جرم جسم ساخته شده از میلهٔ باریک یکنواخت را به‌دست آورید.



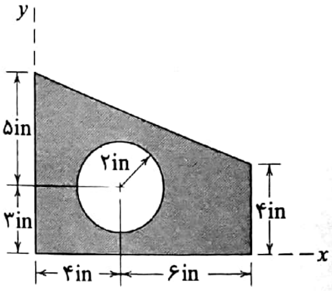
شکل م ۵۳.۵

۵۴.۵ مختصات x و y از مرکز هندسی سطح سایه‌خورده را به‌دست آورید.



شکل م ۵۴.۵

۵۵.۵ مختصات x و y از مرکز هندسی سطح سایه‌خورده را به‌دست آورید.

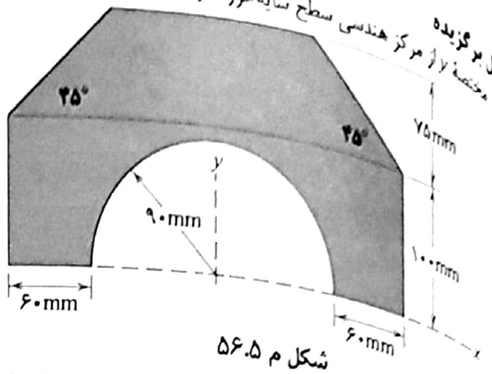


شکل م ۵۵.۵

Scanned by CamScanner

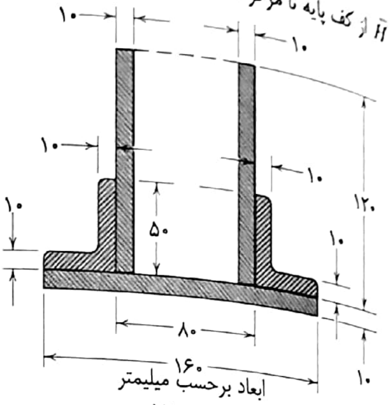
مسائل برگزیده

۵۶.۵ مختصهٔ y از مرکز هندسی سطح سایه‌خورده را تعیین کنید.



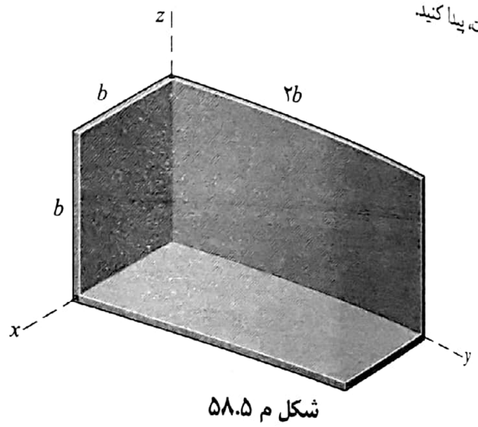
شکل م ۵۶.۵

۵۷.۵ فاصلهٔ $\bar{H}$ از کف پایه تا مرکز هندسی مقطع سازهٔ نشان‌داده‌شده را پیدا کنید.



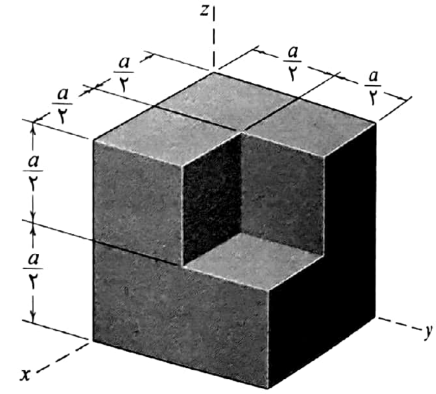
شکل م ۵۷.۵

۵۸.۵ مختصات مرکز جرم جسم زیر را که شامل سه ورقهٔ نازک به‌هم جوش داده شده است، پیدا کنید.



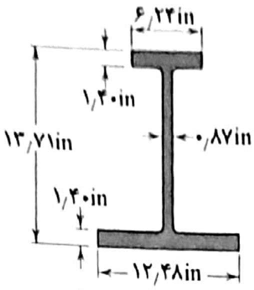
شکل م ۵۸.۵

۵۹.۵ مختصات مرکز جرم جسم همگن زیر را پیدا کنید.



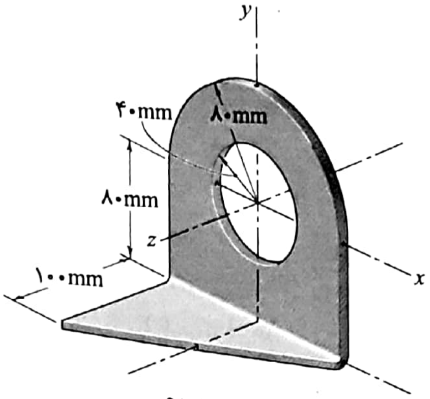
شکل م ۵۹.۵

۶۰.۵ ارتفاع مرکز هندسی سطح مقطع تیر را از قاعدهٔ آن تعیین کنید. از انحنای جوش صرف‌نظر کنید.



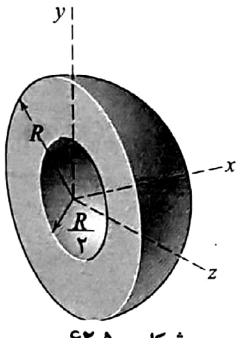
شکل م ۶۰.۵

۶۱.۵ مختصات مرکز جرم دیوارکوب زیر را که از ورق فلزی با ضخامت یکنواخت ساخته شده، تعیین کنید.



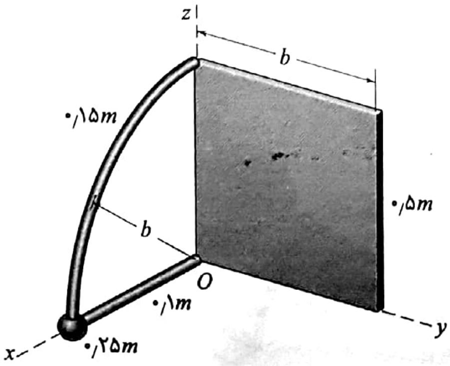
شکل م ۶۱.۵

۶۲.۵ مختصهٔ x از مرکز جرم نیم‌کرهٔ همگنی را که نیم‌کرهٔ کوچکتری از داخل آن برداشته شده است، تعیین کنید.



شکل م ۶۲.۵

۶۳.۵ مختصات مرکز جرم جسم زیر، ساخته شده از یک صفحهٔ مربعی یکنواخت، یک میلهٔ مستقیم یکنواخت، یک میلهٔ ربع دایره‌ای یکنواخت و یک ذره (با ابعاد قابل صرف‌نظر) را به‌دست آورید. جرم هر قسمت در شکل داده شده است.

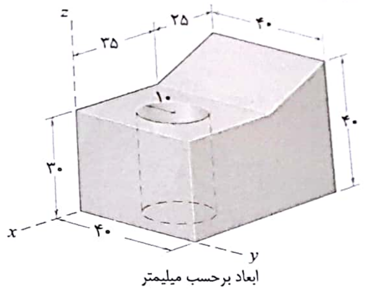


شکل م ۶۳.۵

۶۴.۵ مکان مرکز جرم پوستهٔ استوانه‌ای با انتهای بسته را معین کنید. پوسته از ورق آهنی با چگالی جرم $24\ kg/m^2$ ساخته شده است و جنس انتهای آن از ورق آهنی با چگالی جرم $36\ kg/m^2$ می‌باشد.

شکل م ۶۴.۵

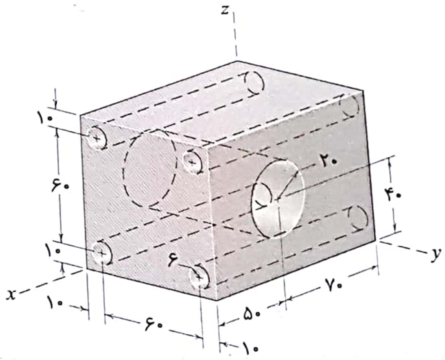
۶۵.۵ مختصات مرکز جرم جسم همگن زیر را به‌دست آورید. حفره در مرکز سطح افقی بالایی قرار دارد.



ابعاد برحسب میلیمتر

شکل م ۶۵.۵

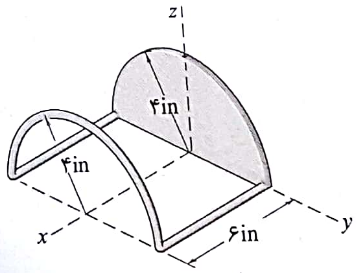
۶۶.۵ مختصات مرکز هندسی جسم زیر که پنج سوراخ در آن ایجاد شده را به‌دست آورید. سوراخ‌ها در سراسر جسم امتداد دارد و شعاع هر سوراخ کوچک ۶mm است.



ابعاد برحسب میلیمتر

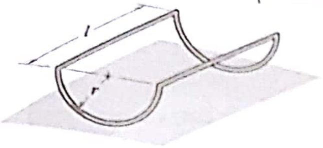
شکل م ۶۶.۵

۶۷.۵ سازهٔ جوش داده شده از یک میلهٔ یکنواخت که وزن هر فوت آن ۰٫۳۷۰ lb است و یک ورق نیم‌دایره‌ای ساخته شده که وزن هر فوت مربع آن ۸ lb است. مختصات مرکز گرانی سازه را معین کنید.



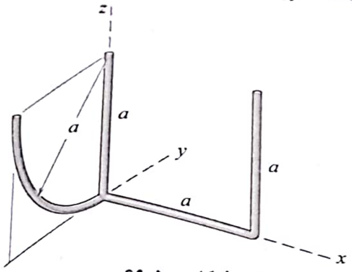
شکل م ۶۷.۵

۶۸.۵ سازهٔ زیر از یک میلهٔ یکنواخت تشکیل شده است. برای چه مقداری از طول l مرکز جرم جسم در فاصلهٔ $\frac{3r}{2}$ از فاصلهٔ سطح تحتانی قرار می‌گیرد؟



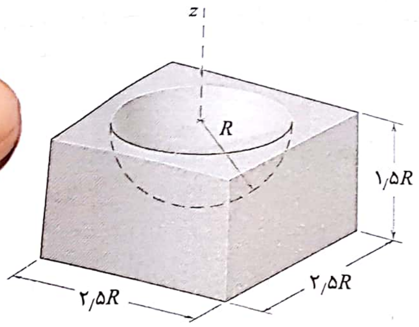
شکل م ۶۸.۵

۶۹.۵ مختصات مرکز جرم جسم زیر را، که از میله‌های هم‌جنس باریک و یکنواخت ساخته شده است، به‌دست آورید.



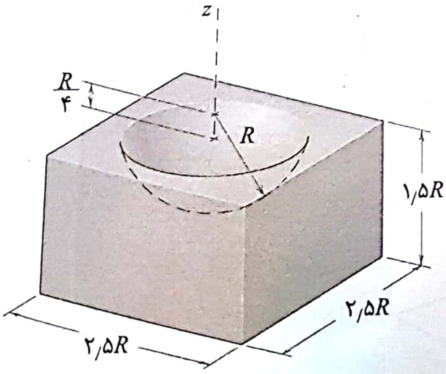
شکل م ۶۹.۵

۷۰.۵ مختصات z از مرکز هندسی جسم مکعب مستطیلی زیر با یک حفرهٔ نیم‌کروی را به‌دست آورید. مرکز نیم‌کره بر مرکز وجه فوقانی جسم منطبق بوده و z نسبت به وجه تحتانی آن سنجیده می‌شود.



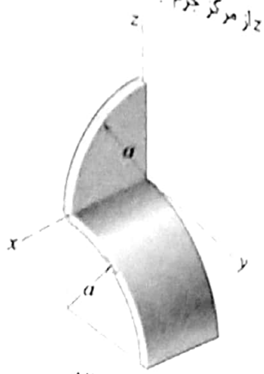
شکل م ۷۰.۵

۷۱.۵ مختصات z از مرکز هندسی جسم مکعب مستطیلی توپر با یک حفره را که بخشی از یک کره (کوچکتر از نیم‌کره) است، محاسبه کنید. مرکز کره‌ای که حفره را کامل می‌کند، به فاصلهٔ $R/4$ در بالای مرکز وجه بالایی جسم قرار داشته و z نسبت به وجه تحتانی سنجیده می‌شود. به نتایج مسئلهٔ ۳۴.۵ مراجعه کنید.



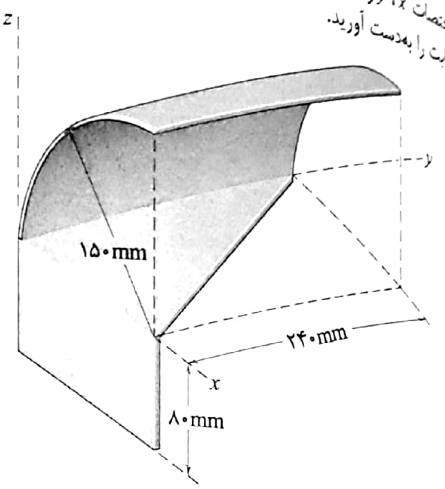
شکل م ۷۱.۵

۷۲.۵ مختصات x، y و z از مرکز جرم جسم ساخته شده از ورق فلزی را به‌دست آورید.



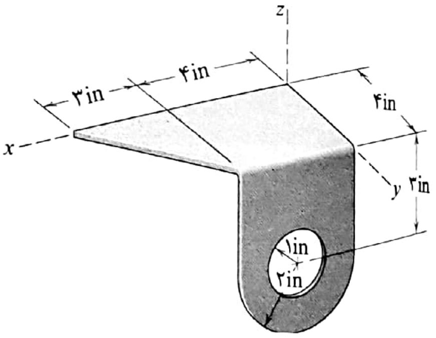
شکل م ۷۲.۵

۷۳.۵ مختصات x، y و z از مرکز جرم جسم ساخته شده از صفحهٔ آلومینیم با ضخامت ثابت را به‌دست آورید.



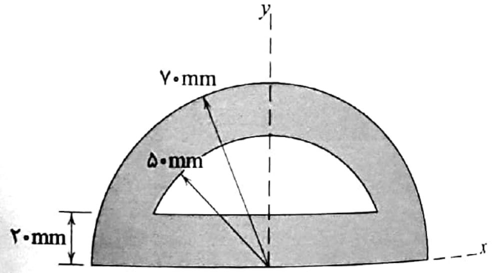
شکل م ۷۳.۵

۷۴.۵ مختصات دیوارکوب زیر را، که از ورق‌های آهنی با ضخامت یکنواخت است، تعیین کنید.



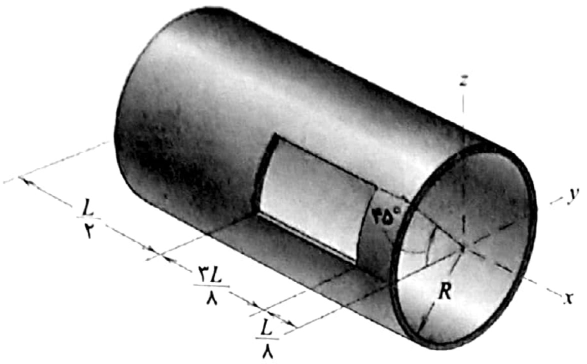
شکل م ۷۴.۵

۷۵.۵ مختصهٔ y از مرکز هندسی سطح سایه‌خورده را تعیین کنید. (*راهنمایی*: به حل مسئلهٔ ۴۱.۵ مراجعه کنید.)



شکل م ۷۵.۵

۷۶.۵ قسمتی از یک پوستهٔ نازک استوانه‌ای، مانند شکل برداشته شده است. مختصات x، y و z از مرکز جرم جسم همگن را به‌دست آورید.

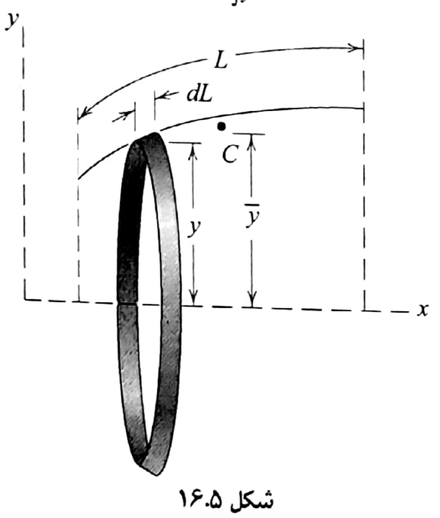


شکل م ۷۶.۵

۵.۵ قضیهٔ پاپوس[1]

روشی بسیار ساده برای محاسبهٔ سطح ساخته شده توسط دوران یک منحنی دوبُعدی حول یک محور نامتقاطع، در صفحهٔ منحنی وجود دارد. در شکل ۱۶.۵ پاره‌خطی با طول L در صفحهٔ x-y به هنگام چرخش حول محور x، سطحی را تولید می‌کند. جزء این سطح حلقهٔ ساخته شده به‌وسیلهٔ dL است. سطح این حلقه برابر با محیط آن ضربدر ارتفاع اریب آن یعنی $dA = ۲\pi y\,dL$ است. در این صورت سطح کلی برابر است با

$$A = ۲\pi \int y\,dL$$



شکل ۱۶.۵

با توجه به اینکه $\overline{y}L = \int y\,dL$، سطح برابر است با

$$A = ۲\pi \overline{y} L \qquad (۸.۵)$$

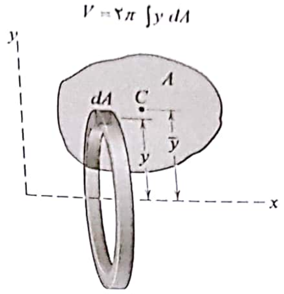
که $\overline{y}$ مختصات y از مرکز هندسی C برای پاره‌خطی با طول L است. بنابراین سطح تشکیل شده با سطح جانبی یک استوانهٔ دایره‌ای با طول L و شعاع $\overline{y}$ یکی است.

در مورد حجم حاصل از دوران یک سطح حول یک خط نامتقاطع و هم‌صفحه با آن، یک رابطهٔ مشابه و ساده برای تعیین حجم وجود دارد. یک جزء بی‌نهایت کوچک حجم تشکیل‌شده از دوران سطح A حول محور x، مانند شکل ۱۷.۵، یک

۱. این قضیه به پاپوس هندسه‌دان یونانی قرن سوم میلادی از اسکندریه، نسبت داده شده است. این قضیه معمولاً نام گولدینوس (پال گولدین، ۱۶۴۳_۱۵۷۷) را نیز در بر دارد که مدعی است، برای اولین بار این قانون را بیان کرده، که گویا از کارهای پاپوس در این زمینه باخبر بوده است.

جزء حلقوی با سطح مقطع dA و شعاع y می‌باشد. حجم جزء برابر با محیط آن ضربدر در dA یا $dV=2\pi y\,dA$ و حجم کل برابر است با

$$V=2\pi\int y\,dA$$



شکل ۱۷.۵

به‌دلیل این که $\overline{y}A=\int y\,dA$، حجم برابر خواهد شد با

$$V=2\pi\overline{y}A \qquad (۹.۵)$$

که $\overline{y}$ مختصات y از مرکز هندسی C سطح A دوران داده شده است. بنـابراین ما حجم تشکیل شده را از حاصلضـرب سـطح تشـکیل‌شـده در محـیط مسـیر دایره‌ای (که به‌وسیلهٔ مرکز هندسی آن مشخص می‌شود) به‌دست می‌آوریم.

دو قضیهٔ پاپوس، که با معادلات (۸.۵) و (۹.۵) بیان می‌شوند، برای به‌دسـت آوردن سطوح و حجم‌های حاصل از دوران استفاده می‌شـوند. همچنـین از ایـن قضایا برای یافتن مرکز هندسی منحنی‌های مسطح و سطوح تخت در مـواردی استفاده می‌شود که سطح یا حجم متناظر حاصل از دوران این شـکل‌هـا حـول محور غیرمتقاطع معلوم است. با تقسیم کردن سطح یا حجم، بر 2π برابر طول خط یا سطح صفحهٔ متناظر، فاصله از مرکز هندسی تا محور به‌دست خواهد آمد.

اگر خط یا سطحی با زاویهٔ θ کمتر از 2π دوران کند، می‌تـوانیم سـطح یا حجم حاصل را با جایگزین کردن 2π بـا θ در معـادلات (۸.۵) و (۹.۵)، تعیین کنیم. بنابرین روابط کلی برابرند با

$$A=\theta\overline{y}L$$

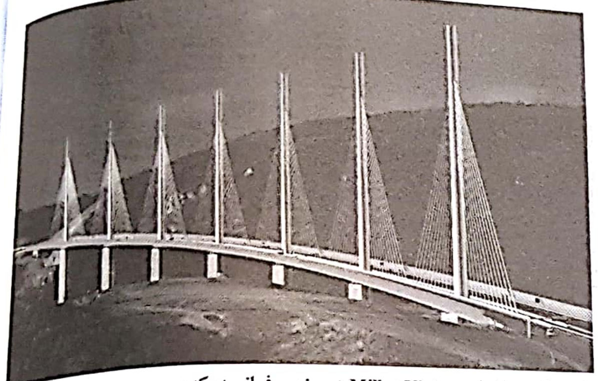
(۸.۵ الف)

و

$$V=\theta\overline{y}A$$

(۹.۵ الف)

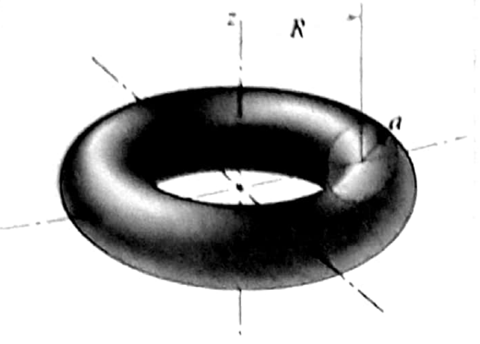
که در آن θ برحسب رادیان است.



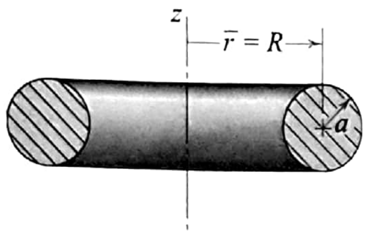
یک نمای دیگر از Millau Viaduct در جنوب فرانسه، که بر روی جلد کتاب نیز نمایش داده شده است. دقت کنید که ارتفاع کامل تیرها در اینجا نمایش داده نشده است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۹.۵

حجم V و سطح جانبی A از حلقهٔ نشان داده شده را به‌دست آورید.



حل: حلقه را می‌توان با دوران یک سطح دایره‌ای با شعاع a حول محور z بـا انـدازهٔ $360°$ به‌دست آورد. با استفاده از معادله (۹.۵ الف) داریم



$$V = \theta \bar{r} A = ۲\pi(R)(\pi a^۲) = ۲\pi^۲ R a^۲$$

به‌طور مشابه با استفاده از معادلهٔ (۸.۵ الف) خواهیم داشت ❶ ج.

$$A = \theta \bar{r} L = ۲\pi(R)(۲\pi a) = ۴\pi^۲ R a$$

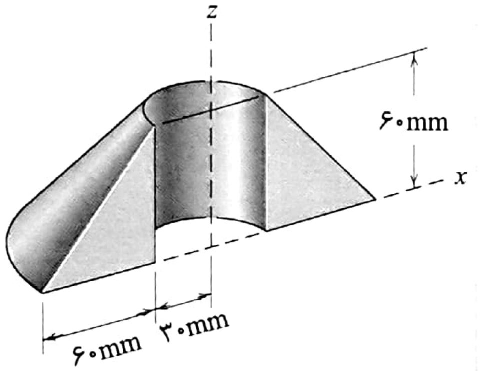
ج.

راهنمایی مفید

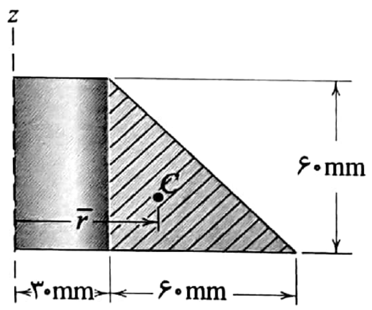
❶ دقت کنید که زاویهٔ دوران θ برای تشکیل حلقهٔ کامل ۲π است. این حالت خاص اما معمـولی، از معادلهٔ (۹.۵) به‌دست می‌آید.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰.۵

حجم V جسم تـوپُر حاصـل از دوران یـک سـطح مثلثـی قـائم‌الزاویـهٔ متسـاوی‌السـاقین، بـا طول ۶۰mm، حول محور z به اندازهٔ $۱۸۰°$ را به‌دست آورید. اگر جسم از جنس فولاد می‌بـود، جرم آن چقدر می‌شد؟



حل: با زاویهٔ دوران $\theta = ۱۸۰°$، و با استفاده از معادلهٔ (۹.۵ الف) خواهیم داشت



$$V = \theta \bar{r} A = \pi\left[۳۰ + \frac{۱}{۳}(۶۰)\right]\left[\frac{۱}{۲}(۶۰)(۶۰)\right] = ۲{,}۸۳(۱۰^۵)\ \text{mm}^۳$$ ❶ ج.

جرم جسم برابر خواهد بود با

$$m = \rho V = \left[۷۸۳۰\frac{\text{kg}}{\text{m}^۳}\right]\left[۲{,}۸۳(۱۰^۵)\text{mm}^۳\right]\left[\frac{۱\ \text{m}}{۱۰۰۰\ \text{mm}}\right]^۳$$
$$= ۲{,}۲۱\text{kg}$$ ج.

راهنمایی مفید

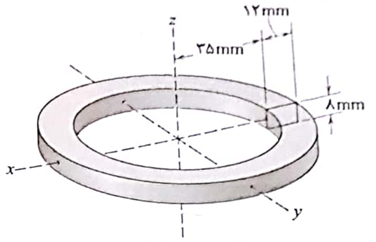
❶ دقت کنید که θ باید برحسب رادیان باشد.

Scanned by CamScanner

مسائل

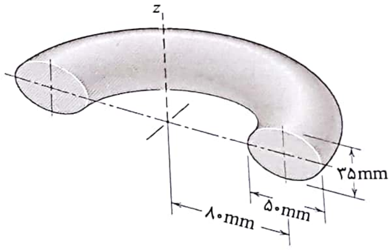
مسائل مقدماتی

۷۷.۵ با استفاده از روش‌های توضیح داده شده در این بخش، سطح A و حجم V را برای جسم حاصل از دوران یک سطح مستطیلی حول محور z به اندازهٔ 360° تعیین کنید.



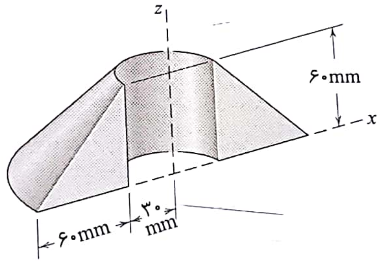
شکل م ۷۷.۵

۷۸.۵ حجم V جسم حاصل از دوران یک سطح بیضوی حول محور z به اندازهٔ 180° را معین کنید.



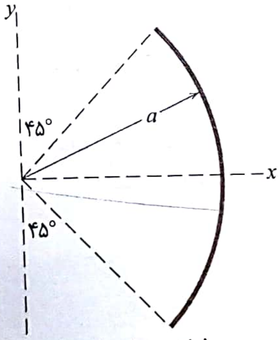
شکل م ۷۸.۵

۷۹.۵ حجم V جسم حاصل از دوران سطح مثلثی قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با ساق ۶۰mm حول محور z به اندازهٔ 180° را معین کنید.



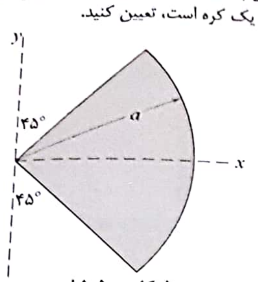
شکل م ۷۹.۵

۸۰.۵ منحنی دایره‌ای به اندازهٔ 360° حول محور y دوران می‌کند. S مساحت سطح خارجی جسم به‌وجود آمده را، که در حقیقت بخشی از یک پوستهٔ کروی است، به‌دست آورید.



شکل م ۸۰.۵

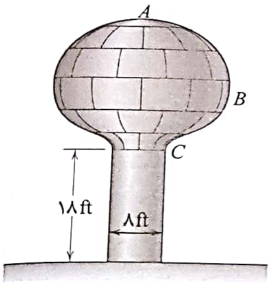
۸۱.۵ سطح ربع‌دایره‌ای به اندازهٔ 360° حول محور y دوران داده می‌شود. حجم جسم حاصل را، که قسمتی از یک کره است، تعیین کنید.



شکل م ۸۱.۵

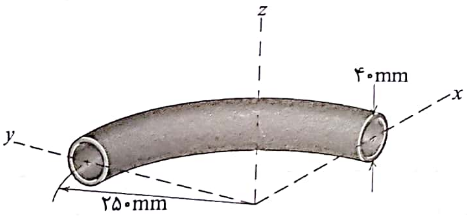
مسائل برگزیده

۸۲.۵ مخزن ذخیرهٔ آب زیر، یک پوستهٔ حاصل از دوران است و می‌خواهیم آن را دو دست رنگ بزنیم. هر گالن رنگ، $500 ft^2$ را پوشش می‌دهد. مهندسی که قصد این کار را دارد، از طرح مخزن استفاده کرده و طول خط منحنی ABC را برابر با ۳۴ft و مرکز هندسی آن را به فاصلهٔ ۸٫۲ft از خط مرکز مخزن تعیین می‌کند. چند گالن رنگ برای رنگ کردن مخزن به همراه ستون استوانه‌ای آن لازم خواهیم داشت؟



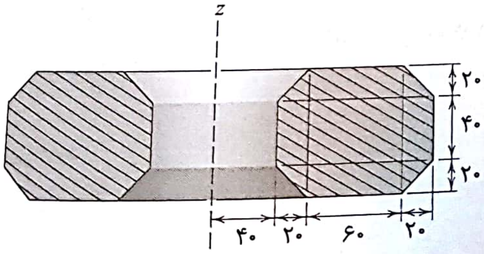
شکل م ۸۲.۵

۸۳.۵ جرم لولهٔ رادیاتوری به شکل ربع دایره را تعیین کنید. شعاع داخلی آن ۴۰mm، ضخامت دیوارهٔ آن ۴mm و چگالی مادهٔ سازنده آن $1050 kg/m^3$ می‌باشد.



شکل م ۸۳.۵

۸۴.۵ جسم نشان داده شده، سطح مقطع یک حلقهٔ دایره‌ای کامل است که از دوران یک سطح هشت‌ضلعی حول محور z شکل گرفته است. مساحت سطح جانبی آن را محاسبه کنید.



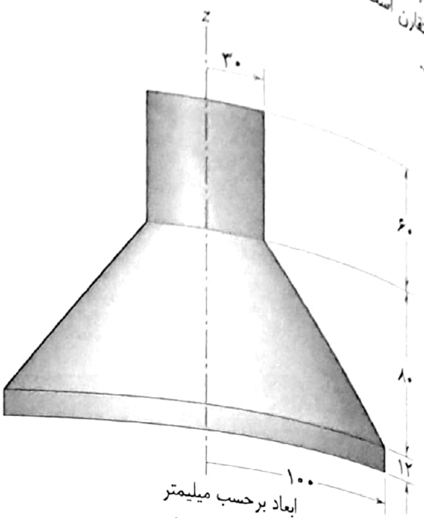
ابعاد برحسب میلیمتر

شکل م ۸۴.۵

Scanned by CamScanner

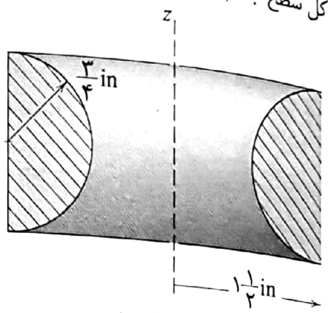
... های گسترده

۸۵.۵ کاسه‌چراغ نشان داده شده از فولاد با ضخامت ۰٫۶ mm ساخته شده و نسبت ... محور z متقارن است. انتهای بالایی و پایینی آن هر دو باز می‌باشند. جرم کاسه‌چراغ ... تعیین کنید.



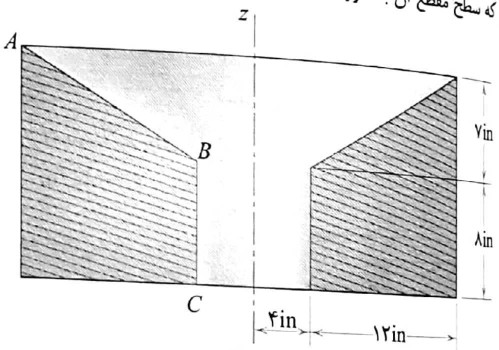
شکل م ۸۵.۵

۸۶.۵ حجم V جسم حلقوی کامل با مقطع نیم‌دایره‌ای نشان‌داده‌شده را حساب کنید. همچنین مساحت A کل سطح جسم را محاسبه کنید.



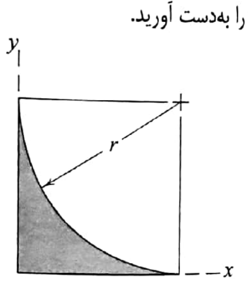
شکل م ۸۶.۵

۸۷.۵ مساحت سطح داخلی (تشکیل شده به‌وسیله دوران ABC حول محور z) را برای جسمی که سطح مقطع آن به‌صورت زیر است، به‌دست آورید.



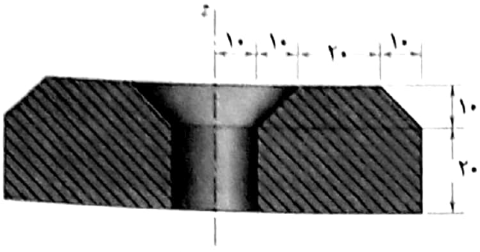
شکل م ۸۷.۵

۸۸.۵ مساحت کل سطح جسم تشکیل شده به‌وسیلهٔ چرخاندن سطح سایه‌خورده به مقدار °۳۶۰ حول محور x را به‌دست آورید.



شکل م ۸۸.۵

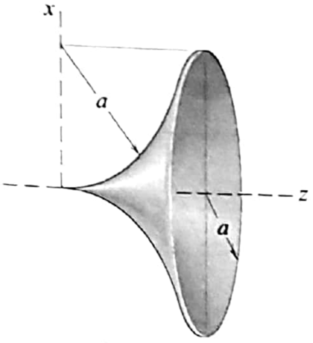
۸۹.۵ جرم تیتانیم ریخته‌گری شدهٔ حاصل از دوران کامل سطح مقطع نشان‌داده‌شده حول محور تقارن z را به‌دست آورید.



ابعاد برحسب میلیمتر

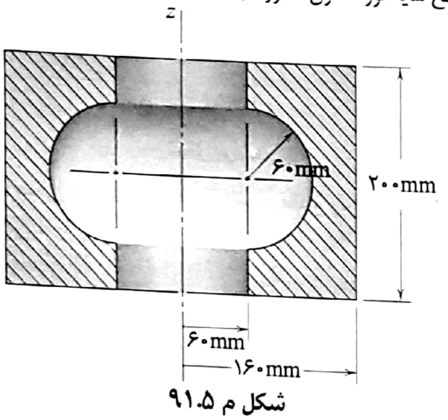
شکل م ۸۹.۵

۹۰.۵ مساحت سطح جانبی یک پوستهٔ شیپوره‌ای با ضخامت یکسان، اما قابل صرف‌نظر، را به‌دست آورید.



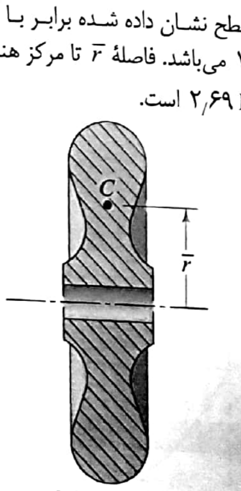
شکل م ۹۰.۵

۹۱.۵ یک قالب فولادی، که سطح مقطع آن در شکل نشان داده شده، شکل جسمی را دارد که از دوران سطح سایه‌خورده حول محور z به‌دست می‌آید. جرم m قالب را محاسبه کنید.



شکل م ۹۱.۵

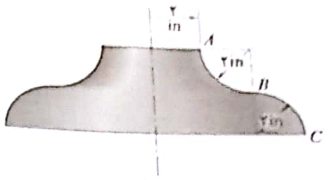
۹۲.۵ یک چرخ فرمان دستی از جنس آلومینیم، دارای ابعادی به‌صورت نشان داده شده است. مساحت کل سطح نشان داده شده برابر با $15200\ mm^2$ است و چرخ دارای جرمی معادل ۱۰kg می‌باشد. فاصلهٔ $\bar{r}$ تا مرکز هندسی را تعیین کنید. چگالی آلومینیم برابر با $2{,}69\ Mg/m^3$ است.



شکل م ۹۲.۵

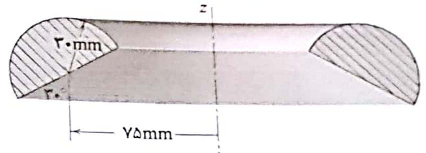
Scanned by CamScanner

۹۳.۵ دو منحنی دایره‌ای AB و BC حول محور عمودی دوران داده می‌شود تا سطح نشان‌داده‌شده به‌وجود آید. مساحت A از سطح خارجی این جسم را محاسبه کنید.



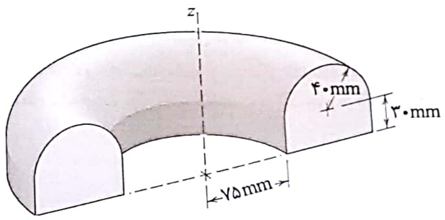
شکل م ۹۳.۵

۹۴.۵ حجم به‌وجود آمده توسط دوران سطح نیم‌دایره‌ای به مقدار °۱۸۰ را تعیین کنید.



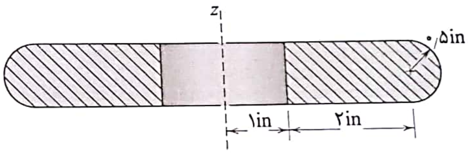
شکل م ۹۴.۵

۹۵.۵ حجم V و مساحت کل A جسم تشکیل شده به‌وسیلهٔ دوران سطح نشان داده شده حول محور z به اندازهٔ °۱۸۰ را تعیین کنید.



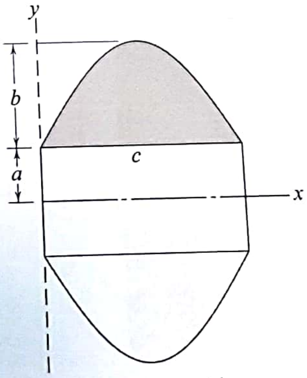
شکل م ۹۵.۵

۹۶.۵ حجم V متعلق به یک حلقهٔ کامل با سطح مقطع زیر را تعیین کنید. همچنین مساحت سطح کل A را بیابید.



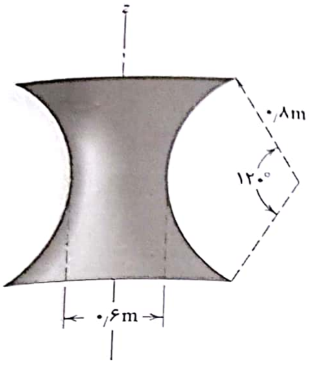
شکل م ۹۶.۵

۹۷.۵ سطح سایه‌خورده در نیمی از یک موج سینوسی و محور آن موج، محدود شده است. حجم تشکیل شده به‌وسیلهٔ دوران سطح حول محور x را به‌دست آورید.



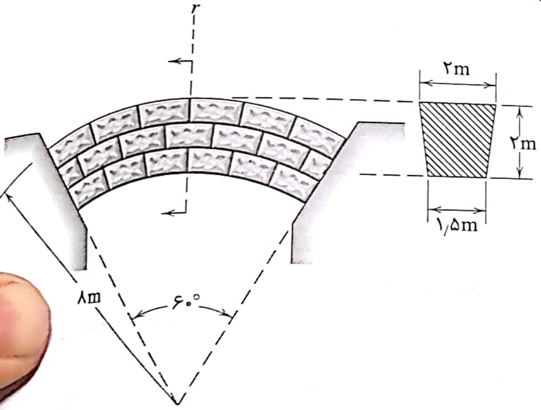
شکل م ۹۷.۵

۹۸.۵ یک سطح به‌وسیلهٔ دوران یک منحنی دایره‌ای °۱۲۰ با شعاع ۰٫۸m حول محور z ساخته می‌شود. قطر گردن این جسم ۰٫۶m می‌باشد. مساحت سطح خارجی جسم تشکیل شده را محاسبه کنید.



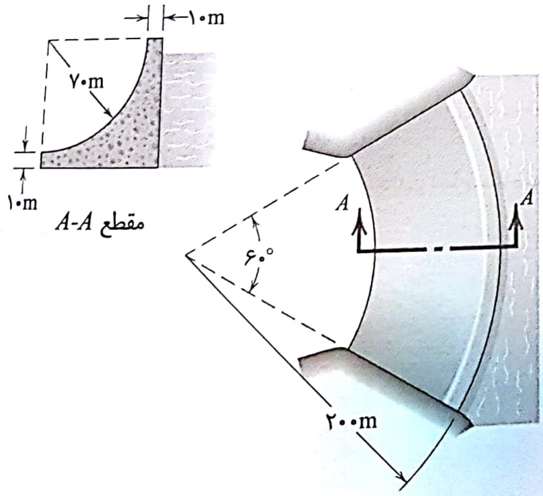
شکل م ۹۸.۵

۹۹.۵ برای تأمین تکیه‌گاه کافی برای طاق سنگی نشان داده شده، دانستن حجم کل آن لازم است. با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۱۶.۵، وزن W را تعیین کنید. چگالی سنگ برابر با $2/40 Mg/m^3$ است.



شکل م ۹۹.۵

۱۰۰.۵ جرم m بتن لازم برای ساختن سد قوس‌دار نشان داده شده را محاسبه کنید. چگالی بتن $2/40 Mg/m^3$ است.



شکل م ۱۰۰.۵

قسمت (ب): مباحث ویژه

۵ـ۴ تیرها ـ اثرات خارجی

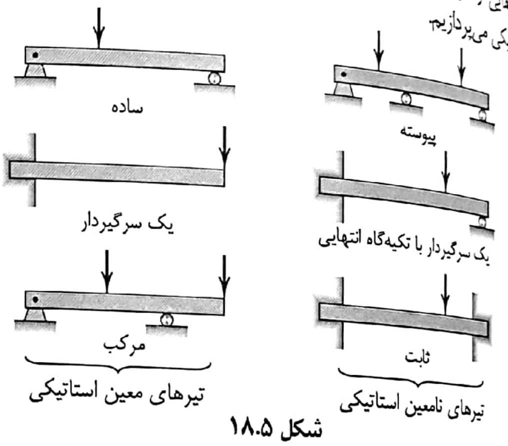
تیرها سازه‌هایی هستند که در مقابل خمش حاصل از بارگذاری، از خود مقاومت نشان می‌دهند. بیشتر تیرها، میله‌های بلند منشوری هستند که اغلب بارگذاری عمود بر محورهای آنها اعمال می‌شود.

تیرها مهم‌ترین اعضای سازه‌ها هستند، بنابراین دانستن تئوری اصلی طراحی آنها لازم است. برای تحلیل ظرفیت بارگذاری یک تیر، ابتدا باید تعادل تیر در حالت کلی و هر جزء آن را به‌دست آوریم. سپس باید نیروهای حاصل و نیروهای مقاومت داخلی تیر را برای مقابله با این نیروها به‌دست آوریم. قسمت اول این تحلیل نیازمند استفاده از اصول استاتیک است و قسمت دوم آن مستلزم بررسی ویژگی‌های مقاومت مصالح است و عموماً در مقاومت مصالح یا مکانیک جامدات مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در این بخش بارگذاری *خارجی* و واکنش‌های وارد بر یک تیر مورد بررسی قرار می‌گیرد و در بخش ۷.۵، توزیع نیرو و گشتاور *داخلی* را در طول تیر محاسبه می‌کنیم.

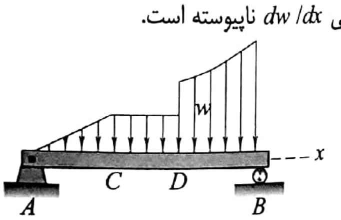
انواع تیرها

تیرهایی که به‌گونه‌ای تکیه‌گاه‌گذاری می‌شوند تا واکنش‌های خارجی تکیه‌گاه‌های آنها را بتوان تنها با استفاده از روش‌های استاتیکی معین کرد، تیرهای *معین استاتیکی* می‌گویند. تیرهایی که تعداد تکیه‌گاه‌های آنها *بیشتر از تعداد* مورد نیاز برای به‌وجود آوردن تعادل است، *تیرهای نامعین استاتیکی* می‌گویند. برای پیداکردن واکنش تکیه‌گاهی برای این نوع تیرها، لازم است علاوه بر معادلات تعادل استاتیکی، از ویژگی‌های مربوط به تغییر شکل آن تحت بارگذاری نیز استفاده نماییم. شکل ۱۸.۵ مثال‌هایی از هر دو نوع تیر را نشان می‌دهد. در این قسمت به بررسی تیرهای معین استاتیکی می‌پردازیم.



شکل ۱۸.۵

همچنین تیرها را می‌توان با توجه به نوع بارگذاری خارجی آنها دسته‌بندی کرد. تیرها در شکل ۱۸.۵ تحت بارگذاری متمرکز هستند درحالی‌که تیر شکل ۱۹.۵ تحت تأثیر بارهای گسترده قرار گرفته است. شدت w برای یک بارگذاری گسترده را می‌توان به‌صورت نیرو و برحسب یکای طول تیر بیان کرد. شدت بارگذاری در شکل ۱۹.۵ از C تا D ثابت، و از A تا C و همچنین از D تا B متغیر می‌باشد. شدت در نقطهٔ D ناپیوسته است چرا که اندازه در آن به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند. با وجود آنکه شدت نیرو در نقطهٔ C ناپیوسته نیست، نرخ تغییرات شدت یعنی dw/dx ناپیوسته است.



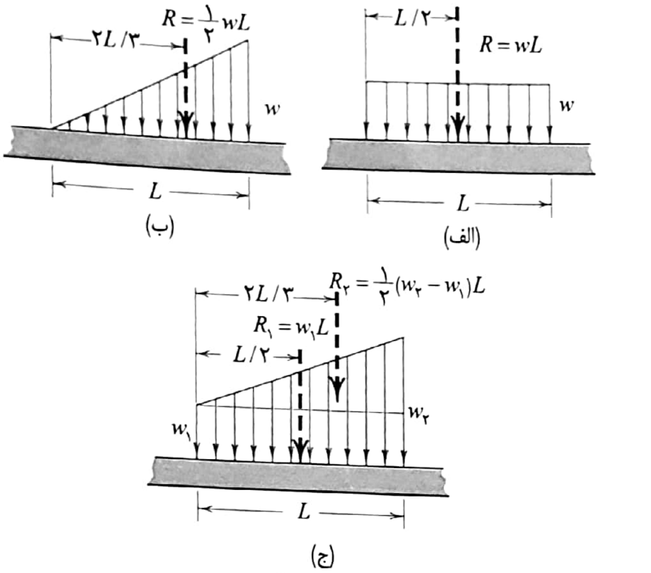
شکل ۱۹.۵

بارگذاری گسترده

بارگذاری‌هایی که ثابت‌اند و یا به‌طور خطی تغییر می‌کنند را می‌توان به راحتی بررسی نمود. شکل ۲۰.۵ سه نوع از معمول‌ترین وضعیت‌های بارگذاری و برایندهای بارگذاری‌های توزیع شده را نشان می‌دهد.

مطابق شکل ۲۰.۵ (الف) و (ب)، بار برایند R نشانگر مساحت سطح حاصل از شدت w (نیرو برحسب یکای طول تیر) و طول L بار گستردهٔ روی تیر است. برایند از مرکز هندسی این سطح می‌گذرد.

در شکل ۲۰.۵ (ج)، سطح ذوزنقه‌ای به دو قسمت مستطیلی و مثلثی تقسیم می‌شود و نیروهای برایند متناظر با هر یک از این سطوح به‌طور جداگانه محاسبه می‌شوند. دقت کنید که تک نیروی برایند را می‌توان از روش ترکیبی توضیح داده شده در بخش ۴.۵ به‌دست آورد. با این حال، معمولاً تعیین یک تک نیروی برایند مورد نیاز نمی‌باشد.



شکل ۲۰.۵

برای یک توزیع بار کلی‌تر، مطابق شکل ۲۱.۵ لازم است که با یک جزء دیفرانسیلی نیرو شروع می‌کنیم: $dR = w\,dx$؛ آنگاه بار کل وارد شدهٔ R برابر با حاصل جمع نیروهای دیفرانسیلی خواهد بود یا

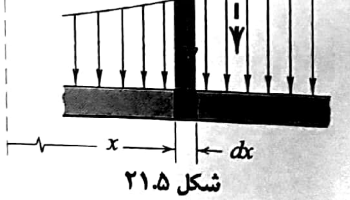
$$R = \int w\,dx$$

همانند قبل برایند R در مرکز هندسی سطح مورد نظر قرار گرفته است. مختصات x از این مرکز هندسی را می‌توان با استفاده از اصل گشتاورها معین کرد: $R\bar{x} = \int xw\,dx$، یا

$$\bar{x} = \frac{\int xw\,dx}{R}$$

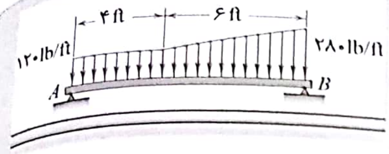
برای توزیع شکل ۲۱.۵ نیازی به پیدا کردن مختصهٔ عمودی وجود ندارد.

هنگامی‌که نیروهای گسترده به نیروهای متمرکز معادل با آنها تبدیل شدند، واکنش‌های خارجی وارد بر تیر آنها را می‌توان با استفاده از یک تحلیل استاتیکی ساده، که در فصل ۳ بیان شد، به‌دست آورد.



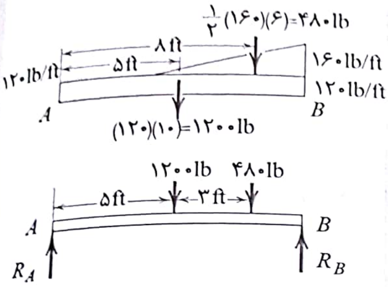
شکل ۲۱.۵

Scanned by CamScanner



مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱.۵

بارهای متمرکز معادل و همچنین واکنش‌های تکیه‌گاهی را برای تیر ساده با بارگذاری گستردهٔ نشان‌داده‌شده، تعیین کنید.



حل: سطح مربوط به توزیع بار به دو سطح مثلثی و مستطیلی مطابق شکل تقسیم می‌شود.

❶ مقدار بارهای متمرکز با محاسبهٔ مساحت‌ها به‌دست می‌آید و این بارهای متمرکز در مرکز هندسی آن سطوح قرار دارند.

وقتی که بارهای متمرکز محاسبه شدند، آنها را در نمودار جسم آزاد به همراه واکنش‌های خارجی در A و B قرار می‌دهیم. با استفاده از اصول تعادل، داریم

$[\Sigma M_A=0]$ $\quad 1200(5)+480(8)-R_B(10)=0$

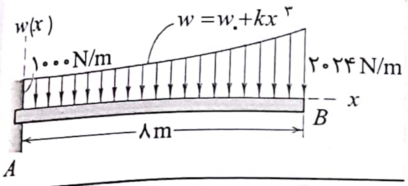
$R_B=984$ lb ج.

$[\Sigma M_B=0]$ $\quad R_A(10)-1200(5)-480(2)=0$

$R_A=696$ lb ج.

راهنمایی مفید

❶ دقت کنید که عموماً ضرورتی برای تبدیل یک توزیع بار گسترده به فقط یک بار متمرکز منفرد وجود ندارد.



مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲.۵

واکنش در تکیه‌گاه A را برای تیر یک سرگیردار بارگذاری شده، به‌دست آورید.

❶ **حل:** ثابت‌ها در توزیع بار به‌صورت $w_0=1000$ N/m و $k=2$ N/m^4 می‌باشند. لذا بار R برابر خواهد بود با

$$R=\int w\,dx=\int_0^8(1000+2x^3)dx=\left(1000x+\frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^8=10050\text{ N}$$

❷ مختصهٔ x از مرکز هندسی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\bar{x}=\frac{\int xw\,dx}{R}=\frac{1}{10050}\int_0^8 x(1000+2x^3)dx$$

$$=\frac{1}{10050}\left(500x^2+\frac{2}{5}x^5\right)\Big|_0^8=4.49\text{ m}$$

با استفاده از نمودار جسم آزاد تیر، داریم

$[\Sigma M_A=0]$ $\quad M_A-(10050)(4.49)=0$

$M_A=45100$ N·m ج.

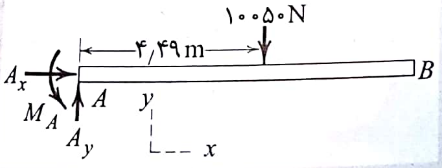
$[\Sigma M_A=0]$ $\quad A_y=10050$ N ج.

دقت کنید که با بررسی می‌توان فهمید $A_x=0$.

راهنمایی‌های مفید

❶ در یکاهای ثابت‌های w_0 و k دقت کنید.

❷ دانشجو باید متوجه باشد که محاسبهٔ R و محل آن یعنی $\bar{x}$، در حقیقت همان استفاده از مراکز هندسی مورد بحث در بخش ۳.۵ است.

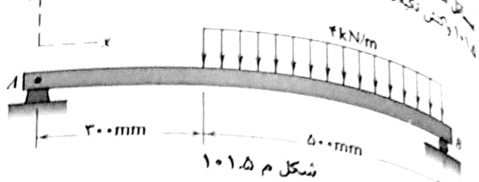


Scanned by CamScanner

مسائل

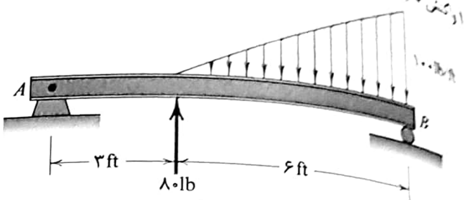
مسائل مقدماتی

۱۰۱.۵ واکنش تکیه‌گاه‌های A و B را از تیر تحت بار گستردهٔ یکنواخت زیر، به‌دست آورید.



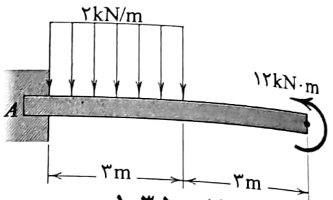
شکل م ۱۰۱.۵

۱۰۲.۵ واکنش تکیه‌گاه‌های A و B را از تیر بارگذاری‌شده به‌دست آورید.



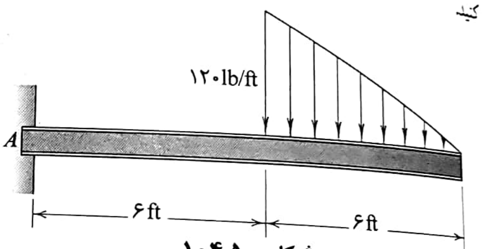
شکل م ۱۰۲.۵

۱۰۳.۵ واکنش تکیه‌گاهی نقطهٔ A را برای بارگذاری یکنواخت و کوپل وارد شده به‌دست آورید.



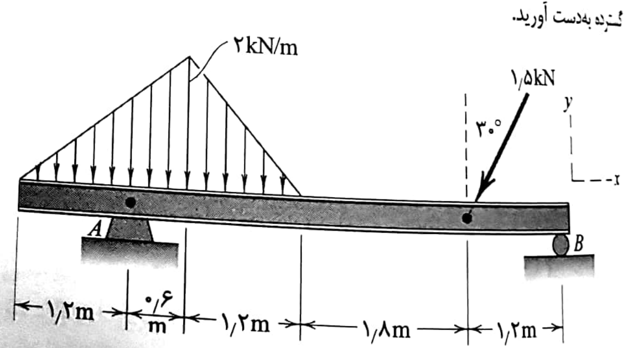
شکل م ۱۰۳.۵

۱۰۴.۵ نیروی تکیه‌گاهی R_A و گشتاور M_A وارد بر تیر یک سرگیردار را در نقطهٔ A تعیین کنید.



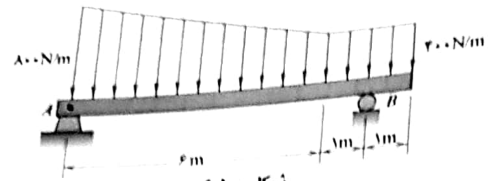
شکل م ۱۰۴.۵

۱۰۵.۵ واکنش تکیه‌گاه‌های A و B را از تیر تحت تأثیر ترکیب بارهای متمرکز و گسترده به‌دست آورید.



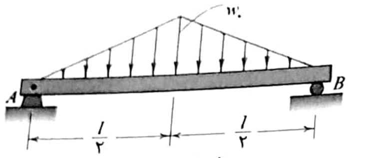
شکل م ۱۰۵.۵

۱۰۶.۵ واکنش تکیه‌گاه‌های بارگذاری‌شده به‌صورت زیر را به‌دست آورید.



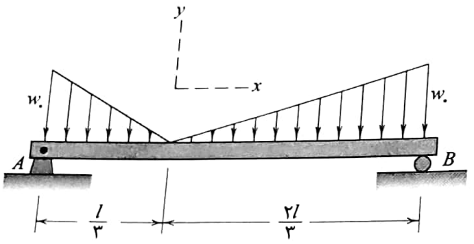
شکل م ۱۰۶.۵

۱۰۷.۵ واکنش تکیه‌گاه‌های A و B را از تیر بارگذاری‌شده به‌صورت زیر به‌دست آورید.



شکل م ۱۰۷.۵

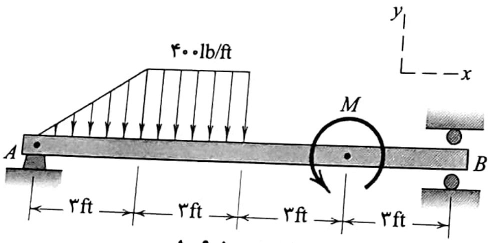
۱۰۸.۵ واکنش تکیه‌گاه‌های A و B را از تیر بارگذاری‌شده به‌صورت زیر به‌دست آورید.



شکل م ۱۰۸.۵

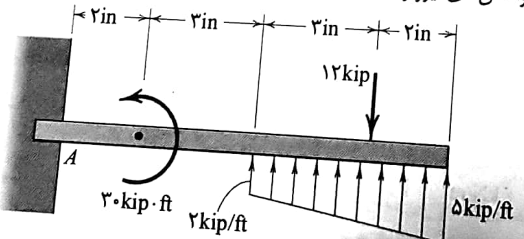
مسائل برگزیده

۱۰۹.۵ تیر نشان‌داده‌شده تحت اثر بار گسترده و یک کوپل قرار دارد. اگر M به آرامی از مقدار صفر افزایش یابد، در چه مقداری از M، تماس نقطهٔ B از سطح پایینی به سطح بالایی تغییر خواهد یافت؟



شکل م ۱۰۹.۵

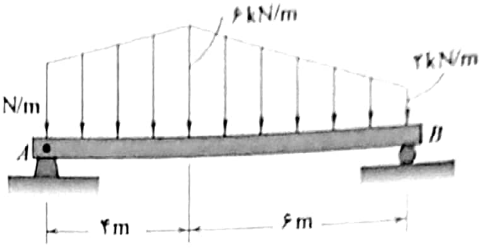
۱۱۰.۵ واکنش‌های نیرو و گشتاور در نقطهٔ A را از تیر تحت تأثیر بار مرکب زیر تعیین کنید.



شکل م ۱۱۰.۵

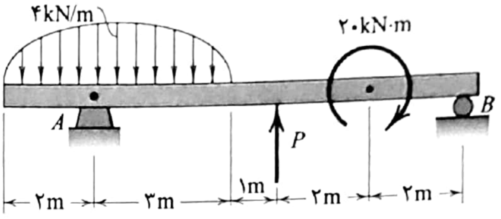
Scanned by CamScanner

۱۱۱.۵ واکنش تکیه‌گاههای A و B را از تیر تحت اثر دو توزیع بار خطی متغیر، بهدست آورید.



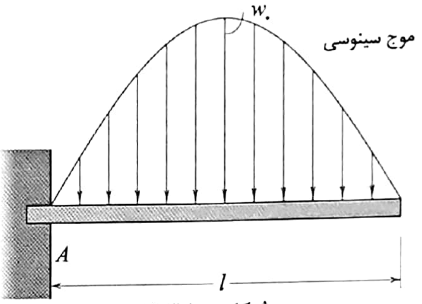
شکل م ۱۱۱.۵

۱۱۲.۵ تیری تحت اثر یک توزیع بار بیضوی و بارهای متمرکز نشان داده شده قرار دارد. برای چه مقداری از نیروی P، واکنش در نقطهٔ B معادل با صفر می‌شود؟



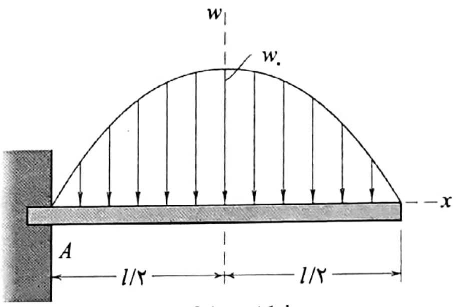
شکل م ۱۱۲.۵

۱۱۳.۵ نیرو و گشتاور واکنش تکیه‌گاه A را برای تیر یک سرگیردار زیر که تحت اثر توزیع بار سینوسی است، به‌دست آورید.



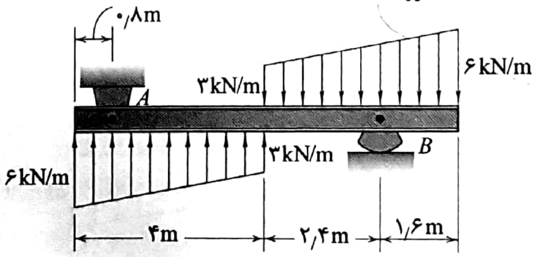
شکل م ۱۱۳.۵

۱۱۴.۵ تیر یک سرگیرداری تحت اثر یک توزیع بار سهموی، که نسبت به وسط تیر متقارن است، قرار دارد. نیروی تکیه‌گاهی R_A و گشتاور M_A وارد بر تیر را در نقطهٔ A معین کنید.



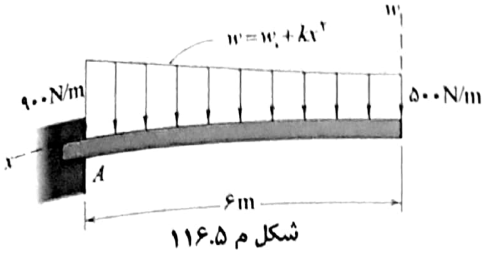
شکل م ۱۱۴.۵

۱۱۵.۵ واکنش‌های تکیه‌گاهی A و B را برای تیری که تحت اثر دو توزیع بار خطی متفاوت است، به‌دست آورید.



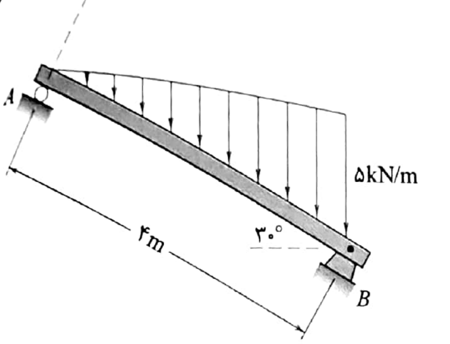
شکل م ۱۱۵.۵

۱۱۶.۵ تیر یک‌سر گیرداری مطابق شکل تحت اثر بارگذاری متغیر است. نیروی تکیه‌گاهی R_A و گشتاور M_A را در نقطهٔ A تعیین کنید.



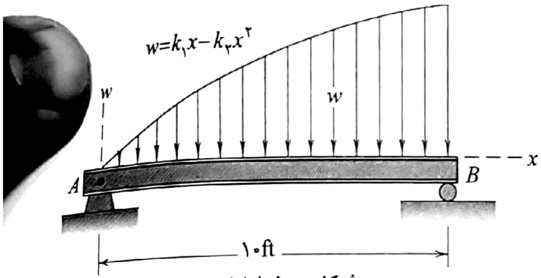
شکل م ۱۱۶.۵

۱۱۷.۵ واکنش‌های تکیه‌گاهی نقاط A و B برای تیر مایل شکل زیر را تحت اثر توزیع بار عمودی، به‌دست آورید. مقدار توزیع بار در انتهای راست تیر برابر با ۵kN بر واحد طول افقی است.



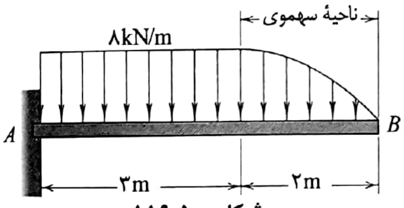
شکل م ۱۱۷.۵

۱۱۸.۵ بار تیری برای هر فوت از طول تیر به‌صورت نشان داده شده تغییر می‌کند برای $x = ۱۰ft$، یکای بار $w = ۳۰۰lb/ft$ است. در $x = ۰$، بار با نرخ ۵۰lb/ft به‌ازای هر فوت زیاد می‌شود. واکنش تکیه‌گاه‌ها را در نقاط A و B محاسبه کنید.



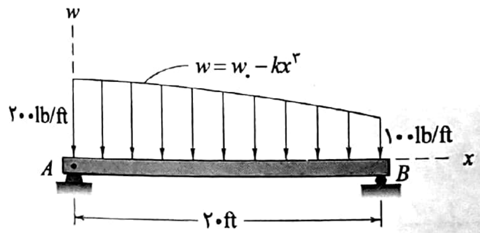
شکل م ۱۱۸.۵

۱۱۹.۵ واکنش در تکیه‌گاه را برای تیری که تحت اثر ترکیبی از توزیع بارهای یکنواخت و سهموی قرار دارد محاسبه کنید.



شکل م ۱۱۹.۵

۱۲۰.۵ تیری تحت اثر بارگذاری متغیر به‌صورت زیر قرار دارد. واکنش تکیه‌گاه‌ها را در نقاط A و B تعیین کنید.

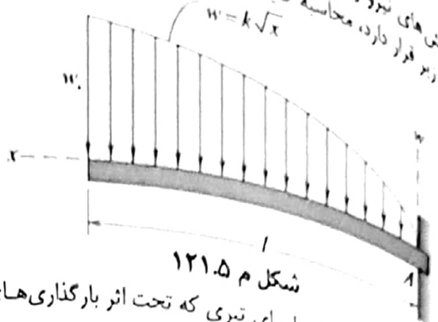


شکل م ۱۲۰.۵

Scanned by CamScanner

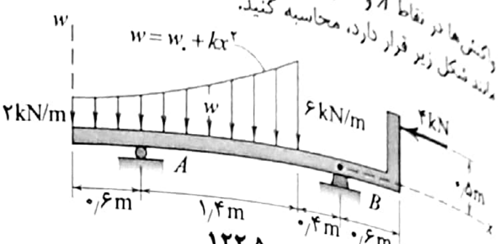
...های گسترده

۱۲۱.۵ واکنش‌های نیرو و گشتاور را در تکیه‌گاه A در تیر یک سرگیرداری که تحت بارگذاری زیر قرار دارد، محاسبه کنید.



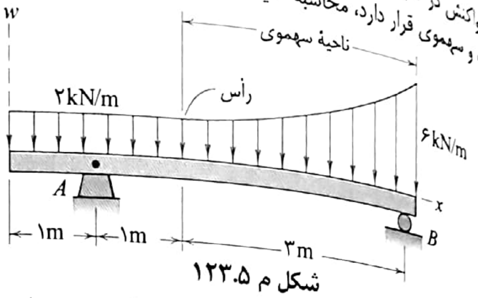
شکل م ۱۲۱.۵

۱۲۲.۵ واکنش‌ها در نقاط A و B را برای تیری که تحت اثر بارگذاری‌های متمرکز و ... مانند شکل زیر قرار دارد، محاسبه کنید.



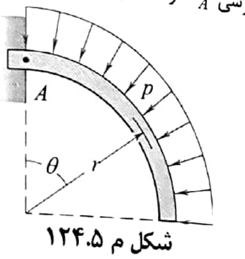
شکل م ۱۲۲.۵

۱۲۳.۵ واکنش در تکیه‌گاه‌ها را برای تیری که تحت تأثیر ترکیبی از توزیع بارهای یکنواخت و سهموی قرار دارد، محاسبه کنید.



شکل م ۱۲۳.۵

۱۲۴.۵ همان‌طور که در شکل نشان‌داده‌شده، تیر یک سرگیردار ربع دایره‌ای تحت تأثیر فشار یکنواختی در سطح فوقانی آن قرار دارد. فشار برحسب نیروی p بر یکای طول منحنی محیط بیان شده است. واکنش بر روی تیر را در تکیه‌گاه A برحسب نیرودگی C_A، نیروی برشی V_A و گشتاور خمشی M_A به‌دست آورید.



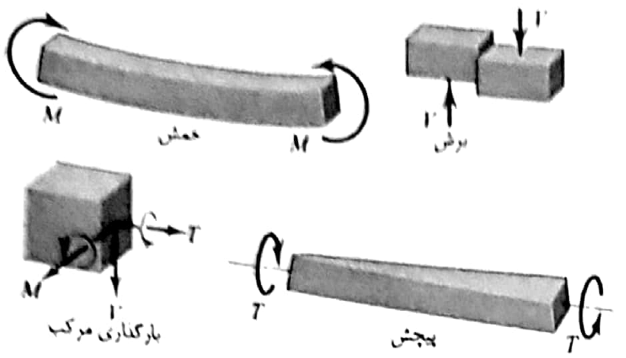
شکل م ۱۲۴.۵

۷.۵ تیرها ـ اثرات داخلی

در بخش قبل، کاهش یک نیروی گسترده به یک یا چند نیروی متمرکز معادل و سپس تعیین واکنش‌های خارجی وارد بر تیر را بررسی نمودیم. در این بخش، اثرات داخلی تیر را بررسی کرده و از اصول استاتیک برای محاسبهٔ نیروی برشی داخلی و گشتاورهای خمشی به‌صورت تابعی از موقعیت در راستای تیر، استفاده می‌کنیم.

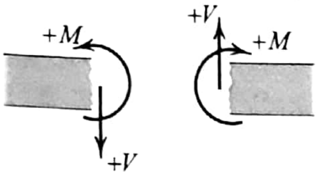
برش، خمش، و پیچش

یک تیر، علاوه بر تحمل نیروی کششی و فشاری، قادر به تحمل برش، خمش و پیچش نیز می‌باشد. این سه اثر در شکل ۲۲.۵ نشان داده شده‌اند. نیروی V به *نیروی برشی*، کوپل M به *گشتاور خمشی* و کوپل T به *گشتاور پیچشی* معروف است. این اثرات به‌صورت مؤلفه‌های برداری برایند نیروهای وارد بر مقطع عرضی تیر، نشان داده شده است.



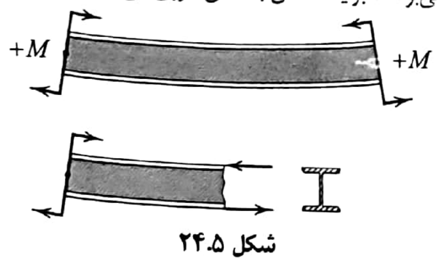
شکل ۲۲.۵

نیروی برشی V و گشتاور خمشی M حاصل از نیروهای وارد شده بر تیر را در یک صفحهٔ منفرد در نظر بگیرید. قراردادهای تعیین‌کنندهٔ مقدار مثبت برای نیروی برشی V و گشتاور خمشی M در شکل ۲۳.۵ نشان داده شده‌اند که غالباً همین قراردادها مورد استفاده قرار می‌گیرند. از اصل کنش و واکنش، می‌توانیم ببینیم که جهت‌های V و M در دو قسمت متفاوت‌اند. خیلی از اوقات، تعیین مثبت یا منفی‌بودن کشش و گشتاور در یک قسمت، بدون انجام محاسبات امری ناممکن است. به همین دلیل توصیه می‌شود که V و M در نمودارهای جسم آزاد با مقادیر مثبت در نظر گرفته شوند و اجازه داده شود تا علامت جبری مقادیر محاسبه شده، جهت مناسب را معین کند.



شکل ۲۳.۵

برای کمک به درک فیزیکی کوپل خمشی M، تیر نشان داده شده در شکل ۲۴.۵ را در نظر بگیرید که توسط دو گشتاور مساوی و خلاف جهت مثبت در دو انتها، خم شده است. سطح مقطع عرضی تیر H-شکل است که جان آن بسیار باریک و دو بال آن ضخیم در نظر گرفته می‌شود. برای چنین تیری می‌توانیم از بار تحمل شده به‌وسیلهٔ جان در مقابل بار تحمل شده توسط دو بال صرف‌نظر کنیم. واضح است که بال بالایی تیر کوتاه شده و تحت فشار قرار دارد، در حالی‌که بال پایینی طویل‌تر شده و تحت کشش قرار گرفته است. برایند دو نیروی کششی و فشاری، وارد بر هر قسمتی از تیر، یک کوپل می‌باشد و مقداری برابر با گشتاور خمشی در آن قسمت دارد. اگر تیری با شکل سطح مقطع متفاوت بارگذاری شده بود، به همین صورت، توزیع نیرو بر سطح مقطع متفاوت می‌بود اما برایند معادل با همان کوپل می‌شد.



شکل ۲۴.۵

نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی

تغییرات نیروی برشی V و گشتاور خمشی M در طول تیر اطلاعات لازم برای تحلیل‌های طراحی تیر را فراهم می‌کند. در کل، ماکزیمم اندازهٔ گشتاور خمشی معمولاً اصلی‌ترین عامل در طراحی یا انتخاب تیر است و لذا تعیین مقدار و موقعیت آن امری ضروری می‌باشد. تغییرات برش و گشتاور در شکل به‌خوبی نشان داده می‌شوند و با ترسیم نمودار روابط مربوط به V و M برحسب موقعیت مکانی در طول تیر، نمودارهای *نیروی برشی و گشتاور خمشی* تیر به‌دست می‌آیند.

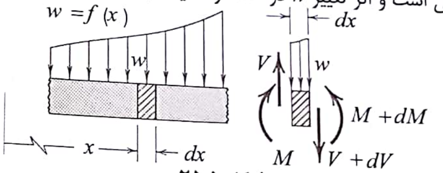
Scanned by CamScanner

اولین قدم برای تعیین روابط حاکم بر برش و گشتاور، تعیین مقادیر تمامی واکنش‌های خارجی بر تیر، از راه اعمال معادلات تعادل بر نمودار جسم آزاد کلی تیر می‌باشد. سپس قسمتی از تیر را، از طرف چپ یا راست یک مقطع عرضی به‌دلخواه، جدا کرده، نمودار جسم آزاد آن را رسم و معادلات تعادل را به قسمت مجزا شدهٔ تیر اعمال می‌کنیم. این معادلات، روابط نیروی برشی V و گشتاور خمشی M را که بر قسمت جدا شدهٔ تیر وارد می‌شود، بیان می‌کنند. معمولاً آن قسمت از تیر که تعداد نیروهای کمتری بر آن وارد می‌شوند، چه در سمت راست و چه در سمت چپ، راه‌حل ساده‌تری را در بر خواهد داشت.

لازم است که از انتخاب مقطع‌هایی که حاوی نقاطی هستند که در آنها نیروی متمرکز یا کوپل وارد می‌شود، خودداری کنیم، چرا که چنین نقاطی با ناپیوستگی در تغییرات برش یا گشتاور خمشی همراه می‌باشند. در آخر، دقت کنید که محاسبات برای V و M در هر مقطع انتخاب شده باید با قرارداد مثبت نشان‌داده‌شده در شکل ۲۳.۵ سازگار باشد.

روابط کلی بارگذاری، برشی و گشتاور

برای هر تیر با بارگذاری‌های گسترده می‌توان روابط کلی معینی به‌دست آورد که در تعیین توزیع نیرو و گشتاور در امتداد تیر به ما کمک خواهند کرد. شکل ۲۵.۵ قسمتی از یک تیر بارگذاری‌شده را نشان می‌دهد، که در آن جزء dx از تیر جدا شده است. بارگذاری w نشان‌دهندهٔ نیرو بر یکای طول تیر می‌باشد. در نقطهٔ x برش V و گشتاور M مؤثر بر جزء در جهت مثبت رسم شده‌اند. در سمت مخالف جزء که مختصات برابر با $x+dx$ است، این مقادیر نیرو در جهت مثبت‌شان نشان داده شده‌اند. با این حال، لازم است که به‌صورت $V+dV$ و $M+dM$ نشان داده شوند چرا که V و M با x تغییر می‌کنند. بارگذاری واردهٔ w را می‌توان در طول جزء ثابت فرض کرد، زیرا این طول کمیتی دیفرانسیلی است و اثر تغییر w در حد، در مقایسه با اثر خود w، ناچیز است.



شکل ۲۵.۵

لازمهٔ تعادل این جزء، آن است که مجموع تمام نیروهای عمودی صفر باشد. بنابراین داریم

$$V - w\,dx - (V+dV) = 0$$

یا

$$w = -\frac{dV}{dx} \qquad (۱۰.۵)$$

با توجه به معادلهٔ (۱۰.۵) در می‌یابیم که شیب نمودار برشی باید در هر جایی برابر با مقدار منفی بار وارد شده باشد. معادلهٔ (۱۰.۵) در هر یک از دو طرف بار متمرکز صادق است اما بر روی آن بار صادق نمی‌باشد. دلیل این امر ناپیوستگی به‌وجود آمدهٔ حاصل از تغییر ناگهانی در برش می‌باشد.

حال می‌توانیم نیروی برشی V را برحسب بارگذاری w با استفاده از انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۱۰.۵) به‌دست آوریم. بنابراین

$$\int_{V_0}^{V} dV = -\int_{x_0}^{x} w\,dx$$

یا

$V = V_0 +$ (منفی سطح زیر منحنی بارگذاری از x_0 تا x)

در این رابطه V_0 نیروی برشی در x_0 بوده و V نیروی برشی در x می‌باشد. جمع کردن سطح زیر منحنی بارگذاری معمولاً روش آسانی برای ترسیم نمودار نیروی برشی است.

همچنین تعادل جزء شکل ۲۵.۵ نیاز به آن دارد که مجموع گشتاورها معادل صفر باشد. از جمع گشتاورهای موجود در سمت چپ جزء خواهیم داشت

$$M + w\,dx\,\frac{dx}{2} - (V+dV)dx - (M+dM) = 0$$

دو M با یکدیگر ساده شده و جمله‌های $w(dx)^2/2$ و $dV\,dx$ حذف می‌شوند چرا که دیفرانسیل‌های مرتبه بالاتری از جملات باقی‌مانده هستند. بنابراین خواهیم داشت

$$V = \frac{dM}{dx} \qquad (۱۱.۵)$$

که بیانگر این نکته است که برش در هر نقطه برابر با شیب منحنی گشتاور است. معادلهٔ (۱۱.۵) در هر دو سمت یک کوپل متمرکز صادق است اما در خود مکان کوپل صادق نیست، چرا که در آن نقطه به‌دلیل تغییرات ناگهانی گشتاور، ناپیوستگی در نمودار پدید می‌آید.

حال می‌توانیم گشتاور M را برحسب برش V با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۱۱.۵) به‌دست آوریم. لذا

$$\int_{M_0}^{M} dM = \int_{x_0}^{x} V\,dx$$

یا

$M = M_0 +$ (سطح زیر منحنی نیروی برشی از x_0 تا x)

در این رابطه M_0، گشتاور خمشی در x_0 و M گشتاور خمشی در x می‌باشد. در تیرهایی که در نقطهٔ $x_0 = 0$ آنها، هیچ گشتاور خارجی M_0 وارد نمی‌شود، جمع گشتاور در هر مقطع برابر با سطح زیر نمودار برشی تا آن نقطه است. جمع کردن سطح زیر نمودار برشی، معمولاً آسان‌ترین راه برای ترسیم نمودار گشتاور است.

هنگامی‌که V از صفر می‌گذرد و به‌صورت تابعی پیوسته از x با شرط $dV/dx \neq 0$ باشد، گشتاور خمشی M دارای مقدار ماکزیمم یا مینیمم خواهد بود، زیرا در آن نقطه $dM/dx = 0$ است. نقاط بحرانی M نیز هنگامی اتفاق می‌افتد که V به‌صورت ناپیوسته از محور صفر عبور می‌کند، چنین حالتی وقتی اتفاق می‌افتد که تیر تحت بارگذاری متمرکز باشد.

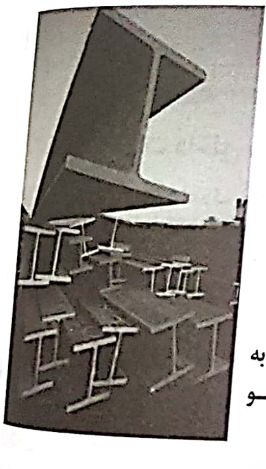
از معادلات (۱۰.۵) و (۱۱.۵) در می‌یابیم که درجهٔ x در V یک درجه از w بیشتر است. همچنین درجهٔ x در M از w دو درجه بیشتر است. لذا برای یک تیر بارگذاری شده به‌صورت $w = kx$، که نسبت به x درجه یک است، برش V از مرتبهٔ دوم x و گشتاور خمشی M از مرتبهٔ سوم x می‌باشد.

معادلات (۱۰.۵) و (۱۱.۵) را می‌توان ترکیب کرد تا به رابطهٔ زیر رسید

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -w \qquad (۱۲.۵)$$

بنابراین اگر w تابعی معلوم از x باشد، گشتاور M را می‌توان با دو بار انتگرال‌گیری به‌دست آورد، به شرط آنکه حدود انتگرال در هر بار به درستی قرار داده شوند. این روش فقط وقتی قابل استفاده است که w به‌صورت تابعی پیوسته از x باشد.[1]

هنگامی‌که خمش در تیر در بیش از یک صفحه اتفاق می‌افتد، می‌توانیم تحلیل را در هر صفحه به‌طور جداگانه انجام داده و در آخر نتایج را با یکدیگر ترکیب کنیم.



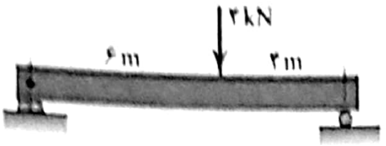
به‌دلیل استفادهٔ اقتصادی از مصالح برای دستیابی به سختی خمشی بالاتر، تیر فولادی I‌ـشکل، عضو سازه‌ای بسیار متداولی است.

---

۱. هنگامی‌که w تابعی ناپیوسته از x است، می‌توانیم از یک سری توابع خاص به نام توابع تک... استفاده کنیم که به ما این اجازه را می‌دهند که در یک بازهٔ ناپیوسته، روابطی برای برش V و ... گشتاور M به‌دست آوریم. این گونه توابع در این کتاب مطرح نمی‌شوند.

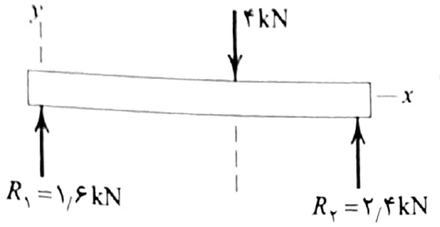
Scanned by CamScanner

مسئله نمونه ۱۳-۵
نمودارهای برش و گشتاورهای بوجود آمده در تیر سادهٔ زیر با بار متمرکز ۴ kN را به‌دست آورید.

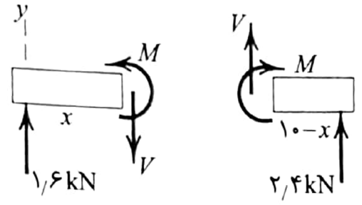


حل: از نمودار جسم آزاد برای کل تیر، واکنش تکیه‌گاه‌ها را به‌دست می‌آوریم که نتیجه می‌شود

$$R_۱ = ۱/۶\ \text{kN} \qquad R_۲ = ۲/۴\ \text{kN}$$



سپس بخشی از تیر با طول x را جدا کرده و نمودار جسم آزاد آن را رسم می‌کنیم. در این نمودار V و گشتاور خمشی M را در جهت مثبت نشان می‌دهیم

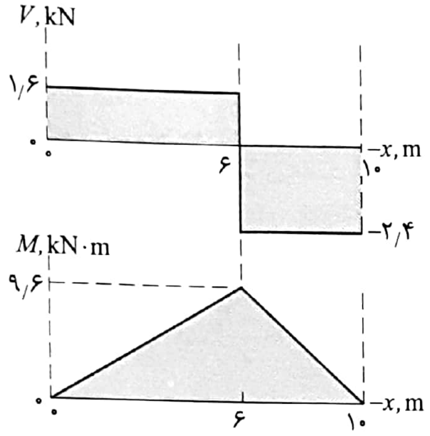


$$[\Sigma F_y = ۰] \qquad ۱/۶ - V = ۰ \qquad V = ۱/۶\ \text{kN}$$
$$[\Sigma M_{R_۱} = ۰] \qquad M - ۱/۶x = ۰ \qquad M = ۱/۶x$$

مقادیر V و M در تمام قسمت‌های تیر در سمت چپ بار ۴ kN وارد می‌شوند.

سپس بخش دیگری از تیر در سمت راست بار ۴ kN را جدا می‌کنیم که در آن نیز، M و V در جهت مثبت‌شان نمایش داده می‌شوند. با توجه به تعادل

$$[\Sigma F_y = ۰] \qquad V + ۲/۴ = ۰ \qquad V = -۲/۴\ \text{kN}$$
$$[\Sigma M_{R_۲} = ۰] \qquad -(۲/۴)(۱۰ - x) + M = ۰ \qquad M = ۲/۴(۱۰ - x)$$



این نتایج برای مقاطع سمت راست بار ۴ kN صادق می‌باشند.

مقادیر V و M در نمودار رسم شده‌اند. ماکزیمم مقدار گشتاور خمشی در محلی صورت می‌گیرد که برش تغییر جهت می‌دهد. با حرکت به‌سمت مثبت محور x از $x=۰$، مشاهده می‌شود که M تنها برابر با مساحت سطح زیر نمودار برشی از صفر تا آن نقطه است.

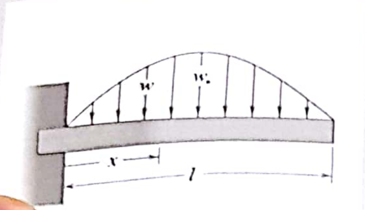
راهنمایی مفید

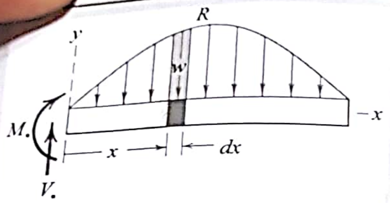
● باید مواظب باشیم که مقطع انتخابی را در محل بار متمرکز انتخاب نکنیم (در اینجا $x = ۶\text{m}$)، زیرا برش گشتاور در این نقاط دارای ناپیوستگی می‌باشند.

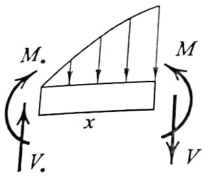
Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۴.۵

تیر یک سرگیردار نشان‌داده‌شده تحت تأثیر شدت بار (نیرو بر یکای طول) متغیر به‌صورت $w = w_0 \sin(\pi x / l)$ است. نیروی برشی V و گشتاور خمشی M را به‌صورت تابعی از نسبت x/l تعیین کنید.







حل: ابتدا نمودار جسم آزاد کل تیر رسم می‌شود تا بتوان نیروی برشی V_0 و گشتاور خمشی M_0 وارد بر تکیه‌گاه انتهایی در نقطهٔ $x = 0$ را محاسبه نمود. برحسب قرارداد V_0 و M_0، در جهت مثبت‌شان رسم شده‌اند. با جمع نیروهای عمودی برای تعادل خواهیم داشت

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad V_0 - \int_0^l w\,dx = 0 \qquad V_0 = \int_0^l w_0 \sin\frac{\pi x}{l}dx = \frac{2w_0 l}{\pi}$$

❶ جمع گشتاورها حول انتهای سمت چپ در $x = 0$ برای تعادل به‌صورت زیر خواهد شد

$$[\Sigma M = 0] \qquad -M_0 - \int_0^l x(w\,dx) = 0 \qquad M_0 = -\int_0^l w_0 x \sin\frac{\pi x}{l}dx$$

$$M_0 = \frac{-w_0 l^2}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{l}\right]_0^l = -\frac{w_0 l^2}{\pi}$$

با استفاده از یک نمودار جسم آزاد از یک مقطع با طول x از انتگرال معادلهٔ (۱۰.۵) می‌توان نیروی برشی داخلی تیر را به‌دست آورد. بنابراین

❷

$$[dV = -w\,dx] \qquad \int_{V_0}^{V} dV = -\int_0^x w_0 \sin\frac{\pi x}{l}dx$$

$$V - V_0 = \left[\frac{w_0 l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l}\right]_0^x \qquad V - \frac{2w_0 l}{\pi} = \frac{w_0 l}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{l} - 1\right)$$

یا به‌صورت بی‌بعد داریم

$$\frac{V}{w_0 l} = \frac{1}{\pi}\left(1 + \cos\frac{\pi x}{l}\right) \qquad \text{ج.}$$

گشتاور خمشی با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۱۱.۵) حاصل می‌شود، به این صورت که

$$[dM = V\,dx] \qquad \int_{M_0}^{M} dM = \int_0^x \frac{w_0 l}{\pi}\left(1 + \cos\frac{\pi x}{l}\right)dx$$

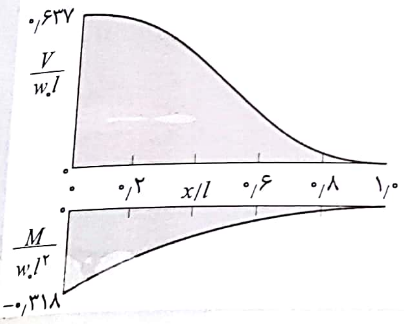
$$M - M_0 = \frac{w_0 l}{\pi}\left[x + \frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}\right]_0^x$$

$$M = -\frac{w_0 l^2}{\pi} + \frac{w_0 l}{\pi}\left[x + \frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l} - 0\right]$$

یا به‌صورت بی‌بعد داریم

$$\frac{M}{w_0 l^2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{l} - 1 + \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}\right) \qquad \text{ج.}$$

تغییرات $V/w_0 l$ و $M/w_0 l^2$ با x/l در شکل‌های انتهایی نشان داده شده‌اند. مقادیر منفی $M/w_0 l^2$ نشان‌دهندهٔ آن است که گشتاور خمشی در خلاف جهت نشان داده شده است.

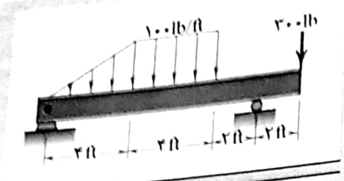


راهنمایی‌های مفید

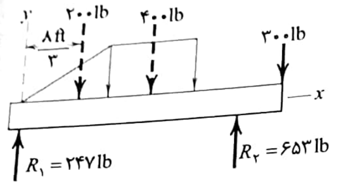
❶ در حالت متقارن مانند این مسئله، واضح است که برایند توزیع بار $R = V_0 = 2w_0 l/\pi$ در وسط تیر اعمال می‌شود به‌طوری که گشتاور لازم به سادگی برابر با $M_0 = -Rl/2 = -w_0 l^2/\pi$ به‌دست می‌آید. علامت منفی به این مفهوم است که به‌طور فیزیکی گشتاور خمشی در $x = 0$، در خلاف جهت نشان داده شده در نمودار جسم آزاد است.

❷ نمودار جسم آزاد برای آن است که به ما یادآوری کند که لازم است حدود انتگرال برای V و x را به‌حساب آوریم. ملاحظه می‌کنیم که رابطهٔ مربوط به V مثبت است، بنابراین جهت نیروی برشی مانند جهت نشان داده شده در نمودار جسم آزاد است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری‌شده رسم نموده و ماکزیمم مقدار گشتاور M را تعیین کرده و مکان آن نسبت به انتهای سمت چپ را معین کنید.



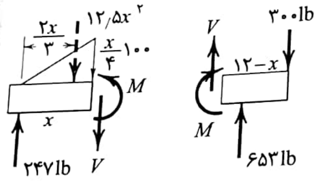
حل: واکنش‌های تکیه‌گاهی را می‌توان به‌سادگی با نشان دادن برایند بارهای گسترده روی نمودار جسم آزاد به‌دست آورد. قسمت اول تیر به‌کمک نمودار جسم آزاد برای $۰<x<۴$ ft تحلیل می‌شود. با جمع نیروهای عمودی و گشتاورها حول مقطع برش‌خورده خواهیم داشت



$$[\Sigma F_y=۰]\qquad V=۲۴۷-۱۲{,}۵x^۲$$

$$[\Sigma M=۰]\qquad M+(۱۲{,}۵x^۲)\frac{x}{۳}-۲۴۷x=۰\qquad M=۲۴۷x-۴{,}۱۷x^۳$$

مقادیر V و M برای $۰<x<۴$ ft برقرارند و برای این بازه، روی نمودارهای برشی و گشتاور رسم شده‌اند.



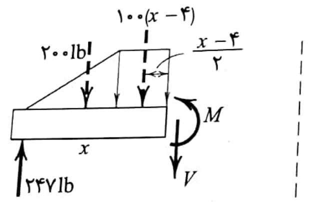
با استفاده از نمودار جسم آزاد برای مقطعی که در آن $۴<x<۸$ ft، تعادل نیروها در راستای عمودی و حاصل جمع گشتاورها حول مقطع برشی نتیجه می‌دهد

$$[\Sigma F_y=۰]\qquad V+۱۰۰(x-۴)+۲۰۰-۲۴۷=۰\qquad V=۴۴۷-۱۰۰x$$

$$[\Sigma M=۰]\qquad M+۱۰۰(x-۴)\frac{x-۴}{۲}+۲۰۰\left[x-\frac{۲}{۳}(۴)\right]-۲۴۷x=۰$$

$$M=-۲۶۷+۴۴۷x-۵۰x^۲$$

مقادیر V و M روی نمودارهای برشی و گشتاور برای بازهٔ $۴<x<۸$ ft رسم شده‌اند.



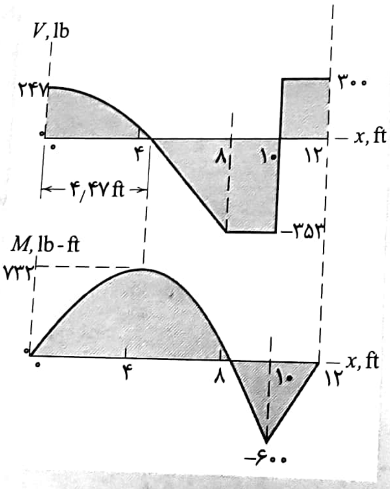
تحلیل قسمت باقی‌ماندهٔ تیر، با استفاده از نمودار جسم آزاد قسمتی از تیر انجام می‌شود که در سمت راست مقطع قبلی قرار دارد. شایان ذکر است که V و M در جهت‌های مثبت‌شان نشان داده شده‌اند. با جمع نیروهای عمودی و جمع گشتاورها در این قسمت، خواهیم داشت

$$V=-۳۵۳\text{lb}\qquad \text{و}\qquad M=۲۹۳۰-۳۵۳x$$

مقادیر V و M روی نمودارهای برشی و گشتاور برای بازهٔ $۸<x<۱۰$ ft رسم شده‌اند.

آخرین فاصله را می‌توان با بررسی تحلیل کرد. نیروی برشی دارای مقدار ثابت $+۳۰۰$ lb است و گشتاور از رابطهٔ خط راستی پیروی می‌کند که در انتهای سمت راست تیر از صفر شروع می‌شود.

ماکزیمم گشتاور در $x=۴{,}۴۷$ ft اتفاق می‌افتد، یعنی جایی که در آن منحنی نیروی برشی محور صفر را قطع می‌کند و مقدار M متناظر با قرار دادن مقدار x در رابطهٔ M در قسمت دوم به‌دست می‌آید. ماکزیمم گشتاور برابر است با



$$M=۷۳۲\ \text{lb}\cdot\text{ft}$$ ج.

همانند قبل، دقت کنید که تغییر در گشتاور M تا هر قسمت، برابر با سطح زیر نمودار برشی تا آن قسمت است. به‌طور مثال برای $x<۴$ ft داریم

$$[\Delta M=\int V\,dx]\qquad M-۰=\int_۰^x(۲۴۷-۱۲{,}۵x^۲)dx$$

و به‌همین ترتیب همان رابطهٔ بالا به‌دست می‌آید

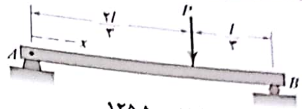
$$M=۲۴۷-۴{,}۱۷x^۳$$

Scanned by CamScanner

مسائل

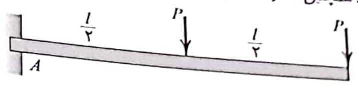
مسائل مقدماتی

۱۲۵.۵ توزیع نیروی برشی و گشتاور خمشی به‌وجود آمده در تیر را در اثر نیروی متمرکز تعیین کنید. مقادیر نیروی برشی و گشتاور در فاصلهٔ $x = l/2$ چقدر می‌باشد؟



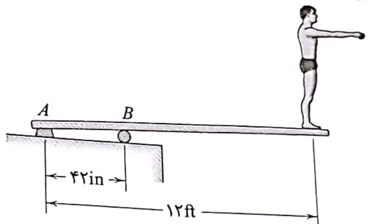
شکل م ۱۲۵.۵

۱۲۶.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر یک‌سر گیردار بارگذاری شدهٔ زیر رسم کنید. همچنین مقدار گشتاور خمشی را در وسط تیر محاسبه کنید.



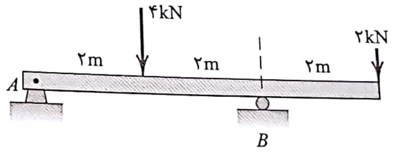
شکل م ۱۲۶.۵

۱۲۷.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تختهٔ شیرجهٔ زیر، که تحت تأثیر یک مرد 175lb آماده برای شیرجه است، رسم کنید. ماکزیمم مقدار گشتاور خمشی را تعیین کنید.



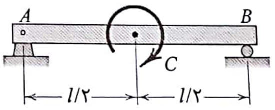
شکل م ۱۲۷.۵

۱۲۸.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده رسم کرده و d، فاصلهٔ نقطهٔ صفر بودن گشتاور تا نقطهٔ A را معین کنید.



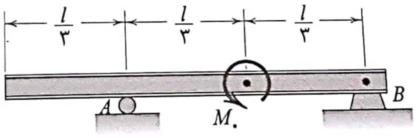
شکل م ۱۲۸.۵

۱۲۹.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده توسط کوپل C در مرکز آن، رسم کنید. مقدار نیروی برشی را در وسط تیر به‌دست آورید.



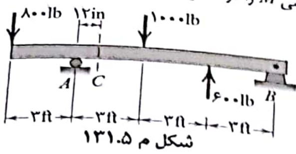
شکل م ۱۲۹.۵

۱۳۰.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده رسم کنید. مقادیر نیروی برشی و گشتاور خمشی در وسط تیر چقدر است؟



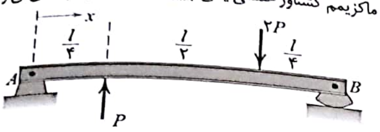
شکل م ۱۳۰.۵

۱۳۱.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر نشان داده شده رسم کرده و گشتاور خمشی M را در مقطع C به‌دست آورید.



شکل م ۱۳۱.۵

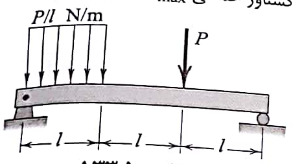
۱۳۲.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر تحت تأثیر دو نیروی نقطه‌ای زیر رسم کنید مقدار ماکزیمم گشتاور خمشی یعنی M_{max} را پیدا کرده و مکان آن را به‌دست آورید.



شکل م ۱۳۲.۵

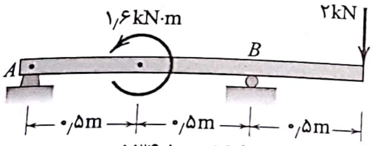
مسائل برگزیده

۱۳۳.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده رسم کرده و مقدار ماکزیمم گشتاور خمشی M_{max}، را پیدا کنید.



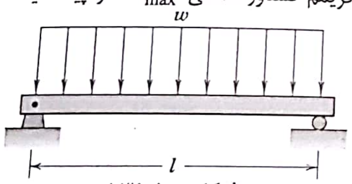
شکل م ۱۳۳.۵

۱۳۴.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده به‌وسیلهٔ نیروی 2kN و گشتاور 1.6kN·m، رسم کنید. مقدار گشتاور خمشی در نقطهٔ B را به‌دست آورید.



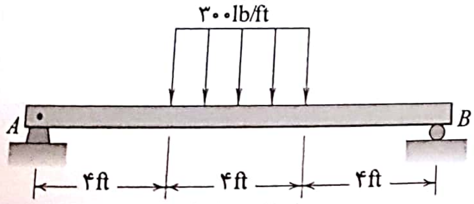
شکل م ۱۳۴.۵

۱۳۵.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر یکنواخت بارگذاری شده رسم کرده و مقدار ماکزیمم گشتاور خمشی، M_{max}، را پیدا کنید.



شکل م ۱۳۵.۵

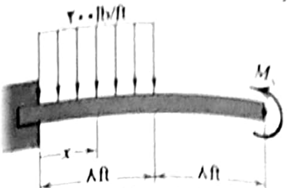
۱۳۶.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده رسم کرده و مقدار ماکزیمم گشتاور، M_{max}، را پیدا کنید.



شکل م ۱۳۶.۵

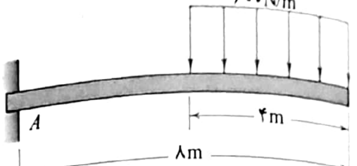
Scanned by CamScanner

۱۳۷.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر یک سر گیردار بارگذاری شده رسم کنید. کوپل انتهایی M_0 طوری تنظیم شده است که در انتهای گیردار تیر، گشتاوری معادل صفر تولید می‌شود. گشتاور خمشی M را در $x = ۴ft$ به‌دست آورید.



شکل م ۱۳۷.۵

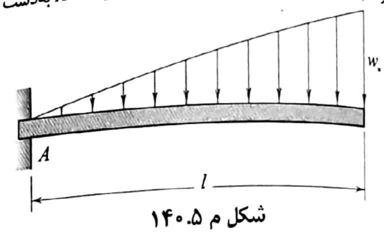
۱۳۸.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر یک سر گیردار بارگذاری شده رسم کنید. برش V و گشتاور خمشی M را برای قسمت میانی نیز به‌دست آورید.



شکل م ۱۳۸.۵

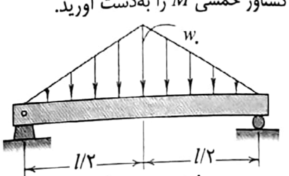
۱۳۹.۵ نیروی برشی برحسب یکای پوند برای یک تیر خاص از رابطهٔ $V = ۲۲۰۰ - ۴۰x^۲ - ۲۲۰۰x$ به‌دست می‌آید که در آن x فاصلهٔ اندازه‌گیری شده به فوت در امتداد طول تیر است. تغییرات w (پوند بر فوت) برحسب x را به‌دست آورید. همچنین درصورتی‌که مقدار M در $x = ۱ft$ برابر $-۱۶۰۰lb\cdot ft$ باشد، گشتاور خمشی M را در $x = ۳ft$ به‌دست آورید.

۱۴۰.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر یک سر گیردار بارگذاری شده رسم کرده و گشتاور خمشی M_A را در تکیه‌گاه A به‌دست آورید.



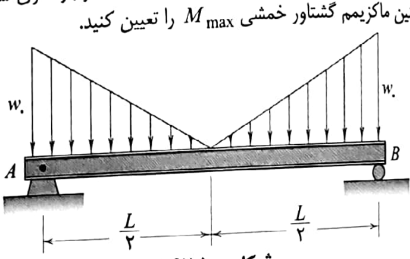
شکل م ۱۴۰.۵

۱۴۱.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شدهٔ زیر رسم کنید. ماکزیمم اندازهٔ گشتاور خمشی M را به‌دست آورید.



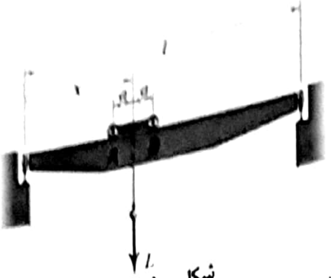
شکل م ۱۴۱.۵

۱۴۲.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شدهٔ زیر رسم کنید. همچنین ماکزیمم گشتاور خمشی M_{max} را تعیین کنید.



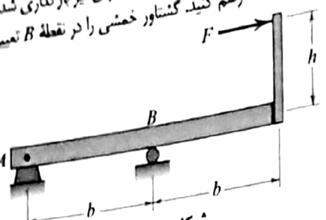
شکل م ۱۴۲.۵

۱۴۳.۵ ماکزیمم گشتاور خمشی M و مقدار متناظر x آن را برای تیر جرثقیل تعیین کرده و محلی را که این گشتاور به آن اعمال می‌شود، پیدا کنید.



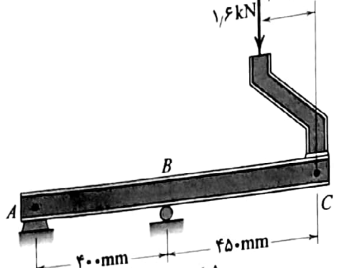
شکل م ۱۴۳.۵

۱۴۴.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده به‌وسیلهٔ نیروی F وارد بر نبشی جوش داده شده، رسم کنید. گشتاور خمشی را در نقطهٔ B تعیین کنید.



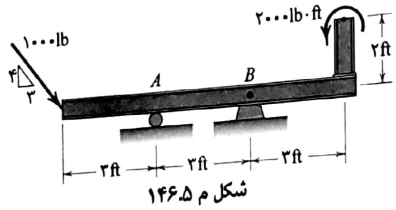
شکل م ۱۴۴.۵

۱۴۵.۵ نبشی خمیدهٔ زیر از انتهای C به یک تیر I ـ شکل جوش داده شده و تحت تأثیر یک نیروی عمودی ۱٫۶kN و فاصلهٔ x از سمت چپ C را که در آن گشتاور خمشی صفر می‌شود تعیین کنید. همچنین نمودار گشتاور خمشی را برای تیر رسم کنید. گشتاور خمشی در B را تعیین کرده



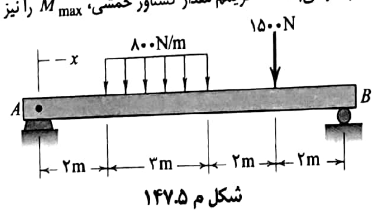
شکل م ۱۴۵.۵

۱۴۶.۵ تیر I ـ شکل نیروی ۱۰۰۰lb و همچنین کوپل ۲۰۰۰lb·ft وارد شده بر نبشی به طول ۲ft را که به انتهای تیر جوش داده شده است تحمل می‌کند. برش V و گشتاور خمشی M را در بخش میانی A و B تعیین کنید.



شکل م ۱۴۶.۵

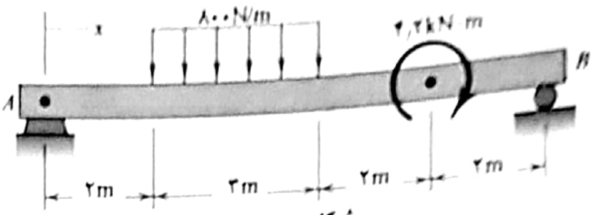
۱۴۷.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری‌شده به‌وسیلهٔ نیروهای گسترده و نقطه‌ای، ترسیم کنید. مقادیر برشی و گشتاور خمشی در نقطهٔ $x = ۶m$ چقدر می‌باشد؟ ماکزیمم مقدار گشتاور خمشی، M_{max} را نیز تعیین کنید.



شکل م ۱۴۷.۵

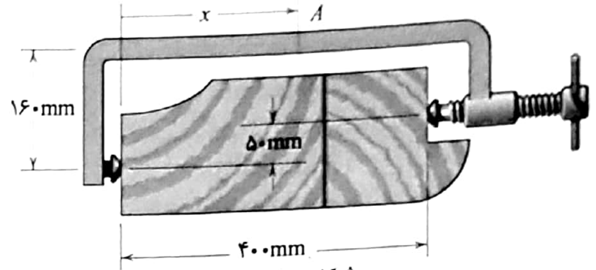
Scanned by CamScanner

۱۴۸.۵ مسئله ۱۴۷.۵ را برای حالتی که بار ۱۵۰۰N با کوپل ۴٫۲kN·m جایگزین شده است تکرار کنید.



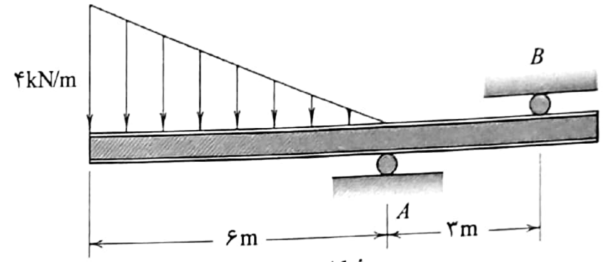
شکل م ۱۴۸.۵

۱۴۹.۵ پیچ تنظیم یک گیرهٔ غیر هم‌امتداد خاص نیروی فشاری ۵۰۰N را تحمل می‌کند. نیروی برشی V، کشش T و گشتاور خمشی M را در مقطع A از میلهٔ گیره برای $x = ۲۵۰\text{mm}$ تعیین کنید. کدام یک از این مقادیر با x، تغییر می‌کند؟



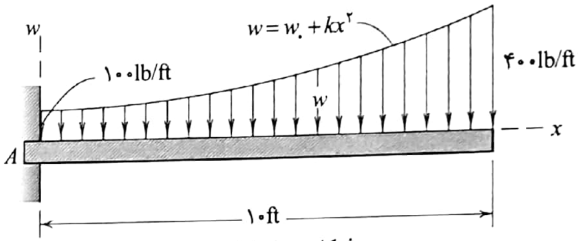
شکل م ۱۴۹.۵

۱۵۰.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده رسم کرده و برش V و گشتاور خمشی M را در مقطعی به‌فاصلهٔ ۳m از سمت چپ تکیه‌گاه A به‌دست آورید.



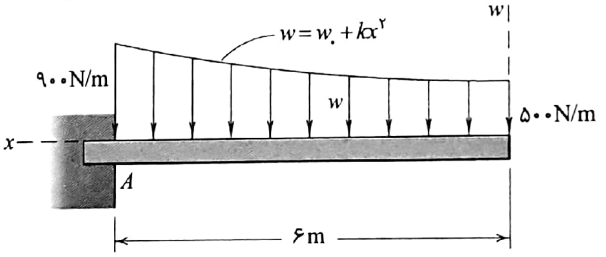
شکل م ۱۵۰.۵

۱۵۱.۵ برای نیروی برشی V و گشتاور خمشی M، روابطی را به‌صورت تابعی از x در تیر یک سر گیردار نشان داده شده استخراج کنید.



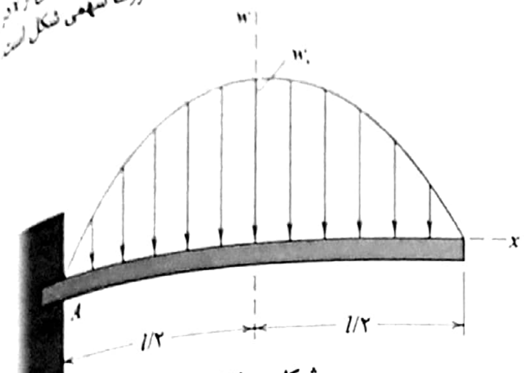
شکل م ۱۵۱.۵

۱۵۲.۵ نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شدهٔ مسئلهٔ ۱۱۶.۵ رسم کرده و برش V و گشتاور خمشی M را در وسط تیر به‌دست آورید.



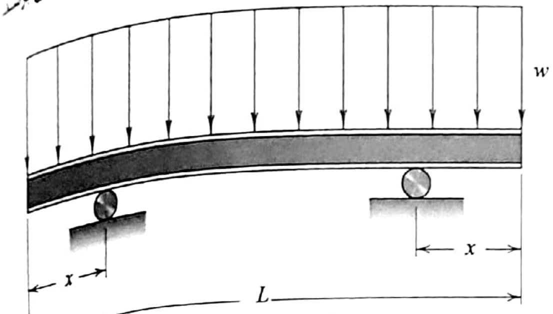
شکل م ۱۵۲.۵

۱۵۳.۵ برای نیروی برشی V و گشتاور خمشی M، روابطی را به‌صورت تابعی از x در تیر یک سر گیردار مسئلهٔ ۱۱۴.۵ استخراج کنید. بارگذاری به‌صورت سهمی شکل است.



شکل م ۱۵۳.۵

۱۵۴.۵ تیری تحت تأثیر بار یکنواخت w قرار دارد. محل x برای دو تکیه‌گاه را طوری پیدا کنید که، گشتاور خمشی ماکزیمم M_{max}، در تیر به حداقل ممکن برسد. مقدار M_{max} را معین کنید.



شکل م ۱۵۴.۵

۸.۵ کابل‌های انعطاف‌پذیر

یکی دیگر از عضوهای سازه‌ای مهم، کابل‌های انعطاف‌پذیر می‌باشد که از آنها در پل‌های معلق، خطوط انتقال، کابل‌های نگهدارنده برای واگن‌های سنگین و خطوط تلفن، و بسیاری از سازه‌های دیگر استفاده می‌شود. برای طراحی این گونه سازه‌ها، لازم است که ارتباط میان کشش، دهانه، افت (شکم‌دادگی) و طول کابل‌ها را بدانیم. این مقادیر را با در نظر گرفتن کابل به‌صورت یک جسم در حال تعادل به‌دست می‌آوریم. در تحلیل کابل‌های انعطاف‌پذیر، فرض می‌کنیم که هر مقاومتی در برابر خمش ناچیز باشد. این فرض به این معنی است که نیروی داخل کابل همیشه در امتداد کابل است.

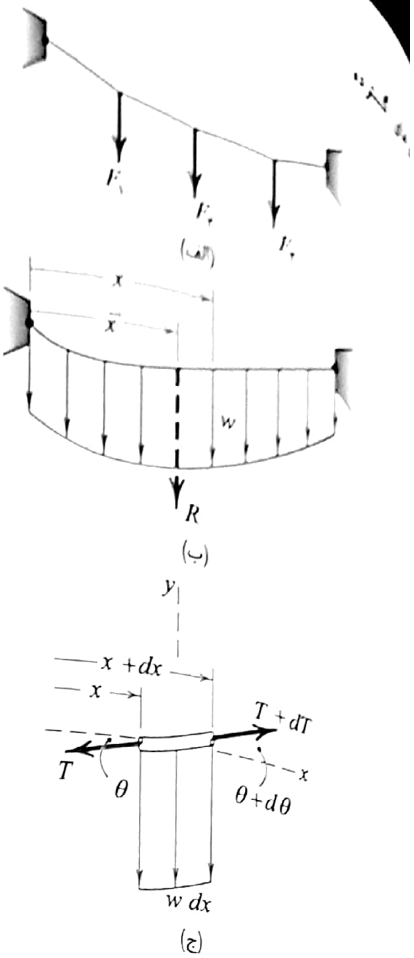
کابل‌های انعطاف‌پذیر می‌توانند مطابق شکل ۲۶.۵ (الف) مجموعه‌ای از نیروهای متمرکز مجزا را تحمل کنند، یا همانند شکل ۲۶.۵ (ب) در طول کابل بارگذاری گسترده‌ای با شدت متغیر وجود داشته باشد. در بعضی از موارد وزن کابل در مقابل بار وارد بر آن قابل صرف‌نظر است. در موارد غیر از آن ممکن است وزن کابل مقداری قابل توجه یا تنها بار موجود بوده و صرف‌نظرکردن از آن ممکن نیست. صرف‌نظر از این دو حالت، می‌توانیم شرط تعادل کابل را با همان روش فرمول‌بندی کرد.

روابط کلی

اگر شدت بار متغیر و پیوستهٔ وارد شده بر کابل شکل ۲۶.۵ (ب) را به‌صورت w برحسب یکای نیرو بر یکای طول افقی x بیان کنیم، برایند R از بارگذاری عمودی، عبارت است از

$$R = \int dR = \int w\, dx$$

Scanned by CamScanner



شکل ۲۶.۵

در آن حدود انتگرال برای بازهٔ مورد نظر در نظر گرفته شده است. مکان R از اصل گشتاور به‌دست می‌آوریم، به این صورت که

$$R\bar{x} = \int x\, dR \qquad \bar{x} = \frac{\int x\, dR}{R}$$

جزئی $dR = w\,dx$ نشانگر یک نوار عمودی با طول عمودی w و عرض از سطح سایه‌خورده در نمودار بارگذاری و R نشانگر سطح کل است. با توجه به روابط واضح است که R از مرکز هندسی سطح سایه‌خورده می‌گذرد.

شرایط تعادل کابل وقتی برقرار می‌شوند که هر یک از اجزای بی‌نهایت کوچک آن در تعادل باشند. نمودار جسم آزاد از یک جزء دیفرانسیلی در شکل ۲۶.۵(ج) نشان داده شده است. در نقطهٔ دلخواه x، کشش در کابل برابر T است و کابل با راستای افقی x، زاویهٔ θ می‌سازد. در مقطع $x+dx$ کشش برابر $T+dT$ بوده و زاویه برابر با $\theta+d\theta$ است. دقت کنید که تغییرات در T و θ را در جهت تغییر مثبت در x، مثبت فرض می‌کنیم. بار عمودی $w\,dx$ نمودار جسم آزاد را تکمیل می‌کند. تعادل نیروهای افقی و عمودی مستلزم برقرار بودن معادلات زیر است

$$(T+dT)\sin(\theta+d\theta) = T\sin\theta + w\,dx$$
$$(T+dT)\cos(\theta+d\theta) = T\cos\theta$$

با استفاده از فرمول‌های تبدیل سینوس و کسینوس جمع دو زاویه، و جایگزین کردن $\sin d\theta = d\theta$ و $\cos d\theta = 1$ در حالت حدی $d\theta \to 0$، خواهیم داشت

$$(T+dT)(\sin\theta + \cos\theta\, d\theta) = T\sin\theta + w\,dx$$
$$(T+dT)(\cos\theta - \sin\theta\, d\theta) = T\cos\theta$$

حذف جملات درجه دو و ساده کردن عبارت‌های باقی‌مانده، نتیجه می‌دهد

$$T\cos\theta\, d\theta + dT\sin\theta = w\,dx$$
$$-T\sin\theta\, d\theta + dT\cos\theta = 0$$

که می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$d(T\sin\theta) = w\,dx \quad , \quad d(T\cos\theta) = 0$$

رابطهٔ دوم بیانگر آن است که مؤلفهٔ واقعی T بدون تغییر باقی می‌ماند، و این را می‌توان از نمودار جسم آزاد به روشنی مشاهده نمود. اگر از نماد $T_0 = T\cos\theta$ برای نیروی افقی ثابت استفاده نماییم، می‌توانیم $T = T_0/\cos\theta$ را در رابطهٔ اول قرار داده و $d(T_0\tan\theta) = w\,dx$ را به‌دست آوریم. به‌دلیل آنکه $\tan\theta = dy/dx$ می‌باشد، رابطهٔ تعادل را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} \qquad (۱۳.۵)$$

معادلهٔ (۱۳.۵) یک معادلهٔ دیفرانسیلی برای کابل انعطاف‌پذیر است. پاسخ این معادله، تابع $y=f(x)$ است که هم باید در معادلهٔ دیفرانسیل صدق کند و هم *شرایط مرزی* معادله را تأمین کند. این رابطه شکل کابل را بیان خواهد کرد و از آن برای حل دو حالت مهم از بارگذاری کابل استفاده خواهیم کرد.

کابل سهموی

هنگامی‌که شدت بارگذاری w ثابت است، این حالت را می‌توان با یک پل معلق با بارگذاری یکنواخت w تقریب زد. جرم خود کابل در راستای افقی به‌طور یکنواخت توزیع نشده است اما نسبتاً کوچک است، لذا می‌توانیم از وزن آن صرف‌نظر کنیم. برای این حالت، ثابت خواهیم کرد که کابل به‌صورت یک *منحنی سهمی* شکل خواهد ایستاد.

تحلیل را با یک کابل آویخته از دو نقطهٔ A و B که در یک خط افقی قرار ندارند، شروع می‌کنیم [شکل ۲۷.۵ (الف)]. مبدأ مختصات را در پایین‌ترین نقطهٔ کابل قرار می‌دهیم، جایی که کشش افقی و برابر T_0 است. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۱۳.۵) خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{T_0} + C$$

که C ثابت انتگرال‌گیری است. برای مختصات انتخاب شده، در $x=0$، $dy/dx=0$ بوده و $C=0$ خواهد شد. بنابراین

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{T_0}$$

که شیب منحنی را به‌صورت تابعی از x بیان می‌کند. با یک انتگرال‌گیری خواهیم داشت

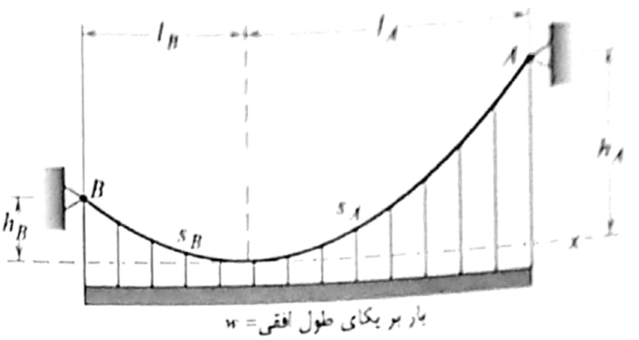
$$\int_0^y dy = \int_0^x \frac{wx}{T_0}dx$$

یا

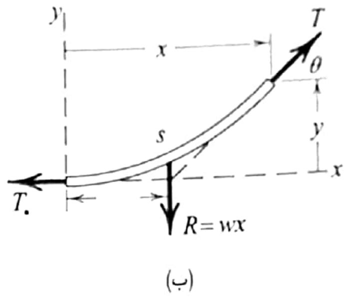
$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \qquad (۱۴.۵)$$

همچنین، شما باید بتوانید همین نتایج را با استفاده از یک انتگرال نامعین با کمک بررسی ثابت انتگرال به‌دست آورید. معادلهٔ (۱۴.۵) شکل کابل را به ما می‌دهد که همان‌طورکه می‌بینیم یک سهمی عمودی است. مؤلفهٔ افقی و ثابت کشش کابل معادل با کشش کابل در مبدأ است.

Scanned by CamScanner



(الف)



(ب)

شکل ۲۷.۵

با وارد کردن مقادیر $x=l_A$ و $y=h_A$ در معادلهٔ (۱۴.۵) خواهیم داشت

$$T_0=\frac{wl_A^2}{2h_A}$$

بنابراین

$$y=h_A(x/l_A)^2$$

کشش T از یک نمودار جسم آزاد برای قسمتی محدود از کابل به‌دست می‌آید که در شکل ۲۷.۵ (الف) می‌بینید. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث داریم

$$T=\sqrt{T_0^2+w^2x^2}$$

با حذف T_0 خواهیم داشت

$$T=w\sqrt{x^2+(l_A^2/2h_A)^2} \qquad (۱۵.۵)$$

حداکثر کشش وقتی اتفاق می‌افتد که $x=l_A$ و برابر است با

$$T_{max}=wl_A\sqrt{1+(l_A/2h_A)^2} \qquad (۱۵.۵ \text{ الف})$$

طول s_A کابل از نقطهٔ مبدأ تا نقطهٔ A را با انتگرال‌گیری از رابطهٔ دیفرانسیلی طول یعنی $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ به‌دست می‌آوریم. بنابراین

$$\int_0^{s_A}ds=\int_0^{l_A}\sqrt{1+(dy/dx)^2}dx=\int_0^{l_A}\sqrt{1+(wx/T_0)^2}dx$$

اگر چه می‌توانیم از این عبارت به‌صورت مستقیم انتگرال بگیریم، از لحاظ محاسباتی ساده‌تر است که رادیکال را به‌صورت یک سری همگرا بیان کنیم و پس از آن جمله به جمله انتگرال بگیریم. به این منظور، از بسط دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots$$

که برای $x^2<1$ همگراست. با جایگزین کردن x در سری به‌وسیلهٔ $(wx/T_0)^2$ و قرار دادن $n=\frac{1}{2}$، رابطهٔ زیر را خواهیم داشت

$$s_A=\int_0^{l_A}\left(1+\frac{w^2x^2}{2T_0^2}-\frac{w^4x^4}{8T_0^4}+\cdots\right)dx$$

$$=l_A\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{h_A}{l_A}\right)^2-\frac{2}{5}\left(\frac{h_A}{l_A}\right)^4+\cdots\right] \qquad (۱۶.۵)$$

این سری برای مقادیر $\frac{h_A}{l_A}<\frac{1}{2}$ همگراست، که در عمل برای بیشتر حالت‌ها برقرار است.

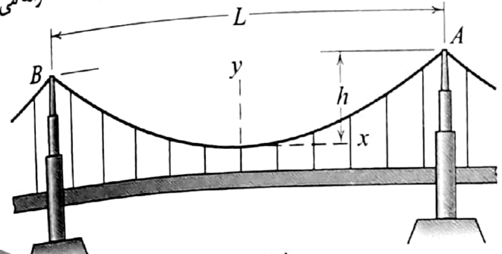
روابط مربوط به قسمتی از کابل که از مبدأ تا نقطهٔ B است را می‌توان با جایگزین کردن h_A، l_A و s_A به‌وسیلهٔ h_B، l_B و s_B به‌دست آورد.

برای یک پل معلق که ستون‌های تکیه‌گاه آن بر خط افقی قرار دارند مانند شکل ۲۸.۵ طول کل دهانه $L=2l_A$ است و افت یا شکم‌دادگی کابل $h=h_A$ و طول کل کابل $S=2s_A$ می‌باشد. با جایگزین کردن این مقادیر، ماکزیمم کشش و طول کل برابر خواهند بود با

$$T_{max}=\frac{wL}{2}\sqrt{1+(L/4h)^2} \qquad (۱۵.۵ \text{ ب})$$

$$S=L\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{h}{L}\right)^2-\frac{32}{5}\left(\frac{h}{L}\right)^4+\cdots\right] \qquad (۱۶.۵ \text{ الف})$$

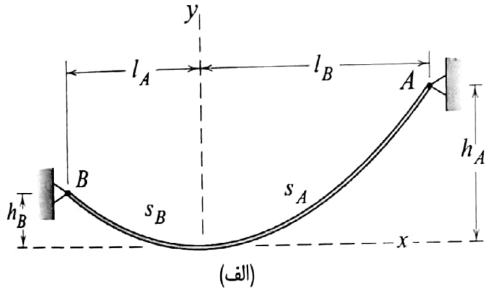
این سری برای تمام مقادیر $\frac{h}{L}<\frac{1}{4}$ برقرار است. در بیشتر موارد h بسیار کوچکتر از $L/4$ است به‌طوری که سه جملهٔ معادلهٔ (۱۶.۵ الف) تقریب خوبی را به ما ارائه می‌دهد.



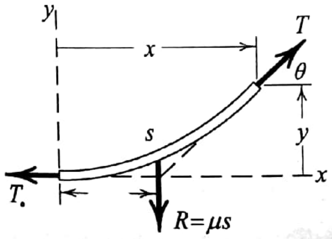
شکل ۲۸.۵

کابل زنجیروار

اکنون یک کابل یکنواخت مانند شکل ۲۹.۵ (الف) را در نظر بگیرید که از دو نقطهٔ A و B آویزان شده است و فقط تحت تأثیر نیروی وزن خود قرار دارد. نشان خواهیم داد که در این حالت، کابل یک شکل منحنی معروف به *زنجیروار* به خود خواهد گرفت.



(الف)



(ب)

شکل ۲۹.۵

Scanned by CamScanner

یک نمودار جسم آزاد از یک قسمت محدود از کابل با طول s که از مبدأ اندازه‌گیری می‌شود در شکل ۲۹.۵ (ب) نشان داده شده است. این نمودار جسم آزاد با نمودار رسم شده در شکل ۲۷.۵ (ب) متفاوت است زیرا در این حالت، مجموع نیروی عمودی تحمل شده برابر با وزن قسمتی از کابل با طول s است و نه بار یکنواخت توزیع شده در راستای افقی. اگر وزن کابل برابر با μ بر یکای طول آن باشد، برایند بار R برابر است با $R = \mu s$ و بار قائم $w\,dx$ از شکل ۲۶.۵ (ج) بوسیلهٔ $\mu\,ds$ جایگزین می‌شود. با این جایگزینی، رابطهٔ دیفرانسیلی معادلهٔ (۱۳.۵) برای کابل به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0}\frac{ds}{dx} \qquad (۱۷.۵)$$

به‌دلیل آنکه $s = f(x, y)$ می‌باشد، لازم است که این معادله را به یک معادلهٔ دو متغیره تبدیل کنیم.

می‌توانیم از رابطهٔ $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ استفاده نماییم تا معادلهٔ زیر را به‌دست آوریم

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (۱۸.۵)$$

معادلهٔ (۱۸.۵) معادلهٔ دیفرانسیلی منحنی (زنجیروار) تشکیل شده به‌وسیلهٔ کابل است. حل این معادله با جایگزین کردن $p = dy/dx$ ساده‌تر انجام می‌شود

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\mu}{T_0}dx$$

با انتگرال‌گیری از معادله خواهیم داشت

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \frac{\mu}{T_0}x + C$$

ثابت C صفر است، زیرا هنگامی‌که $x = 0$ است، $dy/dx = p = 0$ می‌شود. با جایگذاری $p = dy/dx$، تغییر به‌حالت نمایی (برای ln) و از بین بردن رادیکال در معادله خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\mu x/T_0} - e^{-\mu x/T_0}}{2} = \sinh\frac{\mu x}{T_0}$$

که در آن برای راحتی از تابع هذلولوی[1] استفاده شده است. از منحنی می‌توان انتگرال‌گیری کرده و به‌دست آورد

$$y = \frac{T_0}{\mu}\cosh\frac{\mu x}{T_0} + K$$

برای به‌دست آوردن ثابت انتگرال‌گیری K از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم که در آن وقتی $y = 0$، آنگاه $x = 0$ می‌باشد. این جایگذاری مستلزم آن است که $K = -T_0/\mu$ و بنابراین

$$y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_0} - 1\right) \qquad (۱۹.۵)$$

معادلهٔ (۱۹.۵) معادلهٔ منحنی (زنجیروار) یک کابل آویزان است که تنها تحت تأثیر وزن خودش قرار دارد.

از نمودار جسم آزاد شکل ۲۹.۵ (ب) می‌بینیم که $dy/dx = \tan\theta = \mu s/T_0$. بنابراین از رابطهٔ قبلی برای شیب خواهیم داشت

$$s = \frac{T_0}{\mu}\sinh\frac{\mu x}{T_0} \qquad (۲۰.۵)$$

کشش T در کابل را از تعادل مثلث نیروها در شکل ۲۹.۵ (ب) به‌دست می‌آوریم. بنابراین

$$T^2 = \mu^2 s^2 + T_0^2$$

که وقتی با معادلهٔ (۲۰.۵) ترکیب شود خواهیم داشت

$$T^2 = T_0^2\left(1+\sinh\frac{\mu x}{T_0}\right) = T_0^2\cosh^2\frac{\mu x}{T_0}$$

یا

$$T = T_0\cosh\frac{\mu x}{T_0} \qquad (۲۱.۵)$$

همچنین کشش را می‌توانیم برحسب y و با کمک معادلهٔ (۱۹.۵) بیان کنیم که با قرار دادن آن در معادلهٔ (۲۱.۵) خواهیم داشت

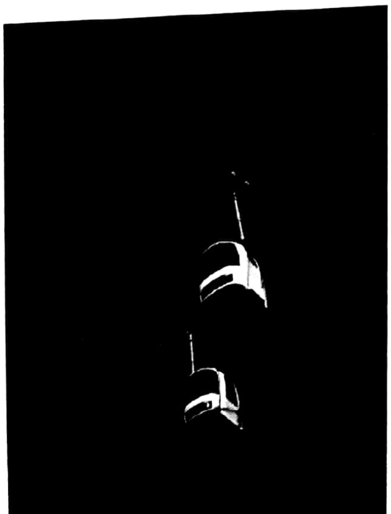
$$T = T_0 + \mu y \qquad (۲۲.۵)$$

معادلهٔ (۲۲.۵) نشانگر این مطلب است که تغییر در کشش کابل از پایین‌ترین نقطه تنها بستگی به μy دارد.

بیشتر مسائل مربوط به کابل‌های زنجیروار نیاز به حل معادلات (۱۹.۵) تا (۲۲.۵) دارند، که می‌توان آن را با یک تقریب ترسیمی به‌وسیلهٔ کامپیوتر به‌دست آورد. یک فرایند برای حل ترسیمی یا کامپیوتری در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۷.۵ در همین بخش نشان داده شده است.

حل مسائل با کابل‌های زنجیروار را که در آنها نسبت افت به دهانه کوچک است، می‌توان با روابط به‌دست آمده برای کابل سهمی شکل تقریب زد. کوچک بودن نسبت افت به دهانه به این معنی است که کابل محکم است و لذا توزیع وزن در طول کابل تفاوت زیادی با توزیع یکنواخت افقی بار در طول کابل نخواهد داشت.

بسیاری از مسائل که هم با کابل‌های سهموی و هم با کابل‌های زنجیروار سروکار دارند، شامل نقاط آویزی هستند که در یک ارتفاع قرار ندارند. در این موارد می‌توانیم از روابط به‌دست آمده برای قسمتی از کابل در نزدیکی پایین‌ترین نقطه استفاده نماییم.



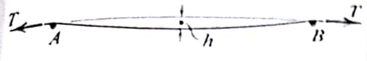
علاوه بر وزن توزیع شدهٔ کابل، این کابین‌ها یک نیروی متمرکز بر کابل نیز وارد می‌کنند.

[1]. برای آشنایی با تعریف و انتگرال توابع هذلولوی، پیوست‌های ج.۸ و ج.۱۰ را ببینید.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶.۵

یک نوار به طول ۱۰۰ ft، وزنی برابر با ۰٫۶ lb دارد. هنگامی که نوار بین دو نقطهٔ هم سطح کشیده می‌شود، در هر انتهای آن نیرویی معادل ۱۰ lb وارد می‌شود. افت h در وسط را محاسبه نمایید.



حل: وزن بر یکای طول برابر با $\mu = ۰٫۶/۱۰۰ = ۰٫۰۰۶\ \text{lb/ft}$ است. مجموع طول برابر با $۲s = ۱۰۰\ \text{ft}$ یا $s = ۵۰\ \text{ft}$ می‌باشد.

$[T^۲ = \mu^۲ s^۲ + T_۰^۲]$

$$۱۰^۲ = (۰٫۰۰۶)^۲(۵۰)^۲ + T_۰^۲$$

$$T_۰ = ۹٫۹۹۵\ \text{lb}$$ ❶

به‌طور مشابه با استفاده از معادلهٔ (۸.۵ الف) خواهیم داشت

$[T = T_۰ + \mu y]$

$$۱۰ = ۹٫۹۹۵ + ۰٫۰۰۶h$$

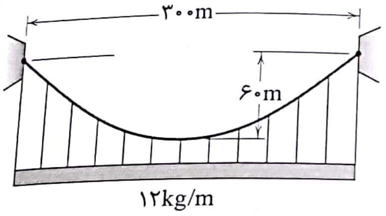
$$h = ۰٫۷۵۰\ \text{ft} \quad \text{یا} \quad ۹٫۰۰\ \text{in}$$ ج.

راهنمایی مفید

❶ برای وضوح بیشتر، یک رقم معنادار اضافه نمایش داده شده است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۷.۵

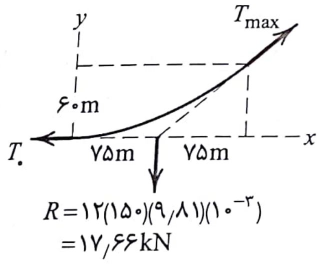
کابل سبکی وزنی معادل ۱۲ kg به‌ازای هر متر طول افقی را تحمل کرده و میان دو نقطهٔ هم ارتفاع به فاصلهٔ ۳۰۰ m آویزان شده است. اگر افت برابر بـا ۶۰ m باشـد، کشـش را در وسـط کابل پیدا کرده و ماکزیمم کشش و مجموع طول کابل را به‌دست آورید.



حل: با توزیع یکنواخت افقی بار، راه حل قسمت (ب) از بخش ۸.۵ قابل اسـتفاده اسـت و شـکل کابـل سـهموی خواهـد بـود. بـرای $h = ۶۰\ \text{m}$ و $L = ۳۰۰\ \text{m}$، و $w = ۱۲(۹٫۸۱)(۱۰^{-۳})\ \text{kN/m}$ رابطهٔ (۱۴.۵) به‌ازای $l_A = L/۲$، کشش را در وسط کابل مشخص خواهد کرد

$\left[T_۰ = \dfrac{wL^۲}{۸h}\right]$

$$T_۰ = \frac{۰٫۱۱۷۷(۳۰۰)^۲}{۸(۶۰)} = ۲۲٫۱\ \text{kN}$$ ج.



ماکزیمم کشش در تکیه‌گاه‌ها صورت گرفته و با استفاده از معادلهٔ (۱۵.۵ ب) به‌دست می‌آید. بنابراین ❶

$\left[T_{max} = \dfrac{wL}{۲}\sqrt{۱ + \left(\dfrac{L}{۴h}\right)^۲}\right]$

$$T_{max} = \frac{۱۲(۹٫۸۱)(۱۰^{-۳})(۳۰۰)}{۲}\sqrt{۱ + \left(\frac{۳۰۰}{۴(۶۰)}\right)^۲} = ۲۸٫۳\ \text{kN}$$ ج.

نسبت افت به دهانه برابر با $۶۰/۳۰۰ = ۱/۵ < ۱/۴$ است. لذا رابطهٔ سری به‌دست آمده در معادلهٔ (۱۶.۵ الف) همگراست و برای مجموع کل طول می‌توانیم بنویسیم

$$S = ۳۰۰\left[۱ + \frac{۸}{۳}\left(\frac{۱}{۵}\right)^۲ - \frac{۳۲}{۵}\left(\frac{۱}{۵}\right)^۴ + \cdots\right]$$

$$= ۳۰۰[۱ + ۰٫۱۰۶۷ - ۰٫۰۱۰۲۴ + \cdots]$$

$$= ۳۲۹\ \text{m}$$ ج.

راهنمایی مفید

❶ *توصیه:* مقدار T_{max} را مستقیماً از نمودار جسم آزاد نیمهٔ راست کابل و بـا اسـتفاده از چندضـلعی نیرو به‌دست آورید و درستی پاسخ را کنترل کنید.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۸.۵ مسئلهٔ نمونهٔ ۱۷.۵ را که در راستای افقی به‌طور یکنواخت بارگذاری شده به‌وسیلهٔ کابل با جرم ۱۲ kg بر متر و تنها تحت تأثیر وزن خودش، جایگزین کنید. کابل بین دو نقطهٔ هم ارتفاع به فاصلهٔ ۳۰۰ m آویزان شده و افت آن برابر با ۶۰ m است. کشش در وسط کابل، ماکزیمم کشش، و طول کل کابل را نیز به‌دست آورید.

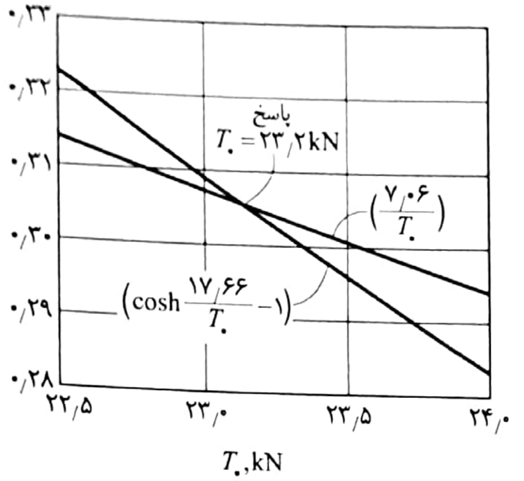
حل: با توجه به توزیع گستردهٔ یکنواخت بار در طول کابل، کابل بـه‌صـورت زنجیـروار است و راه حل قسمت (ج) از بخش ۸۵ قابـل اسـتفاده مـی‌باشـد و معـادلات (۲۰۵) و (۲۱۵) برای طول کابل و کشش هـر دو شـامل مینـیمم کشـش $T_۰$ در وسـط مـی‌باشـند کـه باید ابتدا آن را از معادلهٔ (۱۹۵) به‌دسـت آوریـم. بنـابراین بـرای $x=۱۵۰$ m، $y=۶۰$ m و $\mu=۱۲(۹/۸۱)(۱۰^{-۳})=۰/۱۱۷۷$ kN/m داریم

$$۶۰=\frac{T_۰}{۰/۱۱۷۷}\left[\cosh\frac{(۰/۱۱۷۷)(۱۵۰)}{T_۰}-۱\right]$$

یا

$$\frac{۷/۰۶}{T_۰}=\cosh\frac{۱۷/۶۶}{T_۰}-۱$$

این معادله را می‌توان از راه ترسیمی حل نمود. بـرای ایـن کـار، هـر یـک از دو طرف معادله را جداگانه محاسبه نموده و آنها را به‌صورت تابعی از $T_۰$ بـر روی نمـودار رسم می‌کنیم. محل تقاطع دو منحنی، همان محلی است که دو طـرف معادلـه در آن مساوی می‌شوند، لذا می‌توان $T_۰$ را از آن به‌دست آورد. این نمـودار همـراه بـا شـکل مسئله رسم شده است و نتیجه از آن به‌دست می‌آید



$$T_۰=۲۳/۲\text{ kN}$$

همچنین می‌توانیم معادله را به‌صورت زیر بنویسیم

$$f(T_۰)=\cosh\frac{۱۷/۶۶}{T_۰}-\frac{۷/۰۶}{T_۰}-۱=۰$$

و یک برنامهٔ کـامپیوتری نوشـته و مقـدار (مقـادیر) $T_۰$ را کـه در $f(T_۰)=۰$ صـدق می‌کنند، به‌دست آوریم. برای توضیح به پیوست ج.۱۱ مراجعه کنید.

ماکزیمم کشش برای ماکزیمم y صورت می‌گیرد و با توجه به معادلهٔ (۲۲.۵) برابر است با

$$T_{max}=۲۳/۲+(۰/۱۱۷۷)(۶۰)=۳۰/۲\text{ kN}$$ ج.

با توجه به معادلهٔ (۲۰.۵) طول کل کابل برابر خواهد بود با

$$۲s=۲\frac{۲۳/۲}{۰/۱۱۷۷}\sinh\frac{(۰/۱۱۷۷)(۱۵۰)}{۲۳/۲}=۳۳۰\text{ m}$$ ج.

راهنمایی مفید

❶ دقت کنید که پاسخ مسئلهٔ نمونـهٔ ۱۷.۵ بـرای کابـل سـهمی شکل، اگر چه افت کابل نسـبتاً بـزرگ اسـت، تقریـب بسـیار نزدیکی از مقادیر مربوط به نتایج کابل زنجیـروار اسـت. ایـن تقریب برای نسبت‌های کمتر افت به دهانه حتی بهتر از ایـن می‌باشد.

Scanned by CamScanner

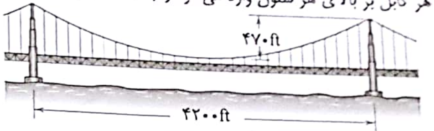
مسائل

مسائل ستاره‌دار شامل معادلاتی هستند که باید آنها را به‌کمک کامپیوتر یا با استفاده از روش‌های ترسیمی حل کرد.

مسائل مقدماتی

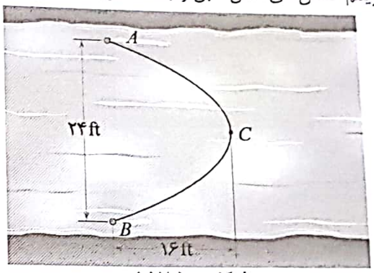
۱۵۵.۵ نایلی ریسمانی را میان دو نقطهٔ هم ارتفاع به فاصلهٔ ۵۰ft از یکدیگر با کشش معادل ۱۰lb در هر انتها وصل می‌کند. اگر وزن ریسمان برابر با ۰٫۱lb باشد، افت h ریسمان را در وسط آن تعیین کنید.

۱۵۶.۵ پل گولدن‌گیت در سانفرانسیسکو دارای دهانهٔ اصلی به طول ۴۲۰۰ft، افت (شکم‌دادگی) معادل ۴۷۰ft و بارگذاری کلی معادل ۲۱۳۰۰lb بر هر فوت در راستای افقی دارد. وزن هر دو کابل اصلی محسوب شده‌اند و توزیع آنها به‌صورت یکنواخت در راستای افقی فرض شده است. زاویهٔ ساخته شده بالای ستون در هر دو طرف آن یکسان است. کشش T_0 را در وسط دهانه برای هر کابل و نیروی فشاری C که به‌وسیلهٔ هر کابل بر بالای هر ستون وارد می‌شود را به‌دست آورید.



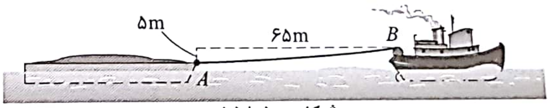
شکل م ۱۵۶.۵

۱۵۷.۵ جریان چپ به راست در رودخانه باعث ایجاد یک نیروی ۴lb بر هر فوت از طول عمود بر جهت جریان شده که بر کابل متصل به پست‌های A و B وارد می‌شود. مینیمم و ماکزیمم کشش‌های داخل کابل را به‌دست آورده و محل آنها را تعیین کنید.



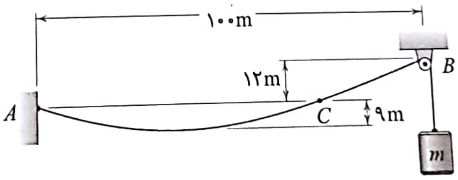
شکل م ۱۵۷.۵

۱۵۸.۵ یک قایق یدک‌کش در حال کشیدن یک کرجی به‌وسیلهٔ کابلی است که جرم هر متر آن ۱۴kg، می‌باشد. نیروی مماسی بر کابل در نقطهٔ A عمودی است. کشش‌ها را در A و B تعیین کنید.



شکل م ۱۵۸.۵

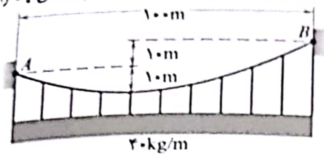
۱۵۹.۵ کابلی که وزن هر متر آن ۲۵ نیوتن است از نقطهٔ A آویزان شده و از قرقرهٔ کوچک واقع در نقطهٔ B می‌گذرد. m جرمی از استوانهٔ متصل را که افتی برابر با ۹m تولید می‌کند، محاسبه کنید. همچنین فاصلهٔ افقی از A تا C را تعیین نمایید. با توجه به کوچک بودن نسبت افت به دهانه، از تقریب کابل سهمی شکل استفاده کنید.



شکل م ۱۵۹.۵

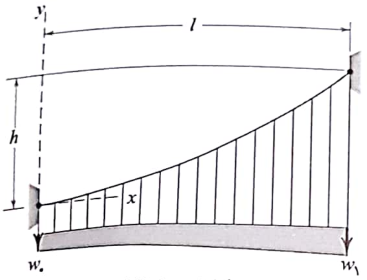
۱۶۰.۵* مسئلهٔ ۱۵۹.۵ را تکرار نمایید اما از تقریب‌های کابل سهمی شکل استفاده نکنید. نتایج خود را با نتایج به‌دست آمده از مسئلهٔ ۱۵۹.۵ مقایسه کنید.

۱۶۱.۵ کابل، باری معادل ۴۰kg/m را که به‌طور یکنواخت در راستای افقی توزیع شده تحمل کرده و از دو نقطهٔ ثابت A و B که در شکل نشان داده شده‌اند، آویزان شده است. کشش‌های کابل را در A و B محاسبه کرده و کشش T_0 را به‌دست آورید.



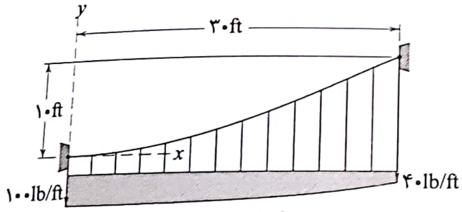
شکل م ۱۶۱.۵

۱۶۲.۵ کابل سبکی دارای شیب صفر در نقطهٔ اتصال پایینی آن می‌باشد و تحت تأثیر باری است که به‌صورت خطی نسبت به x از مقدار w_0 تا w_1 به‌صورت نشان داده شده تغییر می‌کند. رابطه‌ای برای کشش کابل T_0 در مبدأ به‌دست آورید.



شکل م ۱۶۲.۵

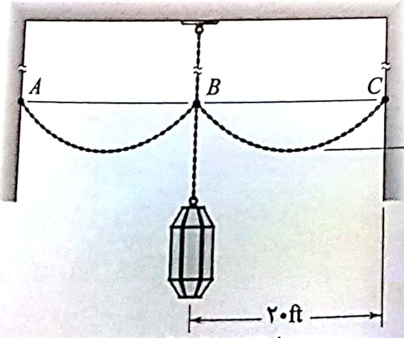
۱۶۳.۵ کابلی با جرم ناچیز از دو نقطهٔ ثابت نشان داده شده آویزان است. کشش در نقطهٔ پایینی آن به اندازه‌ای است که شیب را در آن نقطه برابر صفر نگه دارد. کابل تحت بار w است که از مقدار ۱۰۰lb/ft در $x=0$ تا ۴۰lb/ft در $x=30\text{ft}$ تغییر می‌کند و این کاهش متناسب با x^2 است. معادلهٔ منحنی به‌وجود آمده توسط کابل را به‌دست آورید.



شکل م ۱۶۳.۵

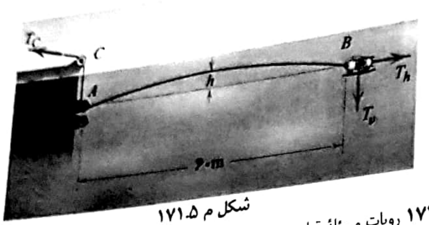
۱۶۴.۵ معادلهٔ (۱۹.۵) را به‌صورت یک سری توانی برای $(\mu x/T_0)$ بسط داده و نشان دهید که معادله برای سهمی معادلهٔ (۱۴.۵) به‌وسیلهٔ استفاده از دو جملهٔ اول این سری به‌دست می‌آید. (برای بسط سری یک تابع هذلولوی به پیوست ج.۸ مراجعه کنید.)

۱۶۵.۵* یک لوستر به‌صورت نشان داده شده از سقف آویزان است. چهار زنجیر، که دو تا از آنها نشان داده شده، از حرکت‌های اضافی به‌هنگام وزش باد جلوگیری می‌کند. اگر وزن هر فوت از زنجیر معادل ۱۵lb باشد، کشش زنجیر را در C و طول زنجیر BC را محاسبه کنید.



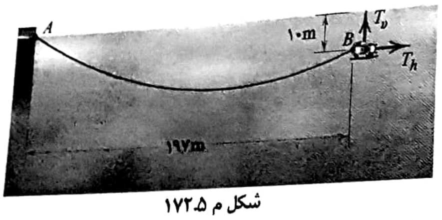
شکل م ۱۶۵.۵

۱۷۱.۵° یک روبات زیردریایی کوچک با کنترل از راه دور و سیم هدایت کنندهٔ آن در موقعیت نشان داده شده در شکل قرار گرفته‌اند. روبات از نظر شناوری خنثی و دارای دو محرک مجزا برای حرکت در راستای افقی و عمودی است. سیم هدایت کننده طوری طراحی شده که به میزان کمی شناور باشد و بر هر متر از طولش نیروی معادل ۰٫۰۲۵N به‌سمت بالا وارد شود. ۶۰٫۵m کابل بین نقاط A و B وجود دارد. تعیین کنید مقدار نیروهای افقی و عمودی را که لازم است روبات به کابل در نقطهٔ B وارد کند تا موقعیت نشان داده شده حفظ شود. همچنین فاصلهٔ h را تعیین کنید. فرض کنید که همهٔ طول کابل میان A و B در زیر آب قرار دارد.



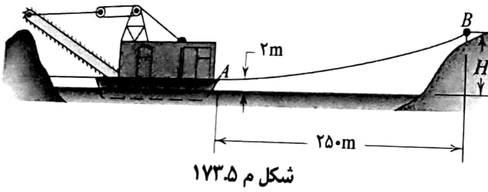
شکل م ۱۷۱.۵

۱۷۲.۵° روبات مسئلهٔ قبل توسط کابلی به‌طول ۲۰۰m کنترل شده که دارای شناوری منفی است به این مفهوم که بر هر متر از طول آن نیروی برایندی معادل ۰٫۰۲۵N به‌سمت پایین به آن وارد می‌شود. مؤلفه‌های افقی و عمودی نیرویی که لازم است وارد شود تا ماشین را در موقعیت نشان داده شده نگه دارد تعیین کنید. ماشین به خودی خود از نظر شناوری خنثی است.



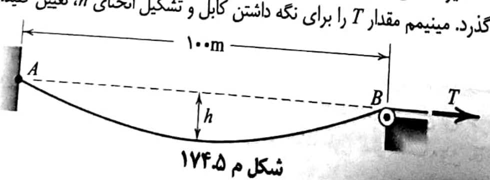
شکل م ۱۷۲.۵

۱۷۳.۵ یک ماشین لای‌روبی شناور در سطح آب در موقعیت نشان داده شده ثابت بوده و دارای یک کابل محکم در راستای افقی در اتصال A است و فاصلهٔ افقی آن از اتصال B در ساحل برابر با ۲۵۰m می‌باشد. کششی معادل ۳۰۰kN در کابل در نقطهٔ A مورد نیاز است. اگر هر متر از کابل دارای جرمی معادل ۲۲kg باشد، ارتفاع H مورد نیاز برای فاصلهٔ اتصال B از سطح آب را محاسبه کرده و طول کابل میان نقاط A و B را به‌دست آورید.



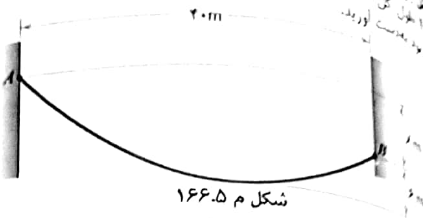
شکل م ۱۷۳.۵

۱۷۴.۵° کابلی که وزن آن برابر با ۵۰ نیوتن بر متر است در نقطهٔ A متصل شده و تحت تأثیر کشش T، از یک قرقرهٔ کوچک در نقطهٔ B که هم ارتفاع با نقطهٔ A است، می‌گذرد. مینیمم مقدار T را برای نگه داشتن کابل و تشکیل انحنای h، تعیین کنید.



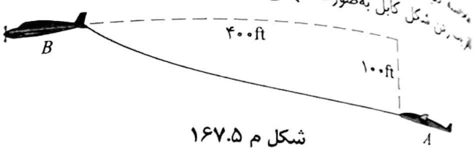
شکل م ۱۷۴.۵

... طول کل L را برای کابلی که اگر از دو نقطهٔ A و B آویزان شود، مانند شکل ... به‌دست آورید.



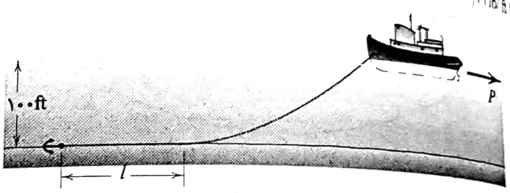
شکل م ۱۶۶.۵

۱۶۷.۵ گلایدر A که به‌وسیلهٔ یک هواپیما یدک می‌شود، ۴۰۰ft عقب‌تر و ۱۰۰ft پایین‌تر از هواپیما در نقطهٔ B است. کشش در کابل در مکان گلایدر افقی بوده و وزن کابل معادل ۰٫۵lb/ft است. کشش افقی T_0 در کابل متصل به گلایدر را محاسبه کنید. از مقاومت هوا صرف‌نظر کرده و نتایج خود را با نتایج به‌دست آمده از فرض شکل کابل به‌صورت سهمی مقایسه کنید.



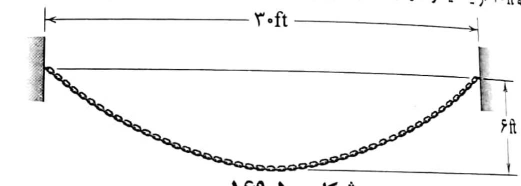
شکل م ۱۶۷.۵

۱۶۸.۵ یک قایق کوچک برای انداختن لنگرش در عمق ۱۰۰ft آب، پروانهٔ خود را در جهت عکس به چرخش در آورده و این کار باعث تولید نیروی روبه عقب و معادل $P = ۸۰۰\text{lb}$ می‌شود. در مجموع ۴۰۰ft از زنجیر لنگر آزاد شده است. زنجیر وزنی معادل ۱٫۶۳ lb/ft دارد و نیروی بالابرندهٔ آن حاصل از شناوری در آب، برابر با ۰٫۲۱lb/ft است. طول l از زنجیر در تماس با کف رودخانه را حساب کنید.



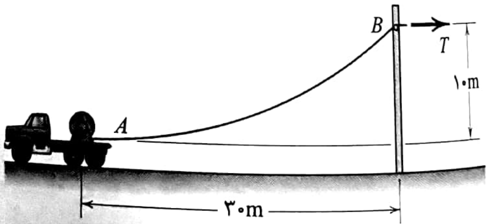
شکل م ۱۶۸.۵

۱۶۹.۵° مجموع طول L زنجیر را که به هنگام آویزان شدن از دو نقطهٔ هم ارتفاع به فاصلهٔ ۳۰ft از یکدیگر دارای افتی برابر با ۶ ft خواهد بود به‌دست آورید.



شکل م ۱۶۹.۵

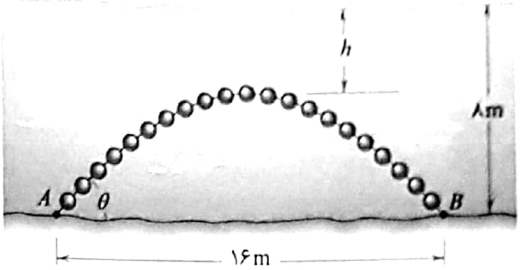
۱۷۰.۵° کشش T موردنیاز برای کشیدن یکنواخت کابل بر روی یک تکیه‌گاه غلتشی بر روی ستون را محاسبه کنید. از اثرات اصطکاک در تکیه‌گاه صرف‌نظر کنید. کابل که در نقطهٔ A افقی است، جرمی برابر با ۳kg/m دارد. همچنین طول کابل را از A تا B تعیین کنید.



شکل م ۱۷۰.۵

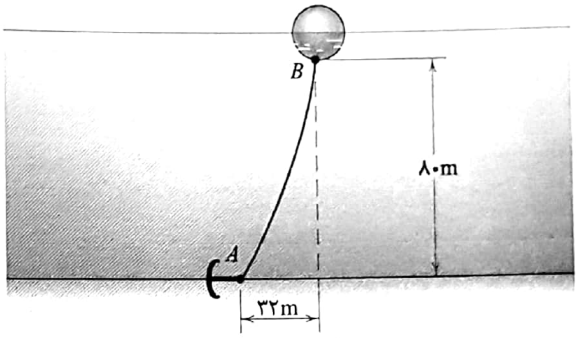
Scanned by CamScanner

۱۷۵.۵* یک سری از کره‌های شناور به فاصلهٔ یکسان از یکدیگر قرار دارند و به یک کابل به طول ۲۰m متصل شده‌اند. نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۶ m از یکدیگر در کف یک دریاچهٔ آب شیرین به عمق ۸m وصل شده‌اند. شناورها و کابل روی‌هم، وزنی معادل ۱۰۰N بر هر متر از طول کابل دارند و شناوری، آب نیروی رو به بالایی معادل ۵۶۰N بر هر متر از طول کابل وارد می‌کند. عمق h فاصلهٔ سطح آب تا خط بالای شناورها را محاسبه کنید. همچنین زاویهٔ θ به‌وجود آمده به‌وسیلهٔ راستای خط شناورها با راستای افقی در A را به‌دست آورید.



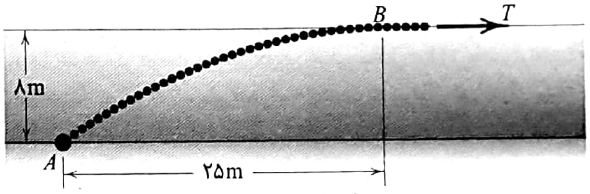
شکل م ۱۷۵.۵

۱۷۶.۵* یک شناور کروی که برای نشان دادن مسیر یک مسابقهٔ قایق‌رانی استفاده می‌شود در شکل نشان داده شده است. آب دارای جریانی از چپ به راست بوده که باعث می‌شود تا یک کشش افقی در شناور ایجاد شود. از اثر جریان بر کابل صرف‌نظر کنید. طول کابل بین نقاط A و B برابر با ۸۷ m است و جرم مؤثر کابل با احتساب شناوری آن برابر با ۲ kg/m می‌باشد. کشش در نقاط A و B را محاسبه کنید.



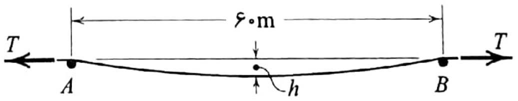
شکل م ۱۷۶.۵

۱۷۷.۵* تعداد زیادی قطعهٔ شناور کوچک به کابل متصل شده‌اند و حاصل تفاوت میان وزن و شناوری آنها یک نیروی رو به بالای معادل ۳۰ نیوتن بر هر متر از طول کابل است. نیروی T را که لازم است به کابل وارد شود تا کابل به شکل زیر در آید محاسبه کنید.



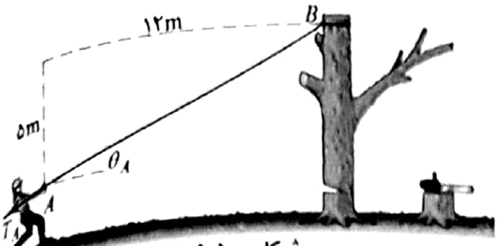
شکل م ۱۷۷.۵

۱۷۸.۵* یک گروه از نصابان کابل می‌خواهند تأثیر کشش T بر افت h را بررسی کنند. مینیمم کشش T_0 و کشش T را در اتصالات A و B به‌صورت تابعی از h برای $1 \le h \le 10$ m به‌دست آورید. جرم هر متر از کابل ۳ kg/m است. مقادیر T_0 و T را برای $h = 2$ m تعیین کنید.



شکل م ۱۷۸.۵

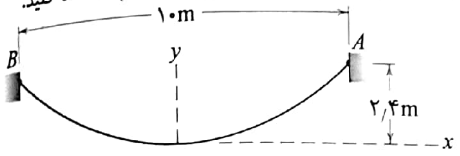
۱۷۹.۵* شخصی می‌خواهد درختی را که بخشی از آن را اره کرده است بیندازد. او کششی معادل $T_A = 200$ N را در طناب ایجاد کرده که هر متر از طول آن، جرمی برابر ۰٫۶ kg دارد. زاویهٔ θ_A که طناب را با آن می‌کشد، طول L از طناب میان نقاط A و B، و کشش T_B در نقطهٔ B را محاسبه کنید.



شکل م ۱۷۹.۵

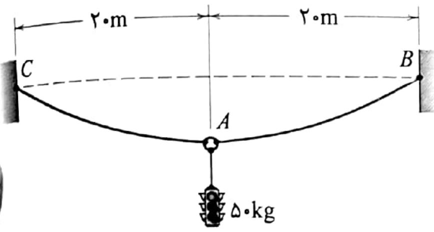
۱۸۰.۵* مسئلهٔ ۱۷۹.۵ را در نظر بگیرید. اگر طول طناب میان نقاط A و B برابر با ۱۳٫۰۲ m باشد، کشش T_A را که شخص باید در نقطهٔ A اعمال کند، زاویهٔ θ_A که طناب را با آن می‌کشد، کشش T_B در نقطهٔ B، و زاویهٔ θ_B که طناب در B با افق می‌سازد را تعیین کنید. طناب جرمی معادل ۰٫۶ kg بر هر متر از طول آن دارد.

۱۸۱.۵* قسمتی از یک کابل که جرمی معادل ۱٫۲ kg/m دارد، به هنگام آویخته شدن از دو نقطهٔ هم ارتفاع A و B به فاصلهٔ ۱۰ m از یکدیگر، افتی برابر با ۲٫۴m پیدا می‌کند. برای مقایسه، طول L کابل مورد نیاز را تعیین کرده و شکل آن را برای دو حالت (الف) سهمی شکل و (ب) حالت زنجیروار، رسم کنید. برای آنکه میان دو حالت تمایز بیشتری قائل شوید، اختلاف $(y_C - y_P)$ را به‌صورت تابعی از x رسم کنید که در آن C و P به‌ترتیب به‌مفهوم زنجیر شکل و سهمی هستند. در صورت نیاز از تقریب‌های بیان شده برای معادلات (۱۶.۵) و (۱۶.۵ الف) استفاده کنید.



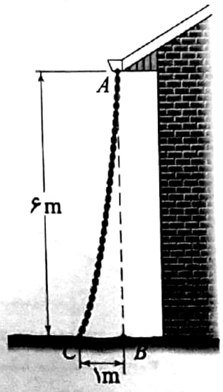
شکل م ۱۸۱.۵

۱۸۲.۵* یک چراغ راهنمایی به‌جرم ۵۰kg از دو کابل ۲۱m که جرمی معادل ۱٫۲ kg بر متر دارند آویزان شده است. تغییر مکان عمودی δ را برای حلقهٔ اتصال A نسبت به حالتی که چراغ هنوز متصل نشده به‌دست آورید.



شکل م ۱۸۲.۵

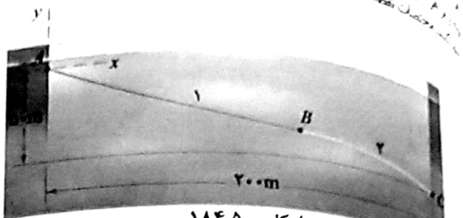
۱۸۳.۵* برای زیباسازی، در بعضی از ساختمان‌های کوچک برای هدایت آب پشت‌بام به سطح زمین، به‌جای ناودان از زنجیرهای تزئینی استفاده می‌نمایند. مهندس معمار ساختمان نشان داده شده، یک زنجیر ۶ m عمودی را از A تا B در نظر گرفته است اما سازنده تصمیم گرفته است تا از یک زنجیر ۶٫۱m از A تا C مانند شکل استفاده کند تا آب را از ساختمان دورتر کند. سازنده با این کار نیروی وارد بر اتصال A را چند درصد بیشتر کرده است؟ وزن زنجیر ۱۰۰ N بر یک متر طول آن است.



شکل م ۱۸۳.۵

Scanned by CamScanner

... (زیر) از دو قسمت تشکیل شده است. طول قسمت ۱، برابر ۱۳۰ m و بر ... نیروی رو به پایینی معادل ۰٫۰۲۵ N وارد می‌شود. طول قسمت ۲، برابر ۷۷ m ... نیروی رو به بالایی معادل ۰٫۰۳ N وارد می‌شود. شکل نهایی کابل را ... ارتفاع نقطهٔ اتصال B چقدر است؟ (دقت کنید که این مسئله دشوار است.)



شکل م ۱۸۴.۵

۹.۵ استاتیک سیالات

تاکنون در این فصل، تأثیر نیروها بر اجسام *جامد* و نیروی بین آنها را بررسی کردیم. در این بخش می‌خواهیم تعادل اجسامی را که تحت تأثیر نیروی حاصل از فشار سیالات قرار می‌گیرند مورد مطالعه قرار دهیم. *سیال*، هر مادهٔ پیوسته‌ای است که به هنگام سکون، قادر به تحمل نیروی برشی نمی‌باشد. نیروی برشی نیرویی مماسی است که به سطح وارد می‌شود و هنگامی به‌وجود می‌آید که میان لایه‌های مجاور سیال، سرعت دیفرانسیلی وجود داشته باشد. لذا یک سیال در حالت سکون فقط قادر است بر سطح مرزی خود نیروهای عمودی وارد کند. سیال می‌تواند به‌صورت گاز یا مایع باشد. معادلات کلی به استاتیک سیالات، برای حالتی که سیال مایع است *هیدرواستاتیک* و هنگامی که سیال گاز است *آیرواستاتیک* می‌گوییم.

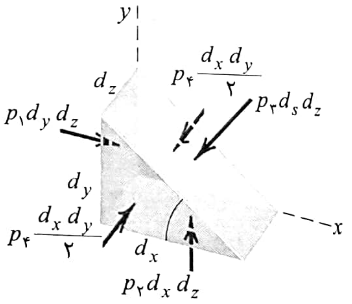
فشار سیال

فشار در هر نقطه‌ای از یک سیال در هر جهتی ثابت است (قانون پاسکال). این قضیه را می‌توانیم با در نظر گرفتن تعادل در یک منشور بی‌نهایت کوچک از یک سیال مطابق شکل ۳۰.۵ ثابت کنیم. فشار سیال وارد بر وجوه جزء آن برابر p_1، p_2، p_3 و p_4 می‌باشد که در شکل می‌بینید. با توجه به اینکه نیرو برابر با فشار ضربدر سطح است، طبق تعادل نیروها در راستاهای x و y داریم

$$p_1\, dy\, dz = p_3\, ds\, dz \sin\theta \qquad p_2\, dx\, dz = p_3\, ds\, dz \cos\theta$$

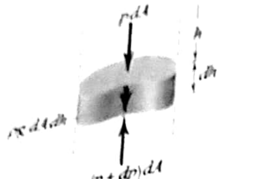
با توجه به اینکه $ds\sin\theta = dy$ و $ds\cos\theta = dx$، لازم است که

$$p_1 = p_2 = p_3 = p$$



شکل ۳۰.۵

با چرخاندن جزء به مقدار ۹۰°، می‌توانیم ببینیم که p_4 مساوی با فشارهای دیگر است. بنابراین فشار در هر نقطه از سیال ساکن در تمام جهت‌ها یکسان است. در این تحلیل، در نظر گرفتن وزن جزء سیال ضروری نیست، زیرا هنگامی که وزن بر یکای حجم در حجم جزء (چگالی ρ ضربدر g) ضرب می‌شود، یک کمیت دیفرانسیلی مرتبهٔ سه تشکیل شده که در حالت حدی در مقایسه با جملات فشار-نیروی مرتبهٔ دو حذف می‌شود.



شکل ۳۱.۵

در تمام سیالات در حال سکون، فشار تابعی از مقدار فاصلهٔ عمودی است. برای پیدا کردن این تابع، نیروهای وارد بر یک جزء دیفرانسیلی از یک ستون عمودی سیال را با سطح مقطع dA مانند شکل ۳۱.۵ در نظر می‌گیریم. راستای مثبت را برای بُعد عمودی h رو به پایین فرض می‌کنیم. فشار در سطح بالایی برابر با p و در سطح پایینی برابر با p به اضافهٔ تغییرات در p یا $p+dp$ است. وزن جزء برابر با ρg ضربدر حجم آن است. نیروهای عمود بر سطح جانبی که افقی هستند و تأثیری در تعادل نیروها در راستای عمودی ندارند، در شکل نشان داده نشده‌اند. تعادل جزء سیال در راستای h ایجاب می‌کند که

$$p\, dA + \rho g\, dA\, dh - (p+dp)\, dA = 0 \qquad (۲۳.۵)$$

$$dp = \rho g\, dh$$

رابطهٔ دیفرانسیلی به ما نشان می‌دهد که فشار در یک سیال با عمق افزایش یافته و با افزایش ارتفاع کاهش می‌یابد. معادلهٔ (۲۳.۵) هم برای سیالات و هم برای گازها برقرار است و با برداشت ظاهری ما از فشار هوا و آب تطابق دارد.

سیالاتی که غیرقابل تراکم می‌باشند را *مایع* می‌گویند و برای بیشتر کارهای عملی، چگالی ρ آنها را برای تمام نقاط مایع، ثابت در نظر می‌گیریم.[1] با ρ ثابت و انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۲۳.۵) خواهیم داشت

$$p = p_0 + \rho g h \qquad (۲۴.۵)$$

فشار p_0 فشار در سطح سیال است که در آن $h=0$ است. اگر p_0 فقط حاصل از فشار جو باشد و دستگاه اندازه‌گیری فقط فشار اضافهٔ جو را نشان دهد،[2] فشار نشان داده شده را *فشار نسبی* می‌نامند که از رابطهٔ $p=\rho g h$ محاسبه می‌شود.

یکای رایج در SI برای فشار، کیلوپاسکال (kPa) می‌باشد که معادل با کیلونیوتن بر متر مربع ($10^3\ \text{N/m}^2$) است. در محاسبهٔ فشار، اگر از Mg/m^3 برای ρ، m/s^2 برای g و m برای h استفاده نماییم، حاصل $\rho g h$ مستقیماً فشار را برحسب کیلوپاسکال به‌دست می‌دهد. به‌عنوان مثال، فشار در عمق ۱۰ m از آب شیرین برابر است با

$$p = \rho g h \left(1{,}0\ \frac{\text{Mg}}{\text{m}^3}\right)\left(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\ \text{m}) = 98{,}1\left(10^3\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}\frac{1}{\text{m}^2}\right)$$
$$= 98{,}1\ \text{kN/m}^2 = 98{,}1\ \text{kPa}$$

در سیستم یکاهای .U.S، فشار سیالات عموماً برحسب پوند بر اینچ مربع (lb/in^2) و یا گاهی برحسب پوند بر فوت مربع (lb/ft^2) بیان می‌شود. لذا در عمق ۱۰ ft از آب شیرین، فشار برابر است با

$$p = \rho g h \left(62{,}4\ \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}\right)\left(\frac{1}{1728}\ \frac{\text{ft}^3}{\text{in}^3}\right)(120\ \text{in}) = 4{,}33\ \text{lb/in}^2$$

---

۱. به جدول چگالی‌ها (جدول د.۱) در پیوست مراجعه کنید.

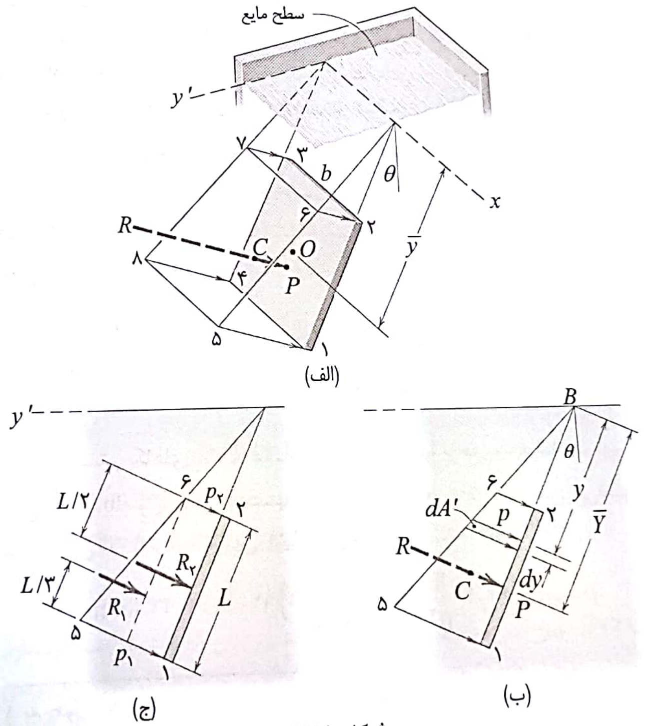
۲. فشار جو در سطح دریا را می‌توان برابر ۱۰۱٫۳kPa یا $14{,}7\ \text{lb/in}^2$ در نظر گرفت.

فشار هیدرواستاتیک بر سطوح مستطیلی غوطه‌ور

جسمی که در یک مایع غوطه‌ور می‌شود، مانند دریچهٔ سد یا جدارهٔ یک مخزن، تحت‌تأثیر فشار عمود بر سطح سیال که بر روی سطح آن توزیع می‌شود قرار می‌گیرد. در مسائلی که نیروهای سیالات قابل توجه‌اند، لازم است که برایند نیروی حاصل از توزیع فشار بر روی سطح را پیدا کرده و محل فشار را مشخص کنیم. در سیستم‌هایی که در معرض فشار جو هوا قرار دارند، فشار جو p_0 بر تمامی سطوح آنها وارد می‌شود و لذا برایند آن صفر می‌باشد. در این موارد، لازم است که فقط فشار نسبی $p=\rho gh$ را در نظر بگیریم، که همان فشار مازاد بر فشار جو است.

حالت خاص اما متداولی از تأثیر فشار هیدرواستاتیک بر صفحه‌ای مستطیلی شکل غوطه‌ور در یک مایع را در نظر بگیرید. شکل ۳۲.۵ (الف) صفحهٔ ۴ـ۳ـ۲ـ۱ با این ویژگی را نشان می‌دهد که ضلع بالایی آن افقی بوده و سطح صفحه، زاویهٔ دلخواه θ را با سطح عمودی می‌سازد. سطح افقی مایع به‌وسیلهٔ صفحهٔ x-y' نشان داده شده است. فشار سیال (نسبی) وارد بر نقطهٔ ۲ از صفحه به‌صورت عمودی، توسط پیکان ۲ـ۶ نمایش داده شده و برابر است با حاصلضرب فاصلهٔ عمودی از سطح مایع تا نقطه ۲ در ρg. همین فشار بر تمامی نقاط در راستای ضلع ۳ـ۲ وارد می‌شود. در نقطهٔ ۱ در ضلع پایینی، فشار سیال برابر با ρg ضربدر عمق نقطهٔ ۱ است و این فشار در تمام نقاط در راستای ضلع ۴ـ۱ یکی است. همان‌طورکه در شکل ۳۲.۵ (ب) مشاهده می‌کنید، تغییرات فشار p در سطح صفحه برحسب رابطه‌ای خطی است و بنابراین به‌وسیلهٔ پیکان p نمایش داده می‌شود. نیروی برایند تولید شده توسط توزیع این فشار به‌وسیلهٔ R نشان داده می‌شود، که در نقطه‌ای همچون p به‌نام *مرکز فشار* وارد می‌آید.

شرایطی که بر مقطع عمودی ۵ـ۶ـ۲ـ۱ در شکل ۳۲.۵ (الف) وارد می‌شود، با آنهایی که بر مقطع ۸ـ۷ـ۳ـ۴ و تمامی مقاطع عمود بر صفحه وارد می‌شود، یکی است. لذا، همان‌طورکه در شکل ۳۲.۵ (ب) نشان داده شده، می‌توانیم مسئله را برای مقطع ۵ـ۶ـ۲ـ۱ از دید دوبُعدی برای مقطع عمودی، بررسی کنیم. برای این مقطع، توزیع فشار ذوزنقه‌ای شکل است. اگر b، عرض افقی صفحه باشد



شکل ۳۲.۵

که عمود بر صفحهٔ شکل اندازه‌گیری شود [بعد ۳ـ۲ در شکل ۳۲.۵ (الف)]، یک جزء از سطح صفحه که فشار $p=\rho gh$ بر آن وارد می‌شود، $dA=b\,dy$ است. افزایش نیروی برایند برابر با $dR=p\,dA=bp\,dy$ است. اما $p\,dy$ صرفاً افزایش سطح سایه‌خورده از مساحت ذوزنقه‌ای dA' است به‌طوری که $dR=b\,dA'$. بنابراین می‌توانیم نیروی برایند وارد شده بر کل مساحت را به‌عنوان مساحت ذوزنقه‌ای ۵ـ۶ـ۲ـ۱ ضربدر عرض b از صفحه در نظر بگیریم

$$R=b\int dA'=bA'$$

مراقب باشید که مساحت فیزیکی A را با مساحت هندسی A' که توسط توزیع ذوزنقه‌ای فشار به‌وجود می‌آید، اشتباه نگیرید.

مساحت ذوزنقه نشان‌دهندهٔ توزیع فشار را می‌توان به راحتی با استفاده از عمق میانگین بیان کرد. در نتیجه نیروی برایند R را می‌توان برحسب فشار میانگین $p_{av}=\frac{1}{2}(p_1+p_2)$ ضربدر A مساحت صفحه نوشت. همچنین فشار میانگین همان فشاری است که در عمق میانگین وارد می‌شود، که نسبت به مرکز هندسی صفحه اندازه‌گیری می‌شود. یک بیان دیگر برای R به‌صورت زیر است

$$R=p_{av}A=\rho g\bar{h}A$$

که در آن $\bar{h}=\bar{y}\cos\theta$ می‌باشد.

خط اثر نیروی برایند R را با استفاده از اصل گشتاورها تعیین می‌کنیم با استفاده از محور x [نقطهٔ B در شکل ۳۲.۵ (ب)]، به‌عنوان محور گشتاور خواهیم داشت $R\bar{Y}=\int y\,(pb\,dy)$. با جایگزین کردن $p\,dy=dA'$ و $R=bA'$ و b داریم

$$\bar{Y}=\frac{\int y\,dA'}{\int dA'}$$

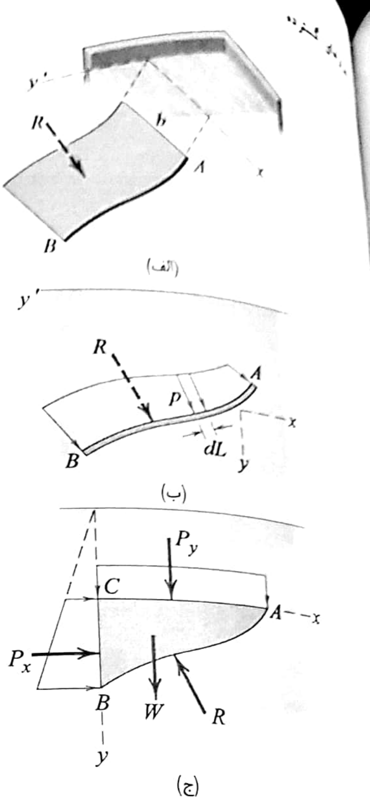
که در حقیقت همان مختصات مرکز هندسی سطح ذوزنقه‌ای A' می‌باشد. بنابراین، در نمای دوبُعدی، برایند R از مرکز هندسی C سطح ذوزنقه‌ای بیانگر توزیع فشار در مقطع عمودی، می‌گذرد. واضح است که $\bar{Y}$ همچنین مکان مرکز هندسی C منشور ناقص ۸ـ۷ـ۶ـ۵ـ۴ـ۳ـ۲ـ۱ را در شکل ۳۲.۵ (الف) مشخص می‌کند که برایند نیز از آن عبور می‌کند.

در توزیع ذوزنقه‌ای شکل فشار، می‌توانیم محاسبات را با تقسیم ذوزنقه به یک مستطیل و یک مثلث [شکل ۳۲.۵ (ج)] و در نظر گرفتن نیروهای هر قسمت به‌صورت مجزا، ساده کنیم. نیروی نشان داده شده به‌وسیلهٔ قسمت مستطیلی در مرکز O صفحه عمل می‌کند و برابر با $R_2=p_2A$ است که در آن A مساحت سطح ۴ـ۳ـ۲ـ۱ از صفحه می‌باشد. نیروی R_1، که به‌وسیلهٔ افزایش مثلثی توزیع فشار نشان داده می‌شود، برابر با $\frac{1}{2}(p_1-p_2)A$ بوده و بر مرکز هندسی بخش مثلثی شکل نشان داده شده وارد می‌آید.

فشار هیدرواستاتیک بر سطوح استوانه‌ای

تعیین نیروی برایند R حاصل از توزیع فشار بر یک سطح انحنادار غوطه‌ور، نسبت به سطح تخت نیازمند محاسبات بیشتری است. به‌عنوان مثال، سطح استوانه‌ای غوطه‌ور در شکل ۳۳.۵ (الف) را در نظر بگیرید که در آن اجزای سطح خمیده با سطح افقی x-y' مایع موازی می‌باشند. مقاطع عمودی قائم بر سطح همگی منحنی AB و توزیع فشار یکسان را نمایش می‌دهند. بنابراین می‌توان از نمایش دوبُعدی شکل ۳۳.۵ (ب) استفاده نمود. برای پیدا کردن R از یک انتگرال‌گیری مستقیم، لازم است که نسبت به مؤلفه‌های x و y در امتداد منحنی AB انتگرال‌گیری شود، چرا که راستای dR دائماً تغییر می‌کند. بنابراین

$$R_x=b\int(p\,dL)_x=b\int p\,dy \quad \text{و} \quad R_y=b\int(p\,dL)_y=b\int p\,dx$$



شکل ۳۳.۵

بخواهیم محل R را به‌دست آوریم، نیاز به یک معادلهٔ گشتاور داریم.
روش دومی برای به‌دست آوردن R وجود دارد که عموماً ساده‌تر است. تعادل بلوک ABC از مایع در زیر سطح مایع را در نظر بگیرید [شکل ۳۳.۵ (ج)]. برایند نیروی ... در خلاف جهت واکنش سطح بر بلوک مایع ظاهر خواهد شد. برایندهای راستای AC و CB برابر با P_y و P_x خواهند بود و به سادگی قابل محاسبه هستند. وزن W از بلوک مایع از مساحت سطح ABC ضربدر مقدار ثابت b و ρg به‌دست می‌آید. وزن W از مرکز هندسی سطح ABC می‌گذرد. بدین‌ترتیب برایند R از معادلات تعادل مربوط به نمودار جسم آزاد بلوک مایع به‌دست می‌آید.

فشار هیدرواستاتیک بر سطوح تخت با هر شکل دلخواه

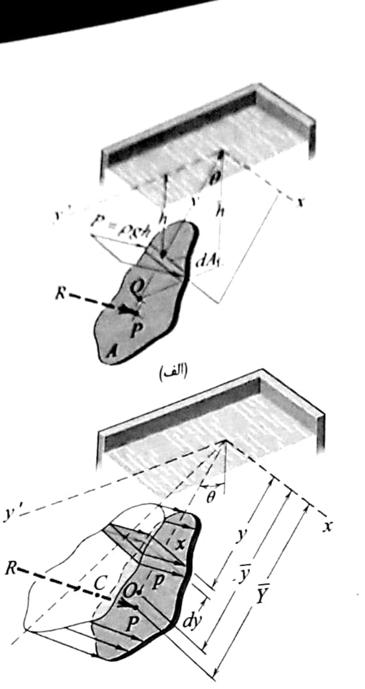
شکل ۳۴.۵ (الف) نشان‌دهندهٔ یک صفحهٔ تخت با شکل نامشخص است که در یک مایع غوطه‌ور شده است. سطح افقی این مایع صفحهٔ x-y' بوده، و صفحهٔ حاوی سطح با راستای قائم زاویهٔ θ می‌سازد. نیروی وارد بر یک نوار دیفرانسیلی با سطح dA از سوی سطح مایع به‌صورت $dR = p\,dA = \rho gh\,dA$ است. فشار p دارای مقداری ثابت در طول نوار است، زیرا در امتداد نوار، تغییر عمق وجود ندارد. نیروی مجموع وارد بر سطح مورد نظر A را با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آوریم و خواهیم داشت

$$R = \int dR = \int p\,dA = \rho g \int h\,dA$$

با جایگزین کردن رابطهٔ مرکز هندسی $\bar{h}A = \int h\,dA$ داریم

$$R = \rho g \bar{h} A \qquad (۲۵.۵)$$

که در آن $\rho g\bar{h}$، فشاری است که در عمق مرکز هندسی O سطح وارد شده و معادل فشار میانگین در کل آن سطح می‌باشد.



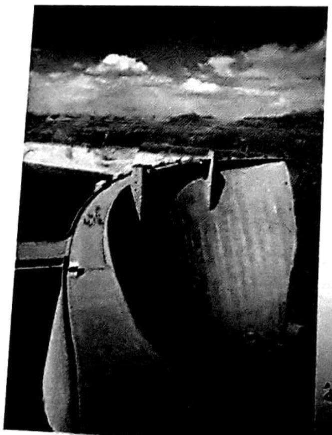
شکل ۳۴.۵

همچنین می‌توانیم برایند R را به‌روش هندسی با استفاده از حجم شکل نشان داده شده در شکل ۳۴.۵ (ب) پیدا کنیم. در اینجا فشار سیال p به‌صورت یک مقدار عمود بر صفحه به‌عنوان مبنا در نظر گرفته شده است. نیروی dR وارد بر سطح دیفرانسیلی $dA = x\,dy$ به‌وسیلهٔ جزء حجم $p\,dA$، که در شکل به‌صورت یک قطاع سایه‌خوردهٔ نشان داده شده است بیان می‌شود و از این‌رو مجموع نیرو به‌وسیلهٔ مجموع حجم استوانه نشان داده شده است. از معادلهٔ (۲۵.۵) مشاهده می‌شود که عمق متوسط استوانهٔ برش‌خورده برابر با فشار میانگینی است که در عمق متناظر مرکز هندسی O سطح تحت فشار، وارد می‌آید.

برای مسائلی که در آنها مرکز هندسی O یا حجم V در ابتدا مشخص نمی‌باشد، می‌توان برای به‌دست آوردن R از انتگرال‌گیری مستقیم استفاده نمود. بنابراین

$$R = \int dR = \int p\,dA = \int \rho ghx\,dy$$

که برای گرفتن انتگرال، نیاز است که عمق h و طول x از نوار افقی سطح دیفرانسیلی، برحسب y بیان شود.



سد گلن کانیون در دریاچهٔ پاول واقع در آریزونا

پس از آنکه برایند به‌دست آمد، لازم است که مکان آن را مشخص کنیم. با استفاده از اصل گشتاورها و در نظر گرفتن محور x در شکل ۳۴.۵ (ب) به‌عنوان محور گشتاور، خواهیم داشت

$$R\bar{Y} = \int y\, dR \quad \text{یا} \quad \bar{Y} = \frac{\int y(px\, dy)}{\int px\, dy} \qquad (۳۶.۵)$$

این رابطهٔ دوم مختصات $\bar{Y}$ تا مرکز هندسی حجم V' از استوانهٔ ناقص تحت فشار را تأمین می‌کند. لذا نتیجه می‌گیریم که نیروی برایند R از مرکز هندسی C از حجم تشکیل شده به‌وسیلهٔ سطح صفحه به‌عنوان مبنا و فشار متغیر به‌صورت خطی، می‌گذرد. نقطهٔ P از صفحه که R به آن وارد می‌شود، مرکز فشار می‌باشد. دقت کنید که مرکز فشار P و مرکز هندسی O سطح صفحه، برهم منطبق نیستند.

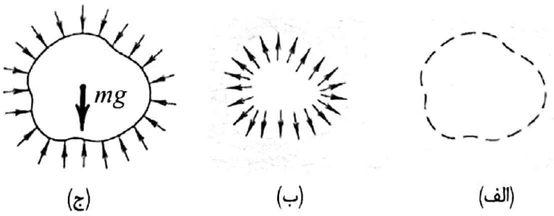
شناوری

کشف اصل شناوری به ارشمیدس نسبت داده شده است. این اصل برای هر سیالی، چه گاز و چه مایع، که در تعادل می‌باشد به راحتی قابل توضیح است. قسمتی از یک سیال را که با یک سطح فرضی بسته نشان داده می‌شود [با مرزبندی خط‌چین در شکل ۳۵.۵ (الف)]، در نظر بگیرید. اگر قادر بودیم که جسم از جنس سیال را از داخل حفره خارج کنیم و به‌جای آن نیروهایی معادل با نیروهایی که بر مرزهای حفره وارد می‌شد، قرار دهیم [شکل ۳۵.۵ (ب)] تغییری در تعادل سیال احاطه‌کنندهٔ حفره ایجاد نمی‌شود. علاوه بر آن، یک نمودار جسم آزاد این بخش از سیال پیش از حذف [شکل ۳۵.۵ (ج)]، نشان می‌دهد که برایند نیروهای حاصل از فشار گسترده بر سطح محصور شدهٔ مجازی باید مساوی و مخالف نیروی وزن جزء سیال باشد و از مرکز جرم آن بگذرد. اگر جزء سیال را توسط جسمی با همان ابعاد جایگزین کنیم، نیروهای سطحی مؤثر بر جسم که در این وضعیت قرار دارد با نیروهای مؤثر بر جزء سیال یکسان هستند. از این‌رو، ملاحظه می‌کنیم که نیروی برایند وارد بر سطح جسم درون یک سیال با وزن سیال جابه‌جا شده برابر و مخالف است و از مرکز جرم سیال جابه‌جا شده می‌گذرد. به این نیروی برایند *نیروی شناوری* می‌گویند

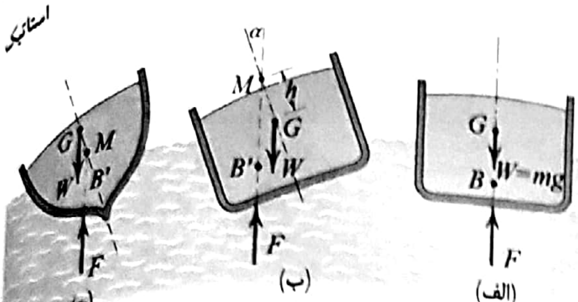
$$F = \rho g V \qquad (۲۷.۵)$$

که در آن ρ چگالی سیال، g شتاب گرانشی و V حجم سیال جابه‌جا شده است. برای مایع یا چگالی ثابت، مرکز جرم مایع جابه‌جا شده بر مرکز هندسی حجم جابه‌جا شده منطبق است.

از این‌رو، وقتی چگالی جسمی کمتر از چگالی سیالی است که در آن کاملاً غوطه‌ور است، عدم توازن نیرو در جهت قائم وجود دارد، و جسم بالا می‌آید. وقتی سیال مایع است، جسم به بالا آمدن خود ادامه می‌دهد تا به سطح مایع برسد و با این فرض که چگالی سیال روی سطح مایع از چگالی جسم کمتر است، در سطح مایع به تعادل می‌رسد. در مرز سطوح یک مایع و گاز همانند آب و هوا، اثر فشار گاز بر آن قسمت از جسم شناور که در بالای مایع است با فشار اضافی درون مایع حاصل از اثر گاز بر سطح مایع به تعادل می‌رسد.



شکل ۳۵.۵

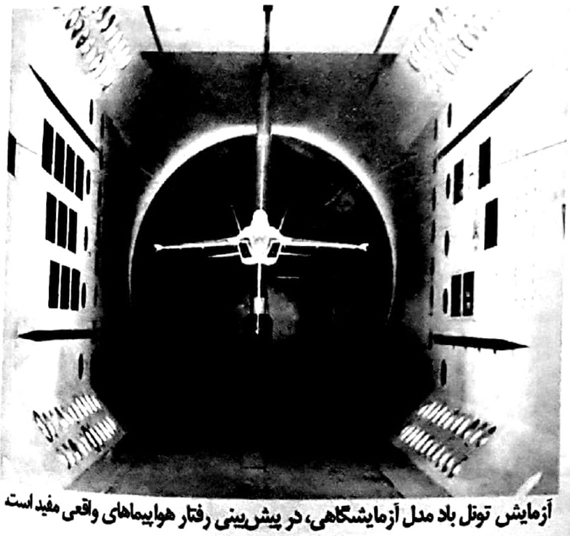


شکل ۳۶.۵

مسئلهٔ مهم در شناوری، تعیین پایداری یک شئ همانند بدنهٔ یک کشتی است که مقطع آن به حالت قائم در شکل ۳۶.۵ (الف) نشان داده شده است. نقطهٔ B مرکز هندسی حجم جابه‌جا شده است و آن را *مرکز شناوری* می‌گویند. برایند نیروهایی که فشار آب بر بدنهٔ کشتی وارد می‌کند، نیروی شناوری F است که از B می‌گذرد و برابر و مخالف وزن W کشتی است. هرگاه کشتی به اندازهٔ زاویه α مطابق شکل ۳۶.۵ (ب) کج شود، شکل هندسی آب جابه‌جا شده تغییر کرده و در نتیجه مرکز شناوری به B' منتقل می‌شود.

طراحان قایق‌های بادبانی پیشرفته باید توزیع فشار هوا روی بادبان‌ها و توزیع فشار آب روی بدنهٔ قایق را در نظر بگیرند.

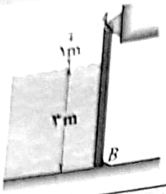
نقطهٔ تقاطع خط عمودی گذرنده از B' با خط مرکزی کشتی را *فرامرکز* M می‌گویند، و فاصلهٔ h نقطهٔ M از مرکز جرم G، *ارتفاع فرامرکز* خوانده می‌شود. در اغلب شکل‌های بدنه‌ها، مشخص می‌شود که به‌ازای زاویه‌های کج‌شدگی تا حدود ۲۰°، h عملاً ثابت می‌ماند. هرگاه M بالای G قرار گیرد، که در شکل ۳۶.۵ (ب) چنین است، گشتاور اصلاح‌کننده‌ای ایجاد می‌شود که تمایل دارد بدنهٔ کشتی را به حالت قائم باز گرداند. اگر مانند شکل ۳۶.۵ (ج)، M زیر G باشد، این گشتاور موجب افزایش کجی می‌شود. بدیهی است این حالت، حالت ناپایداری بوده و در طراحی کشتی‌ها باید از آن جلوگیری کرد.



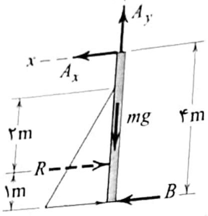
آزمایش تونل باد مدل آزمایشگاهی، در پیش‌بینی رفتار هواپیماهای واقعی مفید است

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۹.۵

یک ورق مستطیلی که مقطع عمودی AB آن در شکل نشان داده شده است، ۴m ارتفاع و ۶m پهنا (عمود بر صفحه کاغذ) دارد و جلوی کانال آب شیرین به عمق ۳m را می‌گیرد. این ورق حول محور افقی در طول لبهٔ بالای گذرنده از A مفصل شده و برجستگی ثابت B که به‌صورت افقی به لبهٔ پایین ورق تکیه داده است، از باز شدن آن جلوگیری می‌کند. نیروی B وارد شده از طرف برجستگی بر ورق را بیابید.



حل: نمودار جسم آزاد مقطع ورق در شکل نشان داده شده است. این نمودار شامل مؤلفه‌های قائم و افقی نیرو در A، وزن نامشخص $W = mg$ ورق، نیروی افقی مجهول B و برایند R توزیع مثلثی فشار وارد بر وجه عمودی است. چگالی آب شیرین برابر $\rho = ۱٫۰۰۰\ \text{Mg/m}^۳$ است، از این‌رو فشار میانگین عبارت است از



$$[p_{av} = \rho g\bar{h}] \qquad p_{av} = ۱٫۰۰۰(۹٫۸۱)\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۱۴٫۷۲\ \text{kPa}$$

① برایند R نیروهای فشاری وارد بر ورق برابر است با

$$[R = p_{av}A] \qquad R = (۱۴٫۷۲)(۳)(۶) = ۲۶۵\ \text{kN}$$

این نیرو به مرکز هندسی توزیع مثلثی فشار که به فاصلهٔ ۱m از پایین ورق قرار دارد وارد می‌شود. با مساوی صفر قرار دادن مجموع گشتاورها حول A، نیروی مجهول B به‌دست می‌آید. از این‌رو

$$[\Sigma M_A = ۰] \qquad ۳(۲۶۵) - ۴B = ۰ \qquad B = ۱۹۸٫۷\ \text{kN}$$ ج.

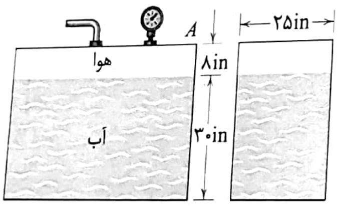
راهنمایی مفید

① توجه کنید که یکاهای فشار ρgh عبارت‌اند از

$$\left(۱۰^۳\frac{\text{kg}}{\text{m}^۳}\right)\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}\right)(\text{m}) = \left(۱۰^۳\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^۲}\right)\left(\frac{۱}{\text{m}^۲}\right) = \text{kN/m}^۲ = \text{kPa}$$

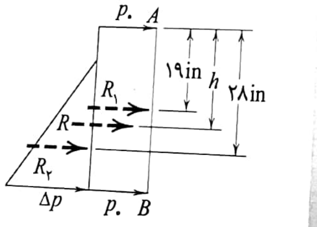
مسئلهٔ نمونهٔ ۲۰.۵

هوای داخل یک مخزن بستهٔ آب شیرین تحت فشار $۰٫۸۰\ \text{lb/in}^۲$ (بالای فشار جو) قرار دارد. نیروی برایند R وارد شده از هوا و آب بر انتهای مخزن را تعیین کنید.



حل: توزیع فشار بر سطح انتهایی نشان داده شده است، که در آن $p_۰ = ۰٫۸۰\ \text{lb/in}^۲$. وزن مخصوص آب شیرین برابر است با $\mu = \rho g = ۶۲٫۴/۱۷۲۸ = ۰٫۰۳۶۱\ \text{lb/in}^۳$. بنابراین، رشد فشار Δp حاصل از آب برابر است با

$$\Delta p = \mu\Delta h = ۰٫۰۳۶۱(۳۰) = ۱٫۰۸۳\ \text{lb/in}^۲$$



① نیروهای برایند $R_۱$ و $R_۲$ که به‌ترتیب از توزیع‌های مستطیلی و مثلثی فشار حاصل می‌شوند، عبارتند از

$$R_۱ = p_۰A_۱ = ۰٫۸۰(۳۸)(۲۵) = ۷۶۰\ \text{lb}$$

$$R_۲ = \Delta p_{av}A_۲ = \frac{۱٫۰۸۳}{۲}(۳۰)(۲۵) = ۴۰۶\ \text{lb}$$

بنابراین برایند عبارت است از

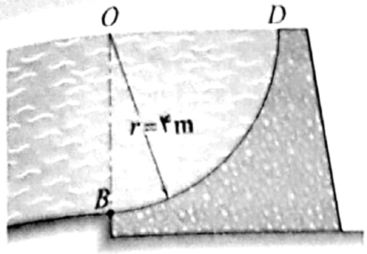
$$R = R_۱ + R_۲ = ۷۶۰ + ۴۰۶ = ۱۱۶۶\ \text{lb}$$ ج.

مکان اثر R را با اعمال اصل گشتاورها حول A مشخص می‌کنیم، با توجه به اینکه $R_۱$ در مرکز و در عمق ۳۸ in و $R_۲$ بر مرکز هندسی توزیع مثلثی فشار که در عمق ۲۰ in پایین‌تر از سطح آب، یا ۲۸ in = ۸+۲۰ پایین‌تر از A قرار دارد، وارد می‌شوند، از این‌رو

$$[illegible]h = ۷۶۰(۱۹) + ۴۰۶(۲۸) \qquad h = ۲۲٫۱\ \text{in}$$ ج.

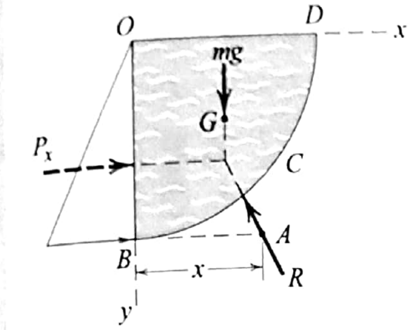
راهنمایی مفید

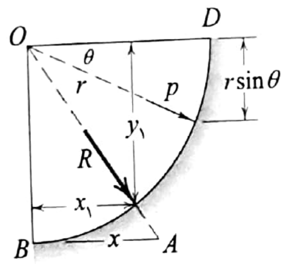
① تقسیم توزیع فشار به این دو بخش ساده‌ترین روش [illegible] انجام محاسبات است.



مسئلهٔ نمونهٔ ۲۱.۵

نیروی برایند R را که آب بر سطح سد استوانه‌ای وارد می‌کند، تعیین کنید. چگالی آب شیرین $۱/۰۰۰\ Mg/m^۳$ است و سد طولی برابر با b، عمود بر صفحهٔ کاغذ، و مساوی $۳۰m$ دارد.





حل: بخش دایره‌ای BDO آب مجزا شده و نمودار جسم آزاد آن در شکل نشان داده شده است. نیروی P_x برابر است با

۱
$$P_x = \rho g\bar{h}A = \frac{\rho g r}{۲} br = \frac{(۱/۰۰۰)(۹/۸۱)(۴)}{۲}(۳۰)(۴) = ۲۳۵۰\ kN$$

وزن W از مرکز جرم G مقطع ربع دایره می‌گذرد و برابر است با

$$mg = \rho g V = (۱/۰۰۰)(۹/۸۱)\frac{\pi(۴)^۲}{۴}(۳۰) = ۳۷۰۰\ kN$$

تعادل مقطع آب ایجاب می‌کند که

$$[\Sigma F_x = ۰] \qquad R_x = P_x = ۲۳۵۰\ kN$$
$$[\Sigma F_y = ۰] \qquad R_y = mg = ۳۷۰۰\ kN$$

نیروی برایند R، از طرف سیال بر سد، برابر و مخالف نیروی نشان داده شدهٔ وارد بر سیال می‌باشد و عبارت است از

$$\left[R = \sqrt{R_x^{۲} + R_y^{۲}}\right] \qquad R = \sqrt{(۲۳۵۰)^۲ + (۳۷۰۰)^۲} = ۴۳۸۰\ kN \qquad \text{ج.}$$

مختصهٔ x نقطه A را که R از آن عبور می‌کند، می‌توان از اصل گشتاورها به‌دست آورد. استفاده از B به‌عنوان مرکز گشتاور نتیجه می‌دهد

$$P_x\frac{r}{۳} + mg\frac{۴r}{۳\pi} - R_y.x = ۰, \quad x = \frac{۲۳۵۰\left(\frac{۴}{۳}\right) + ۳۷۰۰\left(\frac{۱۶}{۳\pi}\right)}{۳۷۰۰} = ۲/۵۵\ m \qquad \text{ج.}$$

۲ ***راه‌حل دیگر:*** نیروی وارد شده بر سطح سد را می‌توان با انتگرال‌گیری مستقیم از مؤلفه‌ها به‌دست آورد

$$dR_x = p\,dA\cos\theta \qquad \text{و} \qquad dR_y = p\,dA\sin\theta$$

که در آن $p = \rho g h = \rho g r \sin\theta$ و $dA = b(r\,d\theta)$. از این‌رو

$$R_x = \int_۰^{\pi/۲} \rho g r^۲ b \sin\theta\cos\theta\,d\theta = -\rho g r^۲ b\left[\frac{\cos ۲\theta}{۴}\right]_۰^{\pi/۲} = \frac{۱}{۲}\rho g r^۲ b$$

$$R_y = \int_۰^{\pi/۲} \rho g r^۲ b \sin^۲\theta\,d\theta = \rho g r^۲ b\left[\frac{\theta}{۲} - \frac{\sin ۲\theta}{۴}\right]_۰^{\pi/۲} = \frac{۱}{۴}\pi\rho g r^۲ b$$

بنابراین، $R = \sqrt{R_x^{۲} + R_y^{۲}} = \frac{۱}{۲}\rho g r^۲ b\sqrt{۱ + \pi^۲/۴}$. جایگذاری مقادیر عددی نتیجه می‌دهد

$$R = \frac{۱}{۲}(۱/۰۰۰)(۹/۸۱)(۴^۲)(۳۰)\sqrt{۱ + \pi^۲/۴} = ۴۳۸۰\ kN \qquad \text{ج.}$$

از آنجا که dR همواره از نقطهٔ O می‌گذرد، ملاحظه می‌کنیم که R نیز از O می‌گذرد، از این‌رو گشتاورهای R_x و R_y حول O باید یکدیگر را حذف کنند. بنابراین می‌نویسیم $R_x y_۱ = R_y.x_۱$، که نتیجه می‌دهد

$$x_۱/y_۱ = R_x/R_y = \left(\frac{۱}{۲}\rho g r^۲ b\right)/\left(\frac{۱}{۴}\pi\rho g r^۲ b\right) = ۲/\pi$$

از مثلث‌های متشابه ملاحظه می‌کنیم که

$$x/r = x_۱/y_۱ = ۲/\pi \qquad \text{و} \qquad x = ۲r/\pi = ۲(۴)/\pi = ۲/۵۵\ m \qquad \text{ج.}$$

راهنمایی‌های مفید

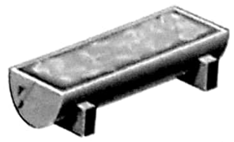
۱ اگر پرسشی در مورد یکاهای $\rho g\bar{h}$ دارید، راهنمایی مسئلهٔ نمونهٔ ۱۹.۵ را ببینید.

۲ روش انتگرال‌گیری در این مسئله به این دلیل قابل اجراست که کمان ربع دایره شکل هندسی ساده‌ای دارد.

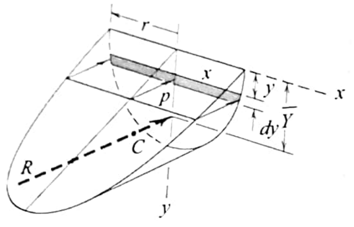
Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۲.۵

نیروی برایند R وارد بر انتهای نیم‌دایره‌ای مخزن پر از آب نشان‌داده‌شده را تعیین کنید. نتایج به‌دست آمده را برحسب شعاع r و چگالی ρ بیان کنید.



حل ۱: ابتدا R را با انتگرال‌گیری مستقیم به‌دست می‌آوریم. در یک نوار افقی به مساحت $dA = ۲x\ dy$ که بر آن فشار $p = \rho g y$ اعمال می‌شود، افزایش نیروی برایند برابر است با $dR = p\ dA$. بنابراین



$$R = \int p\, dA = \int \rho g y\, (۲x\ dy) = ۲\rho g \int_{۰}^{r} y \sqrt{r^۲ - y^۲}\, dy$$

انتگرال‌گیری نتیجه می‌دهد

$$R = \frac{۲}{۳} \rho g r^۳$$ ج.

محل R با استفاده از اصل گشتاورها تعیین می‌شود. گشتاورگیری حول محور x نتیجه می‌دهد

$$\left[R\bar{Y} = \int y\, dR\right] \qquad \frac{۲}{۳}\rho g r^۳ \bar{Y} = ۲\rho g \int_{۰}^{r} y^۲ \sqrt{r^۲ - y^۲}\, dy$$

انتگرال‌گیری نتیجه می‌دهد

$$\frac{۲}{۳}\rho g r^۳ \bar{Y} = \frac{\rho g r^۴}{۴}\frac{\pi}{۲} \qquad \text{و} \qquad \bar{Y} = \frac{۳\pi r}{۱۶}$$ ج.

حل ۲: برای تعیین R، می‌توانیم مستقیماً از معادله (۲۵.۵) استفاده کنیم، که در آن فشار میانگین $\rho g \bar{h}$ و $\bar{h}$ مختصهٔ مرکز سطح است که فشار در آنجا وارد می‌شود. برای یک سطح نیم‌دایره‌ای $\bar{h} = ۴r/(۳\pi)$ داریم

$$\left[R = \rho g \bar{h} A\right] \qquad R = \rho g \frac{۴r}{۳\pi}\frac{\pi r^۲}{۲} = \frac{۲}{۳}\rho g r^۳$$ ج.

که حجم شکل تحت فشار است.

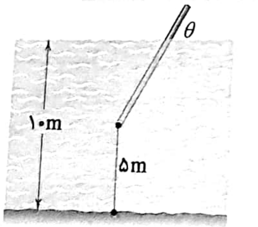
❶ برایند R، از مرکز هندسی C، حجمی وارد می‌شود که با شکل تحت فشار تعریف می‌شود محاسبهٔ مساحت مرکز هندسی $\bar{Y}$ نیازمند همان انتگرالی است که در حل ۱ به‌دست آمد.

راهنمایی مفید

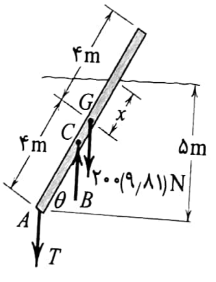
❶ مراقب باشید که مرتکب این فرض غلط نشوید که R از مرکز هندسی سطح تحت فشار می‌گذرد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۳.۵

قطعه شناوری به شکل یک میلهٔ یکنواخت ۸ متری و به قطر ۰٫۲ m، جرمی برابر ۲۰۰ kg دارد و انتهای آن توسط کابل ۵ متری به بستر دریاچهٔ آب شیرین، بسته شده است. اگر عمق آب ۵ m باشد، زاویه θ را که میله با افق می‌سازد، محاسبه کنید.



حل: نمودار جسم آزاد قطعه شناور، نشان‌دهندهٔ نیروی وزن گذرنده از G، کشش عمودی T در کابل نگهدارنده، و نیروی شناوری B است که از مرکز هندسی C، مربوط به قسمت شناور می‌گذرد. فرض می‌کنیم x فاصله از G تا سطح آب باشد. چگالی آب شیرین برابر است با $\rho = ۱۰^۳\ \text{kg/m}^۳$، پس نیروی شناوری عبارت است از



$$[B = \rho g V] \qquad B = ۱۰^۳(۹٫۸۱)\pi(۰٫۱)^۲(۴+x)\ \text{N}$$

تعادل گشتاورها، $\Sigma M_A = ۰$، حول محور A نتیجه می‌دهد

$$۲۰۰(۹٫۸۱)(۴\cos\theta) - \left[۱۰^۳(۹٫۸۱)\pi(۰٫۱)^۲(۴+x)\right]\frac{۴+x}{۲}\cos\theta = ۰$$

از این‌رو

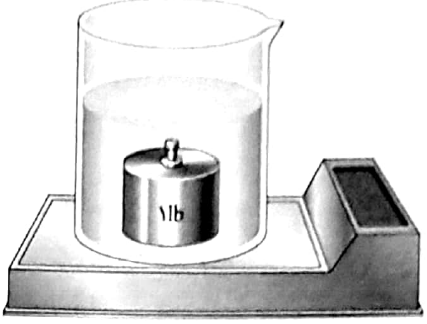
$$x = ۳٫۱۴\ \text{m} \qquad \text{و} \qquad \theta = \sin^{-۱}\left(\frac{۵}{۴+۳٫۱۴}\right) = ۴۴٫۵°$$ ج.

Scanned by CamScanner

مسائل

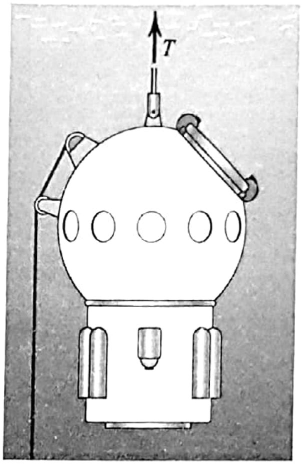
مسائل مقدماتی

۱۸۵.۵ بشری حاوی آب شیرین بر روی ترازو قرار گرفته است که استوانه‌ای فولادی 1lb به آن اضافه می‌شود. نیروی عمودی که استوانه بر کف بشر وارد می‌کند چقدر است؟ با اضافه کردن استوانه، درجهٔ ترازو چقدر افزایش می‌یابد؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



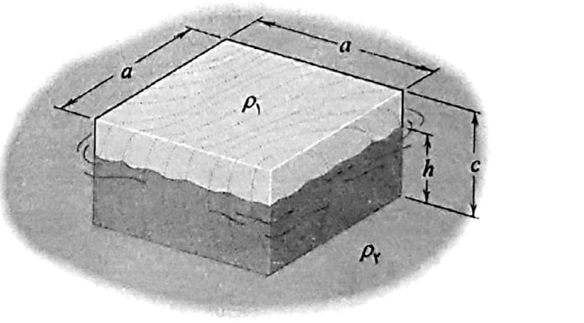
شکل م ۱۸۵.۵

۱۸۶.۵ اتاقک غواصی نشان‌داده‌شده دارای جرمی معادل ۶٫۷Mg است که شامل تجهیزات، پرسنل، و وزنه‌ها می‌باشد. هنگامی‌که اتاقک به عمق ۱٫۲km اقیانوس برده می‌شود، کشش کابل معادل ۸kN می‌شود. حجم کل V جابه‌جا شده به‌وسیلهٔ اتاقک را محاسبه نمایید.



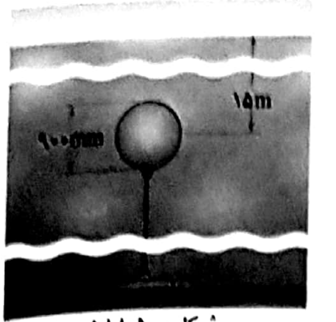
شکل م ۱۸۶.۵

۱۸۷.۵ قطعهٔ مکعب مستطیل شکلی با چگالی ρ_1 در مایعی با چگالی ρ_2 شناور است. معین کنید نسبت $r = h/c$ که در آن h عمق غوطه‌وری قطعه است. مقدار r را برای یک قطعه از چوب بلوط در آب شیرین و یک قطعهٔ فولادی شناور در جیوه به‌دست آورید.



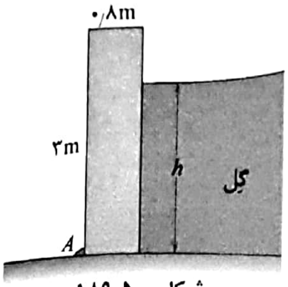
شکل م ۱۸۷.۵

۱۸۸.۵ یک شناور فولادی کروی ۱۵۰ کیلوگرمی به‌قطر ۹۰۰mm در آب شور به‌فاصلهٔ ۱۵m از سطح، مطابق شکل مهار شده است. جرم m را برای مقدار آهنی که لازم است در داخل شناور قرار داده شود، طوری تعیین کنید که کشش در کابل متصل به شناور از ۱٫۵kN فراتر نرود. برای تغییرات ناچیز در چگالی آب، آیا شناوری به عمق غوطه‌وری وابسته است؟



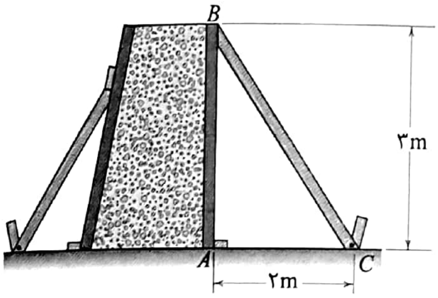
شکل م ۱۸۸.۵

۱۸۹.۵ عمق h گِل را طوری تعیین کنید که دیوار نگهدارندهٔ بتنی به‌ارتفاع ۳m، در آستانهٔ واژگون شدن حول لبهٔ جلویی A قرار گیرد. چگالی گِل را برابر با ۱۷۶۰kg/m³ و چگالی بتن را برابر با ۲۴۰۰kg/m³ فرض کنید.



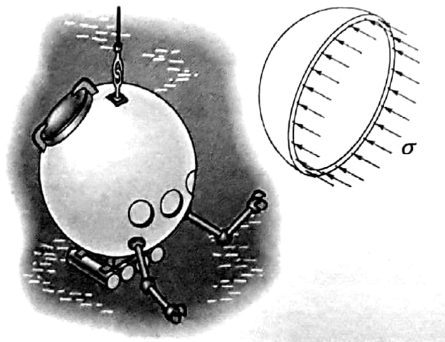
شکل م ۱۸۹.۵

۱۹۰.۵ نگهدارنده‌های یک دیوارهٔ بتنی در شکل نشان داده شده‌اند. برای هر ۱٫۵m از طول دیوار، یک نگهدارندهٔ BC وجود دارد. با این فرض که اتصالات در نقاط A، B و C به‌صورت اتصالات لولایی در نظر گرفته شوند، نیروی فشاری را در نگهدارندهٔ BC محاسبه کنید. بتن خیس را می‌توان به‌صورت مایعی با چگالی ۲۴۰۰kg/m³ در نظر گرفت.



شکل م ۱۹۰.۵

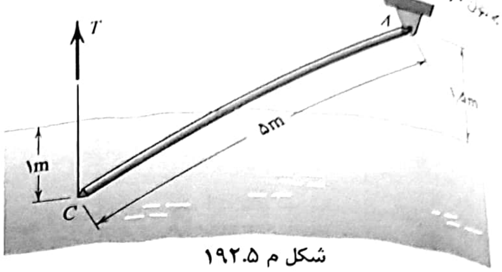
۱۹۱.۵ اتاقک غواصی مخصوص اعماق زیاد به شکل یک پوستهٔ کروی به‌قطر ۱۵۰۰mm ساخته شده و به‌وسیلهٔ سرب سنگین می‌شود تا نیروی وزن آن از شناوری آن بیشتر شود. در یک عملیات فرو بردن به عمق ۳km، فشار جو در آن حفظ می‌شود. ضخامت پوسته معادل ۲۵mm است. برای این عمق، مقدار تنش فشاری σ را که بر یک مقطع قطری پوسته وارد می‌شود، محاسبه کنید. شکل این مقطع در سمت راست نشان داده شده است.



شکل م ۱۹۱.۵

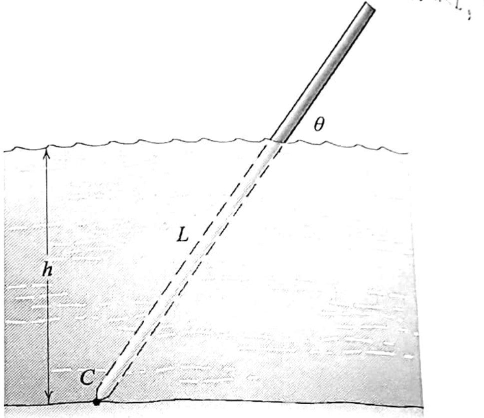
Scanned by CamScanner

۱۹۲.۵ میلهٔ یکنواختی به‌جرم ۶۲kg به قطر ۱۵۰mm در نقطهٔ A لولا شده و قسمت [illegible] آن در آب شیرین فرو رفته است. کشش T در کابل عمودی را طوری تعیین کنید [illegible] به‌وسیلهٔ آن نقطهٔ C را در عمق یک متری حفظ کرد.



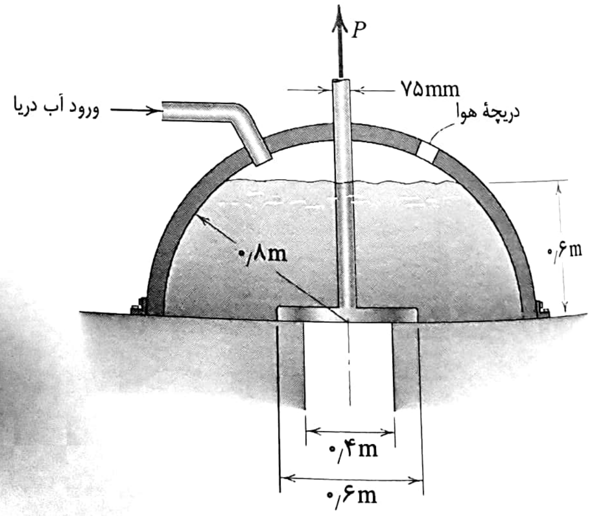
شکل م ۱۹۲.۵

۱۹۳.۵ یک سر میلهٔ یکنواختی با طول L و چگالی ρ' در نقطهٔ C از انتهای یک مخزن از مایعی به چگالی ρ و عمق h متصل شده است. در شرایط $\rho' < \rho$ و $h < L$، زاویهٔ θ به‌وجود آمده را تعیین کنید.



شکل م ۱۹۳.۵

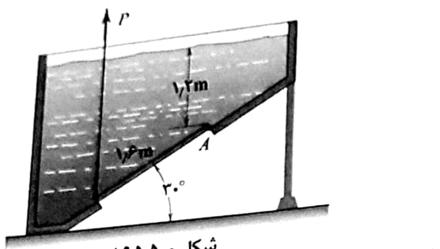
۱۹۴.۵ هنگامی که سطح آب دریا در اتاقک نیم‌کروی به ۰٫۶m همانند شکل می‌رسد، پیستون بالا رفته و اجازهٔ ورود آب به لولهٔ عمودی داده می‌شود. برای چنین وضعیتی مطلوب است تعیین: (الف) فشار متوسط σ که بر قسمت آب‌بندی لوله وارد می‌شود، پیش از آنکه نیرو برای بالا بردن پیستون وارد آید و (ب) نیروی P (علاوه بر نیروی مورد نیاز برای تحمل وزن) برای بلند کردن پیستون. پس از بلندشدن پیستون در اثر نیروی P، در تمام فضاهای خالی، فشار را برابر با فشار جو فرض کنید.



شکل م ۱۹۴.۵

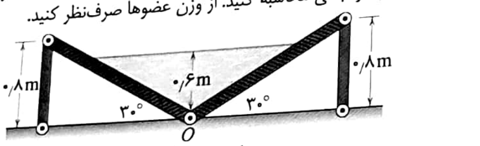
مسائل برگزیده

۱۹۵.۵ مقطع یک مخزن آب شیرین با انتهای شیبدار در شکل نشان داده شده است. یک درب مستطیلی به ابعاد ۱٫۶m در ۰٫۸m (عمود بر صفحهٔ شکل) در انتهای مخزن در نقطهٔ A لولا شده و در خلاف جهت فشار آب به‌وسیلهٔ کشش P گشوده می‌شود نیروی P را محاسبه کنید.



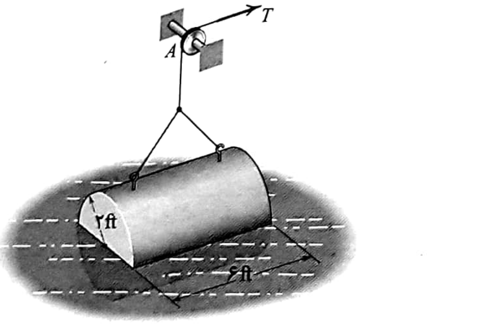
شکل م ۱۹۵.۵

۱۹۶.۵ کناره‌های یک آبشخور V_شکل، که مقطع آن در شکل نشان داده شده است، در محل تقاطع‌شان یعنی O لولا شده‌اند. دو طرف دیگر این آبشخور به‌وسیلهٔ نبشی‌های عمودی که به‌فاصلهٔ ۲ متر از هم لولا شده، نگه داشته می‌شوند. نیروی فشاری C را در هر نبشی محاسبه کنید. از وزن عضوها صرف‌نظر کنید.



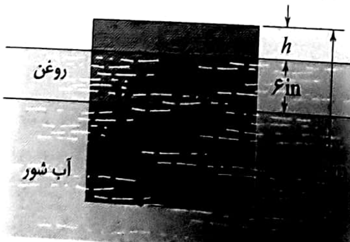
شکل م ۱۹۶.۵

۱۹۷.۵ استوانهٔ بتنی توپری به طول ۶ft و قطر ۴ft به‌وسیلهٔ یک کابل گذرنده از قرقره در نقطهٔ A تا نیمه در آب شیرین فرو رفته است. کشش T را در کابل محاسبه نمایید. استوانه به‌وسیلهٔ یک پوشش پلاستیکی، ضد آب شده است. (در صورت نیاز از جدول د.۱ در پیوست د استفاده نمایید.)



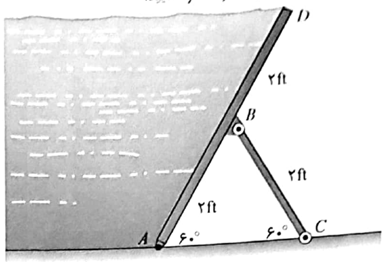
شکل م ۱۹۷.۵

۱۹۸.۵ یک قطعهٔ چوبی به شکل یک مکعب ۱۶in ضد آب در یک مخزن آب شور با لایه‌ای ۶ اینچی روغن در بالای سطح آب، قرار گرفته است. با فرض اینکه مکعب در عمق نشان داده شده شناور باشد، ارتفاع h این قطعه در بالای سطح روغن را محاسبه کنید. وزن دقیق روغن، آب شور و چوب به‌ترتیب برابر با ۵۶، ۶۴ و $۵۰ lb/ft^3$ می‌باشد.



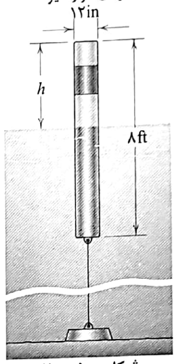
شکل م ۱۹۸.۵

۱۹۹.۵ انتهای یک کانال آب شیرین به عرض ۱۰ft (عمود بر صفحهٔ کاغذ) توسط یک مانع مستطیلی که در مقطع ABD نشان داده شده، مسدود شده است. اجزای نگهدارندهٔ BC به فاصلهٔ ۲ft از یکدیگر در طول ۱۰ft قرار گرفته‌اند. فشار C در هر عضو را محاسبه کنید. از وزن آنها صرف‌نظر نمایید.



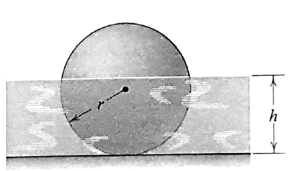
شکل م ۱۹۹.۵

۲۰۰.۵ یک شناور که برای علامت‌گذاری استفاده می‌شود از یک استوانه به طول ۸ft و قطر ۱۲in با وزن ۱۸۰lb ساخته شده و توسط یک کابل مطابق شکل به کف متصل شده است. اگر در ارتفاع مد سطح آب $h = ۲ft$ باشد، کشش T را در کابل محاسبه نمایید. همچنین مقدار h را برای حالتی پیدا کنید که کابل در اثر پایین آمدن سطح آب شل می‌شود. وزن مخصوص آب دریا $۶۴lb/ft^۳$ است. فرض کنید نیروی شناوری بر انتهای آن وارد می‌آید تا در حالت عمودی قرار گیرد.



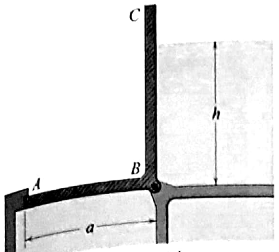
شکل م ۲۰۰.۵

۲۰۱.۵ یک کرهٔ توپُر همگن با شعاع r در انتهای یک مخزن حاوی مایع با چگالی ρ_l، قرار گرفته و چگالی آن از چگالی ρ_s کره بیشتر است. با پُر شدن مخزن و با رسیدن مایع به‌ارتفاع h، کره شناور می‌شود. رابطه‌ای برای ρ_s کره به‌دست آورید.



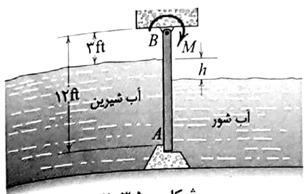
شکل م ۲۰۱.۵

۲۰۲.۵ دریچهٔ لولا شدهٔ ABC یک دهانه به عرض b را (عمود بر صفحهٔ کاغذ) در یک کانال آب مسدود می‌کند. آب دارای دسترسی آزاد به قسمت‌های پایینی و همچنین به قسمت راست دریچه می‌باشد. هنگامی که سطح آب به مقدار مشخص h می‌رسد، دریچه باز می‌شود. مقدار بحرانی h را محاسبه کنید. از جرم دریچه صرف‌نظر نمایید.



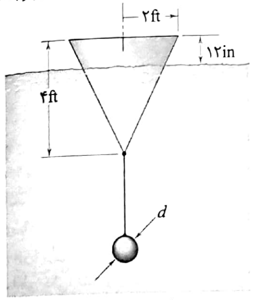
شکل م ۲۰۲.۵

۲۰۳.۵ دریچهٔ مستطیلی که مقطع آن نشان داده شده است، طولی معادل ۱۰ft د... (عمود بر صفحهٔ کاغذ) و از بالا در نقطهٔ B لولا شده است. دریچه، کانال را به ... قسمت آب شیرین در سمت چپ و آب شور در سمت راست تقسیم می‌کند. گشتاور ... لازم برای میل‌گردان دریچه در B را طوری تعیین کنید که با کاهش سطح آب شیر... به $h = ۳ft$، از باز شدن دریچه جلوگیری کند.



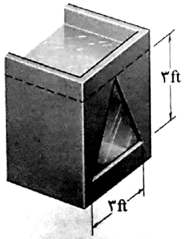
شکل م ۲۰۳.۵

۲۰۴.۵ سطح مخروطی و قاعدهٔ دایره‌ای یک شناور آب شور از صفحهٔ نازک فلزی تشکیل شده است که وزنی برابر با ۱۰٫۲ پوند بر فوت مربع دارد. قطر d از کرهٔ سربی آویزان از محو... شناور را طوری تعیین کنید که فاصلهٔ قاعدهٔ شناور از سطح آب برابر با ۱۲in باشد.



شکل م ۲۰۴.۵

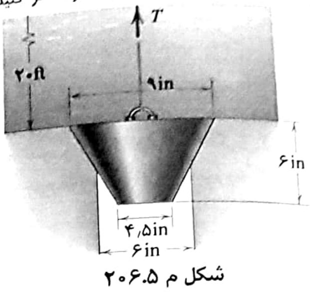
۲۰۵.۵ نیروی کل R وارد شده به‌وسیلهٔ آب شور داخل مخزن بر پنجرهٔ مثلثی شکل را به‌دست آورید. سطح آب با نقطهٔ بالای پنجره یکسان است. همچنین H فاصلهٔ R تا سطح آب را تعیین کنید.



شکل م ۲۰۵.۵

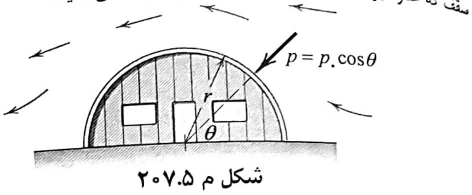
Scanned by CamScanner

۲۰۶.۵ دریوش چدنی، چاهک یک مخزن آب شیرین را که تا ارتفاع ۲۰ft پر شده، مسدود کرده است. کشش T مورد نیاز برای برداشتن دریوش از سوراخ مخروطی را محاسبه کنید. فشار در لولهٔ چاهک و سطح آب‌بندی برابر با فشار جو است. از اصطکاک مکانیکی میان دریوش و سطح اتکای آن صرف‌نظر کنید.



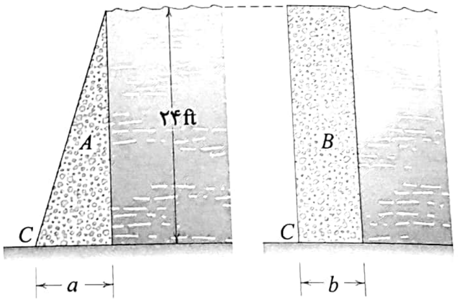
شکل م ۲۰۶.۵

۲۰۷.۵ کلبه‌ای تحت وزش باد افقی قرار گرفته و فشار p در راستای سقف دایره‌ای به میزان $p_\circ \cos\theta$ تخمین زده شده است. فشار در سمت بادگیر کلبه مثبت و در سمت بادپناه کلبه منفی است. مقدار کل نیروی برش افقی Q بر پی را به‌ازای یکای طول سقف که عمود بر صفحهٔ کاغذ اندازه‌گیری می‌شود تعیین کنید.



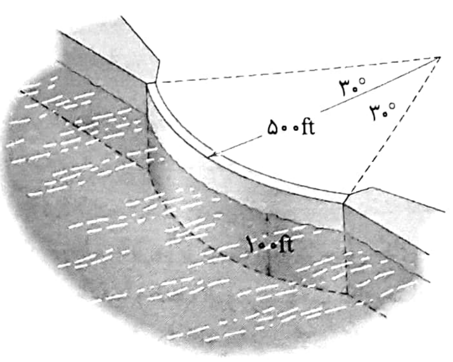
شکل م ۲۰۷.۵

۲۰۸.۵ در طراحی یک سد بتنی کوچک آب شیرین، دو مقطع مثلثی و مستطیلی در نظر گرفته شده است. از نقطه نظر مقاومت در برابر واژگونی حول C، کدام مقطع به بتن کمتری نیاز دارد و این کمتر بودن در یکای طول سد چقدر است؟ وزن مخصوص بتن ۱۵۰lb/ft^3 است.



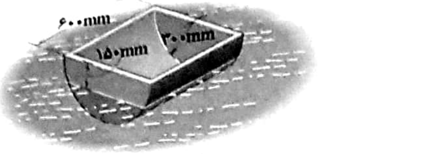
شکل م ۲۰۸.۵

۲۰۹.۵ سمت بالادست یک سد قوسی به شکل سطح استوانه‌ای قائمی به شعاع ۵۰۰ft با زاویهٔ مرکزی °۶۰ است. اگر عمق آب شیرین ۱۰۰ft باشد، نیروی کل R وارد شده از طرف آب بر سد را تعیین کنید.



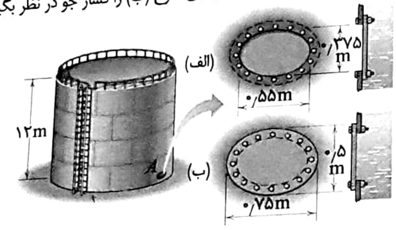
شکل م ۲۰۹.۵

۲۱۰.۵ جرم پوستهٔ فولادی نیم استوانه‌ای با دو انتهای بسته ۲۶٫۶kg است. جرم m وزنهٔ تعادل لازم در داخل پوسته را به گونه‌ای تعیین کنید که پوسته با عمقی در حد نصف شعاع خود، یعنی ۱۵۰mm در آب شیرین شناور باشد.



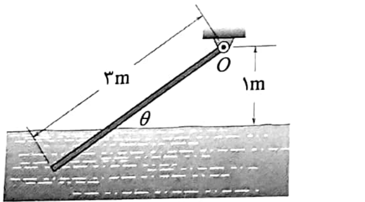
شکل م ۲۱۰.۵

۲۱۱.۵ دریچهٔ دسترسی A در زمان خالی بودن مخزن امکان ورود به مخزن از سطح زمین را برای انجام اعمال نگهداری مهیا می‌سازد. دو طرح مختلف برای دریچهٔ یک مخزن نشان داده شده است. اگر مخزن پر از آب شیرین باشد، فشار میانگین σ وارد بر دریچهٔ طرح (الف) را معین کنید و افزایش کشش ΔT در هر ۱۶ پیچ در طرح (ب) را تخمین بزنید. فشار وارد بر سطح هر سوراخ را ثابت و فشار در سطح آب‌بندی طرح (ب) را فشار جو در نظر بگیرید.



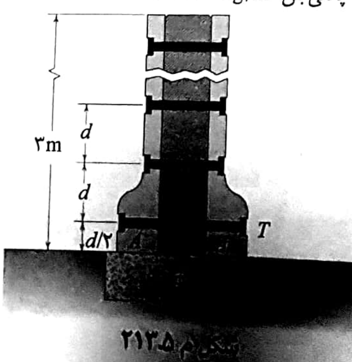
شکل م ۲۱۱.۵

۲۱۲.۵ الواری به طول ۳m و چگالی ۸۰۰kg/m^3 که مقطع آن نشان داده شده، در نقطهٔ O لولا شده است. درصورتی‌که سطح آب شیرین مطابق شکل باشد، زاویهٔ θ را که الوار با امتداد افقی می‌سازد، حساب کنید.



شکل م ۲۱۲.۵

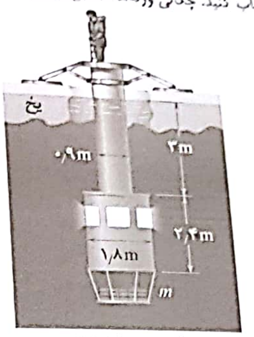
۲۱۳.۵ اجزای یک پی‌ریزی بتنی که برای ساخت خانه‌های جدید به‌کار می‌رود در شکل نشان داده شده است. در این پی‌ریزی پس از کرسی پی F، قالب‌های پلی‌استون A نصب می‌شوند و مخلوط کم‌عیار بتنی B را بین قالب‌ها می‌ریزند. برای جلوگیری از جدا شدن قالب‌ها، از بادبندهای T شکل استفاده می‌کنند. پس از سفت شدن بتن، قالب‌ها در جای خود باقی مانده و نقش عایق را دارند. اگر بخواهیم کشش در هر یک از بادبندها بیش از ۶٫۵kN نباشد، فاصلهٔ یکنواخت d بین گیره‌ها چه اندازه باید باشد؟ هر فرض که در نظر می‌گیرید، بیان کنید. چگالی بتن ۲۴۰۰kg/m^3 است.



شکل م ۲۱۳.۵

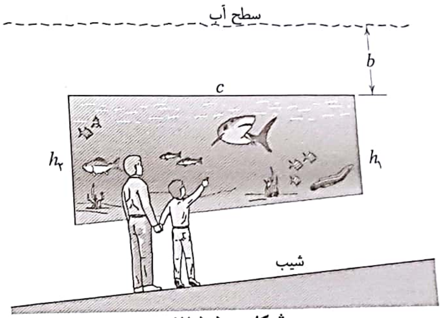
Scanned by CamScanner

۲۱۴.۵ سازه‌ای که برای بازدید از زندگی جانوران دریایی موجود در بین یخ‌های درون آبهای قطبی به کار می‌رود، از یک محفظهٔ استوانه‌ای مشاهده متصل به مجرای استوانه‌ای تشکیل شده است که انتهای بالایی آن برای ورود و خروج باز است. وزنه‌های مورد نیاز در طبقهٔ زیر محفظهٔ مشاهده قرار دارند. برای اطمینان از شرایط پایداری سازه، باید پایه‌های سازه با نیرویی برابر حداقل ۱۵ درصد نیروی شناوری کل سازهٔ غوطه‌ور روی یخ قرار بگیرند. اگر جرم سازه بدون وزنه‌ها ۵٫۷Mg باشد، جرم m لازم وزنه‌ها را حساب کنید. چگالی وزنه‌ها $۱۱٫۳۷Mg/m^3$ است.



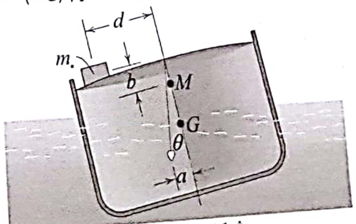
شکل م ۲۱۴.۵

۲۱۵.۵ دریچه چهار وجهی نامنظم در آکواریوم دریایی دارای ابعادی مطابق شکل است. به شرطی که مقادیر عددی وجود داشته باشد، به‌کمک دستگاه مختصات مناسب و نمودارها، دو روش را بیان کنید که بتوان نیروی برایند R وارد بر شیشه و حاصل از فشار آب و محل قائم R را به‌دست آورد.



شکل م ۲۱۵.۵

۲۱۶.۵ تعیین دقیق مرکز جرم کشتی‌ها، G، از طریق محاسبه معمولاً مشکل است. بنابراین با یک آزمایش ساده بر روی یک کشتی حاوی بار می‌توان این کار را انجام داد. در این آزمایش با توجه به شکل، جرم خارجی معلوم m_0 را در فاصلهٔ d از خط مرکزی کشتی قرار می‌دهند و زاویه انحراف کشتی را با یک شاقول اندازه می‌گیرند. جابه‌جایی کشتی و محل قرارگیری فرامرکز M معلوم هستند. ارتفاع فرامرکزی $\overline{GM}$ را برای کشتی به جرم ۱۲۰۰۰ تنی، جرم اضافی ۲۷ تن و فاصلهٔ ۷٫۸m از خط مرکزی را به گونه‌ای حساب کنید که شاقولی به طول ۶m به اندازه $a=۰٫۲m$ منحرف شود. جرم m_0 در فاصلهٔ $b=۱٫۸m$ بالاتر از M قرار دارد. [توجه کنید که تن در دستگاه متریک برابر ۱۰۰۰kg و همچنین برابر مگاگرم (Mg) است.]



شکل م ۲۱۶.۵

۱۰.۵ مروری بر فصل

در فصل ۵، انواع مختلف نیروهای گستردهٔ اعمال شده در حجم‌ها، سطح‌ها و در امتداد خطوط را مطالعه کردیم. در تمام این مسائل، اغلب به برایند نیروهای گسترده و محل برایند نیاز داریم.

تعیین برایند نیروهای گسترده

برای تعیین نیروهای گسترده و خط اثر آنها مراحل زیر انجام می‌گیرد:

۱. ابتدا شدت نیرو را در جزء حجم، سطح، و یا طول مناسبی که نیرو در آن توزیع شده، ضرب کنید، سپس با انتگرال‌گیری از همهٔ نیروهای گسترده در آن جزء انتخابی، برایند نیروهای گسترده را به‌دست می‌آورید.

۲. برای تعیین خط اثر این نیروی برایند، از اصل گشتاور استفاده کنید. سپس مجموع گشتاور تمام نیروهای جزئی نسبت به یک نقطه یا یک محور مناسب را ارزیابی کنید. در ادامه این مجموع را با گشتاور نیروی برایند نسبت به آن محور برابر قرار دهید و از رابطهٔ نوشته شده، بازوی مجهول گشتاور نیروی برایند را به‌دست آورید.

نیروهای گرانشی

هنگامی‌که نیروی گرانشی بر تمام اجزای یک جسم اثر می‌کند، شدت نیروی گرانشی وارد بر یک جسم ρg است که ρ و g به‌ترتیب چگالی و شتاب گرانشی جسم‌اند. در قسمت (الف) دیدیم که برای اجسامی با چگالی ثابت، ρg به‌هنگام استفاده از اصل گشتاور، حذف می‌شود. در نتیجه باید، تنها مرکز جرم هندسی شکل را تعیین کرد که بر مرکز جرم فیزیکی یک جسم که مرز آن شکل هندسی را مشخص می‌کند، منطبق است.

۱. برای ورق‌های تخت و مسطح و پوسته‌های همگن با ضخامت ثابت، مسئله به یافتن خواص سطح منتهی می‌شود.

۲. برای سیم‌ها و میله‌های باریک با چگالی یکنواخت و سطح مقطع ثابت، مسئله به یافتن خواص پاره خط منتهی می‌شود.

انتگرال‌گیری از روابط دیفرانسیلی

برای مسائلی که مستلزم انتگرال‌گیری از یک رابطهٔ دیفرانسیلی است، رعایت نکات زیر ضروری می‌باشد:

۱. انتخاب دستگاه مختصات مناسب که مرز ناحیهٔ انتگرال‌گیری را به ساده‌ترین وجه توصیف کند.

۲. حذف کمیت‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ بالا در مقایسه با کمیت‌های مرتبهٔ پایین‌تر.

۳. انتخاب جزء دیفرانسیلی مرتبهٔ اول به‌جای جزء دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم، و انتخاب جزء دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم به‌جای جزء دیفرانسیلی مرتبهٔ سوم.

۴. انتخاب جزء دیفرانسیلی باید طوری باشد که ناپیوستگی در ناحیهٔ انتگرال‌گیری وجود نداشته باشد.

نیروی گسترده در تیرها، کابل‌ها و سیالات (شاره‌ها)

در قسمت (ب) با استفاده از نکات گفته شده در بالا و اصول تعادل، اثرات نیروهای گسترده در تیرها، کابل‌ها و سیالات را تعیین کردیم. به یاد داشته باشید که:

۱. شدت نیرو در تیرها و کابل‌ها برحسب نیرو در طول یکای آنها بیان می‌شود.

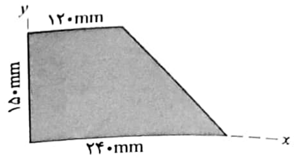
۲. شدت نیرو برای سیالات برحسب نیرو بر مساحت یکای سطح بیان می‌شود.

لازم به یادآوری است، اگر چه تیرها، کابل‌ها و سیالات کاربردهای متفاوتی دارند ولی مسائل آنها با شیوه‌ای یکسان حل می‌شوند.

Scanned by CamScanner

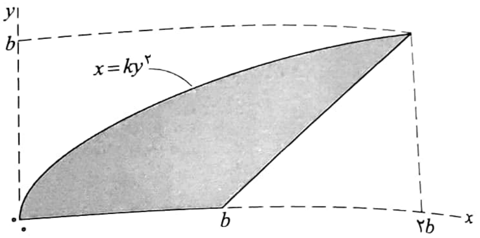
مسائل دوره‌ای

۲۱۷.۵ مختصات مرکز هندسی سطح ذوزنقهٔ نشان‌داده‌شده را تعیین کنید.



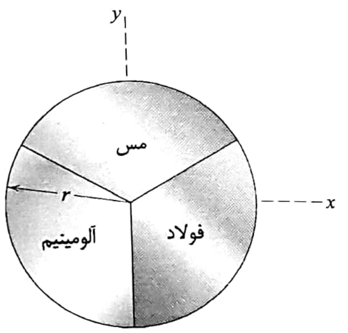
شکل م ۲۱۷.۵

۲۱۸.۵ مرکز هندسی شکل سطح سایه‌خورده را تعیین کنید.



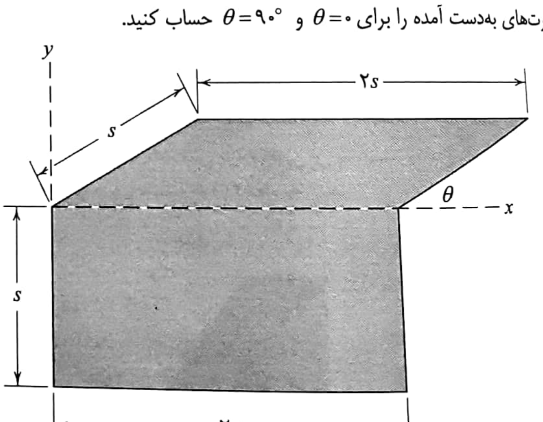
شکل م ۲۱۸.۵

۲۱۹.۵ دیسکی با ضخامت یکنواخت از قطاع‌های برابر و با مواد متفاوت مطابق شکل تشکیل شده است. مکان مرکز جرم آن را تعیین کنید.



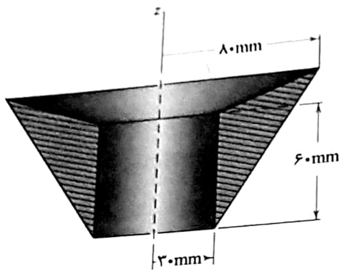
شکل م ۲۱۹.۵

۲۲۰.۵ مختصات x و y مرکز هندسی سطح سایه‌خوردهٔ نشان‌داده‌شده را تعیین کنید. عبارت‌های به‌دست آمده را برای $\theta=0$ و $\theta=90°$ حساب کنید.



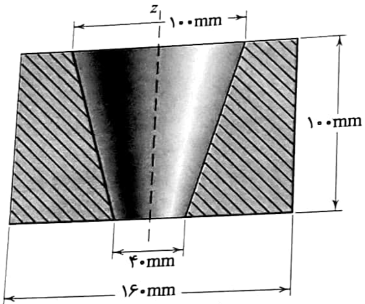
شکل م ۲۲۰.۵

۲۲۱.۵ در شکل مقطع عرضی جسم توپُر فولادی حاصل از دوران حول محور z نشان داده شده است. جرم m قطعهٔ فولادی را محاسبه کنید.



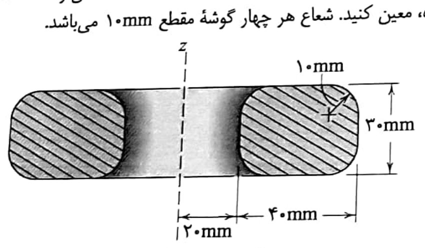
شکل م ۲۲۱.۵

۲۲۲.۵ شکل زیر مقطع عرضی جسم چدنی کامل حاصل از دوران حول محور z را نشان می‌دهد. جرم m آن را تعیین کنید.



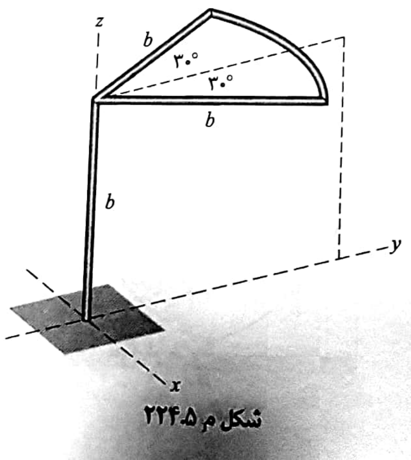
شکل م ۲۲۲.۵

۲۲۳.۵ حجم V و سطح کل A مربوط به یک حلقهٔ کامل را، که مقطع آن نشان‌داده‌شده، معین کنید. شعاع هر چهار گوشهٔ مقطع ۱۰mm می‌باشد.



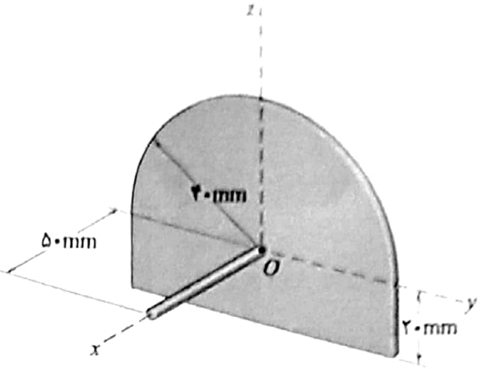
شکل م ۲۲۳.۵

۲۲۴.۵ مجموعه‌ای شامل چهار قطعه میله از یک تیر یکسان هستند. عضو خمیده تشکیل دایره‌ای به شعاع b می‌دهد. مختصات y و z و مرکز جرم مجموعه را معین کنید.



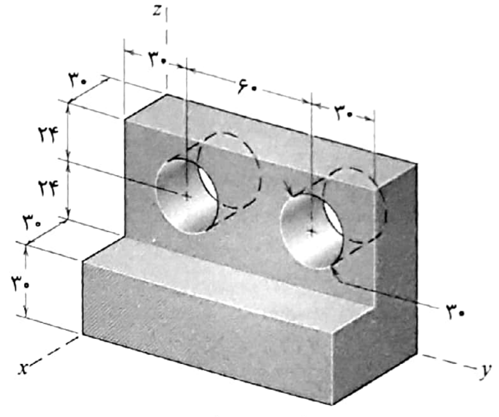
شکل م ۲۲۴.۵

۲۲۵.۵ مختصات مرکز جرم جسم ساخته شده از ورق فولادی و میلهٔ فولادی را تعیین کنید. ضخامت ورق ۲mm، قطر میله ۲mm و طول میله ۵۰mm است. مبدأ O بر یک طرف ورق جوش داده شده است. جرم جسم را معین کنید.



شکل م ۲۲۵.۵

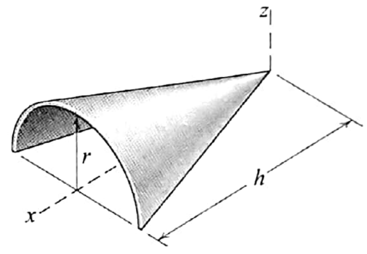
۲۲۶.۵ جرم و مرکز هندسی جسم فولادی زیر را تعیین کنید.



ابعاد برحسب میلیمتر

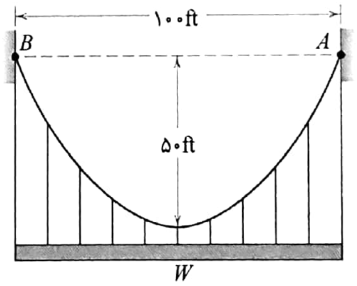
شکل م ۲۲۶.۵

۲۲۷.۵ مکان مرکز جرم پوستهٔ مخروط همگن نشان‌داده‌شده را به‌دست آورید.



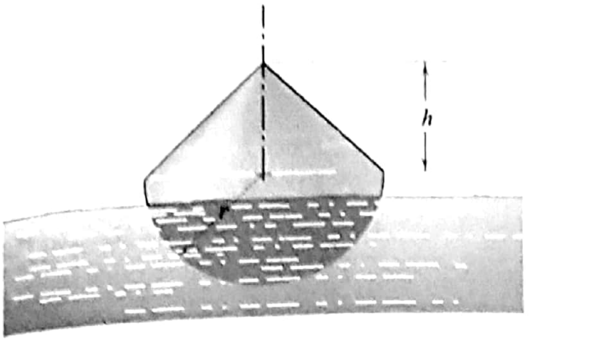
شکل م ۲۲۷.۵

۲۲۸.۵ کابلی از دو نقطهٔ A و B آویزان است و دو نقطه در یک سطح افقی قرار داشته و بار کلی W را، با توزیع یکنواخت در امتداد افقی تحمل می‌کند. طول S کابل را تعیین کنید. [یادآور می‌شود که با توجه به سری معادله (۱۶.۵ الف) لازم است که نسبت افت به دهانه کمتر از $\frac{1}{4}$ باشد.]



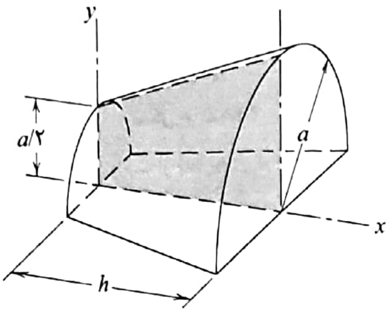
شکل م ۲۲۸.۵

۲۲۹.۵ جسم جامد شناوری از یک نیم‌کرهٔ همگن و یک مخروط با شعاع برابر r، که از همان مادهٔ همگن ساخته شده، تشکیل شده است. اگر جسم طوری شناور باشد که مرکز نیم‌کره بالای سطح آب باشد، ماکزیمم ارتفاع h که مخروط می‌تواند داشته باشد، قبل از اینکه جسم در وضعیت عمودی شناور شود، را پیدا کنید.



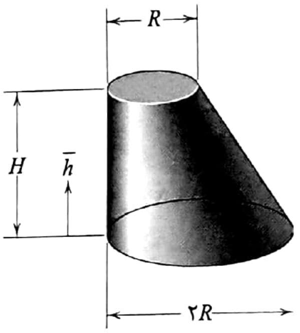
شکل م ۲۲۹.۵

۲۳۰.۵ مختصهٔ y مرکز هندسی حجم حاصل از دوران سطح سایه‌خورده حول محور x به اندازه 180° را به‌دست آورید.



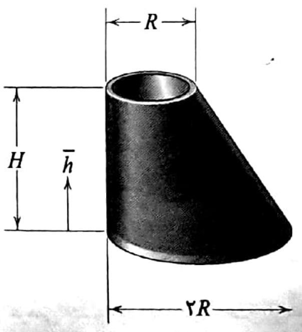
شکل م ۲۳۰.۵

۲۳۱.۵ جسم مخروطی شکل، مقطع عرضی به شکل دایره دارد. ارتفاع $\bar{h}$ مرکز جرم آن را در بالای قاعدهٔ همگن جسم تعیین کنید.



شکل م ۲۳۱.۵

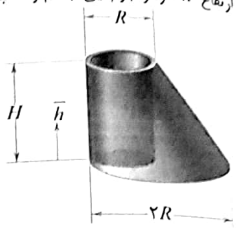
۲۳۲.۵ جسم نشان‌داده‌شده مشابه جسم مسئلهٔ ۲۳۱.۵ است، با این تفاوت که این جسم پوستهٔ نازکی است که بخش بالا و پایین آن باز است. ارتفاع $\bar{h}$ جسم را معین کنید و نتیجه را با جواب مسئلهٔ ۲۳۱.۵ مقایسه کنید.



شکل م ۲۳۲.۵

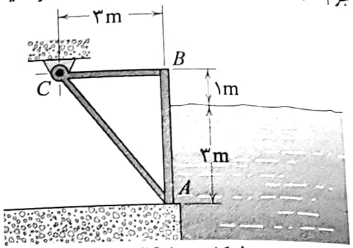
Scanned by CamScanner

۲۳۳.۵ جسم همگن نشان داده شده به‌کمک جسم توپر مسئلهٔ ۲۳۱.۵ و برداشتن حجم استوانه‌ای از آن با قطری کمتر از R ساخته می‌شود، به گونه‌ای که در سمت چپ جسم تنها پوسته‌ای نازک باقی بماند. ارتفاع $\bar{h}$ مرکز جرم این جسم را نسبت به قاعده‌اش، تعیین کنید.



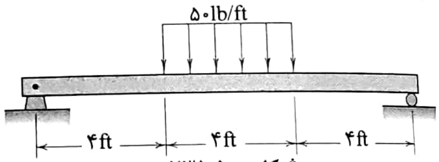
شکل م ۲۳۳.۵

۲۳۴.۵ شکل نشان داده شده مقطع عرضی یک دریچهٔ مستطیلی به‌ارتفاع ۴m و طول ۶m است (عمود بر صفحهٔ کاغذ)، که کانال آب شیرین را مسدود می‌کند. دریچه دارای جرم ۸٫۵Mg بوده و حول یک محور افقی که از نقطهٔ C عبور می‌کند، آویزان است. نیروی عمودی P وارد شده توسط پایه روی لبهٔ پایین دریچه در نقطهٔ A را محاسبه کنید. از جرم قاب که به دریچه متصل است صرف‌نظر کنید.



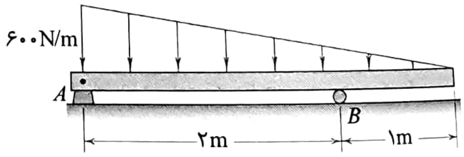
شکل م ۲۳۴.۵

۲۳۵.۵ نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی تیری که بار یکنواخت ۵۰lb/ft را تحمل می‌کند، رسم کنید. این بار در مقطع میانی آن توزیع شده است. حداکثر گشتاور خمشی و مکان آن را تعیین کنید.



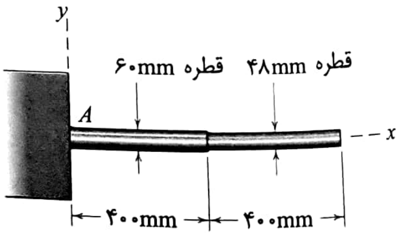
شکل م ۲۳۵.۵

۲۳۶.۵ ماکزیمم گشتاور خمشی M_{max} را برای تیر بارگذاری شده و فاصلهٔ x از انتهای سمت راست A که M_{max} در آن رخ می‌دهد، تعیین کنید.



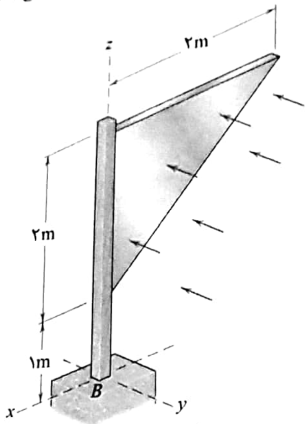
شکل م ۲۳۶.۵

۲۳۷.۵ میل‌گردان فولادی افقی مطابق شکل به قطعه‌ای در نقطهٔ A ثابت و جوش داده شده است. نمودار گشتاور برشی میل‌گردان مربوط به وزن آن را رسم کرده، مقادیر نیروی برشی و گشتاور خمشی را در قطر ناپیوسته تعیین کنید.



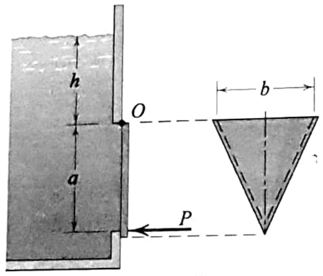
شکل م ۲۳۷.۵

۲۳۸.۵ تابلوی مثلث شکلی به تیر قائمی که روی پایهٔ بتنی استوار است، وصل شده است. نیروی برشی V، گشتاور خمشی M و گشتاور پیچشی T را در نقطهٔ B روی تیر قائم، در هنگام برخورد طوفان که در آن سرعت عمودی باد روی تابلو به ۱۰۰km/h می‌رسد، محاسبه کنید. فشار هوا (فشار هوای راکد) درمقابل سطح عمودی مربوط به این سرعت، ۱٫۴kPa است.



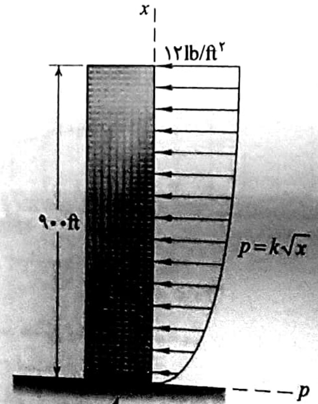
شکل م ۲۳۸.۵

۲۳۹.۵ سطح تختهٔ پهنی را برای درزبندی یک دیوارهٔ مثلث شکل قائم مخزنی حاوی مایعی به چگالی ρ به کار برده‌اند. تخته حول لبهٔ بالایی نقطهٔ O مثلث آویزان شده است. نیروی P لازم برای نگهداری سوراخ در وضعیت بسته در برابر فشار و مایع را تعیین کنید.



شکل م ۲۳۹.۵

۲۴۰.۵ به‌عنوان بخشی از مطالعات طراحی، اثرات نیروی باد روی ساختمان ۹۰۰ft تحقیق شده است. با توزیع فشار باد به‌طور سهمی مطابق شکل، واکنش‌های نیرو و گشتاور در پایهٔ A ساختمان به‌علت نیروی باد را محاسبه کنید. عمق ساختمان (عمود بر صفحهٔ کاغذ) ۲۰۰ft است.

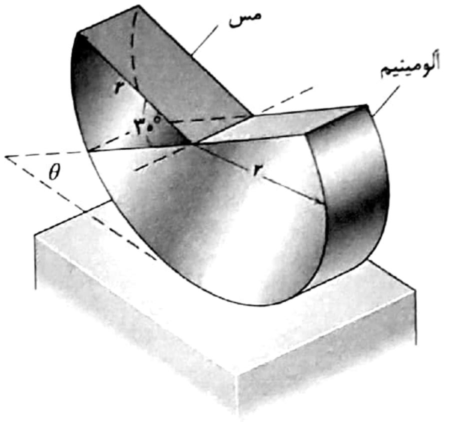


شکل م ۲۴۰.۵

۲۴۱.۵۰ با توجه به ساختمان بلند مسئلهٔ ۲۴۰.۵ به منزلهٔ یک تیر مستقیم، نیروی برشی و گشتاور خمشی در ساختمان را برحسب تابعی از ارتفاع x بالای سطح زمین، رسم و تعیین کنید. نتایج خود را برای $x=$ ۲۵۰ft حساب کنید.

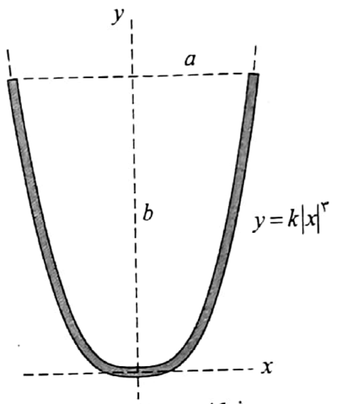
مسائل کامپیوتری

۲۴۲.۵° قطاع استوانه‌ای °۳۰ ساخته شده از مس متصل به نیم استوانه‌ای آلومینیمی مطابق شکل می‌باشد. زاویهٔ θ برای وضعیت تعادل استوانه را، برای باقی ماندن روی سطح افقی تعیین کنید.



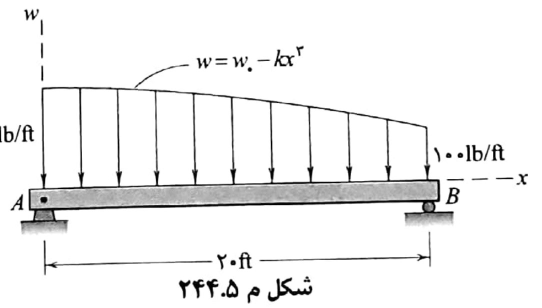
شکل م ۲۴۲.۵

۲۴۳.۵° عبارت انتگرال‌گیری برای مختصهٔ y مرکز هندسی میلهٔ باریک خمیدهٔ یکنواخت در شکل نشان داده شده را بیان کنید. سپس برای مقادیر $a=$ ۲ و $b=$ ۸ مقدار انتگرال را به‌طور عددی محاسبه کنید.



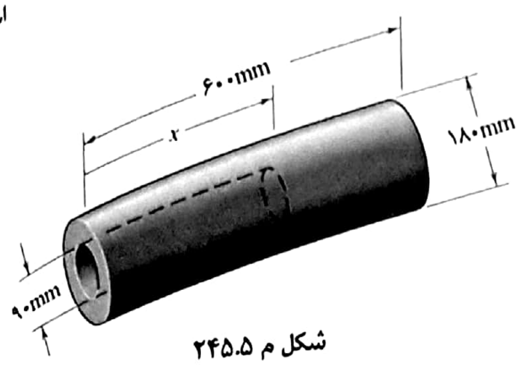
شکل م ۲۴۳.۵

۲۴۴.۵° نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده در مسئلهٔ ۱۲۰.۵ رسم کنید. ماکزیمم مقدار نیروی برشی و گشتاور خمشی و مکان آنها را روی تیر معین کنید.



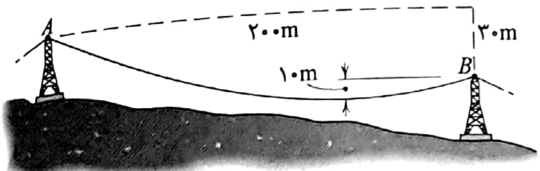
شکل م ۲۴۴.۵

۲۴۵.۵° سوخت جامد همگن یک موشک به‌صورت استوانهٔ مدوری همراه با سوراخ هم‌مرکزی به عمق x است. برای ابعاد نشان‌داده‌شده، $\bar{X}$، مختصهٔ x مرکز جرم سوخت جامد را به‌صورت تابعی از عمق x سوراخ در بازهٔ $x=0$ تا $x=$ ۶۰۰mm رسم کنید. ماکزیمم مقدار $\bar{X}$ را تعیین کنید و نشان دهید که مقدار آن با مقدار x متناظر آن برابر است.



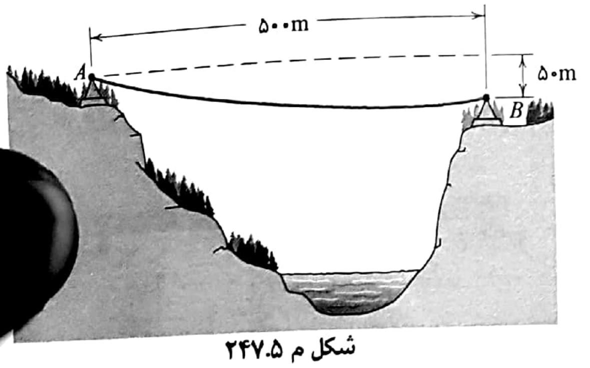
شکل م ۲۴۵.۵

۲۴۶.۵° بخشی از کابل برق، مطابق شکل بین دو دکل آویخته شده است. جرم هر متر از طول کابل ۲۰kg است. اگر ماکزیمم کشش مجاز کابل ۷۵kN باشد، جرم m یخی را که می‌تواند در هر متر کابل تشکیل شود، بدون اینکه ماکزیمم کشش مجاز بیشتر از مقدار بیان‌شده شود، تعیین کنید. اگر از کشیدگی اضافی کابل صرف‌نظر شود، آیا افزودن یخ به کابل، تغییری در شکل هندسی کابل ایجاد می‌کند؟



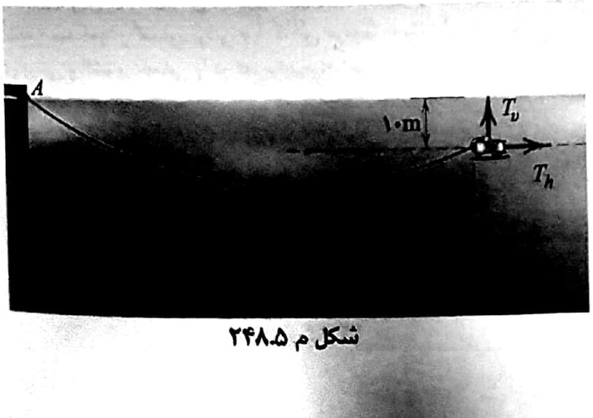
شکل م ۲۴۶.۵

۲۴۷.۵° در مرحلهٔ اول ساخت یک تراموا در عرض یک تنگه، بین دو نقطهٔ A و B، کابلی به‌طول ۵۰۵m و جرم ۱۲kg/m کشیده می‌شود. فاصلهٔ افقی x در سمت راست نقطهٔ A تا محل پایین‌ترین نقطهٔ کابل و کشش کابل در نقاط A و B را محاسبه کنید.



شکل م ۲۴۷.۵

۲۴۸.۵° روبوت کنترل از راه دور کوچک مسائل ۱۷۱.۵ و ۱۷۲.۵ یک‌بار دیگر در اینجا نشان داده شده است. بر کابلی به طول ۲۰۰m نیروی شناوری منفی کوچکی به‌سمت پایین معادل ۰٫۰۲۵N در اثر طول خود کابل وارد می‌شود. با استفاده از حرکت تغییرپذیر افقی و عمودی پیش‌ران‌ها، حرکت وسیله متحرک را در عمق ۱۰m کمی به‌سمت راست ثابت نگه می‌دارند. اگر ماکزیمم رانش افقی برابر ۱۰N و ماکزیمم رانش قائم آن ۷N باشد، ماکزیمم مقدار مجاز فاصلهٔ d و حالتی را که رانش‌دهنده حرکتش تنها محدود به یک دفعه باشد، معین کنید.



شکل م ۲۴۸.۵

Scanned by CamScanner

۶

اصطکاک

۱.۶ مقدمه
قسمت (الف): پدیدهٔ اصطکاک
۲.۶ انواع اصطکاک
۳.۶ اصطکاک خشک
قسمت (ب): کاربرد اصطکاک در ماشین‌ها
۴.۶ گوه‌ها
۵.۶ پیچ‌ها
۶.۶ یاتاقان‌های شعاعی
۷.۶ یاتاقان‌های محوری، اصطکاک دیسک‌ها
۸.۶ تسمه‌های انعطاف‌پذیر
۹.۶ مقاومت غلتشی
۱۰.۶ مروری بر فصل

۱.۶ مقدمه

در فصل‌های قبل، اغلب موارد نیروهای کنش و واکنش سطح تماس دو جسم را، تنها در امتداد عمود بر این سطوح، بررسی می‌کردیم. این حالت برای برهم‌کنش سطوح صاف به‌کار می‌رفت، که در مثال ۲ در شکل ۱.۳ نشان داده شد. گرچه اغلب موارد این فرض ایده‌آل با خطای نسبتاً کوچکی همراه است، در تعداد بسیار زیادی از مسائل باید توانایی سطوح تماس برای تحمل نیروهای مماسی را علاوه بر تحمل نیروهای عمودی در نظرگرفت. نیروهای مماسی موجود بین سطوح تماس *نیروهای اصطکاک* نام دارند و تقریباً در برهم‌کنش بین همهٔ سطوح واقعی وجود دارند. اگر یکی از سطوح بخواهد نسبت به دیگری بلغزد، نیروهای اصطکاکی موجود همواره در جهت مخالف این حرکت عمل می‌کنند.

در برخی از انواع ماشین‌ها و فرایندها، گاهی می‌خواهیم نیروی اصطکاک بسیاری از پدیده‌ها مانند اصطکاک یاتاقان‌ها، پیچ‌های انتقال نیرو، چرخ‌دنده‌ها، جریان سیال در لوله‌ها و پیش‌رانش هواپیماها، موشک‌ها در جو، به حداقل برسد. در موارد دیگر مایل هستیم اثر نیروی اصطکاک را به‌حداکثر برسانیم؛ مانند ترمزها، کلاچ‌ها، محرک‌های تسمه‌ای، و گوه‌ها. خودروهای چرخ‌دار برای شروع حرکت و توقف نیاز به اصطکاک دارند و برای راه‌رفتن ساده به اصطکاک بین کفش و زمین نیاز داریم.

نیروهای اصطکاک در طبیعت و در همهٔ ماشین‌ها در حد قابل ملاحظه‌ای وجود دارند حتی اگر با دقت روان‌کاری شوند. اغلب به ماشین یا فرایندی که در آن نیروی اصطکاک ناچیز و قابل صرف‌نظرکردن باشد، *ایده‌آل* می‌گویند. ماشین یا فرایندی واقعی است که در آن اصطکاک در نظرگرفته می‌شود. در تمام موارد مواقعی که حرکت لغزشی بین قطعات ماشین رخ می‌دهد، نیروهای اصطکاک باعث هدر رفتن انرژی به‌صورت گرما می‌شوند. اصطکاک علاوه بر تولید گرما و اتلاف انرژی مربوط، موجب سایدگی بین اجزای در تماس می‌گردد.

قسمت (الف): پدیدهٔ اصطکاک

۲.۶ انواع اصطکاک

در این بحث انواع مقاومت اصطکاکی مطرح در مکانیک را به‌طور خلاصه شرح می‌دهیم، و در مبحث بعدی متداول‌ترین نوع اصطکاک، یعنی اصطکاک خشک را، به‌تفصیل بررسی می‌کنیم.

(الف) اصطکاک خشک. وقتی دو جسم جامد با روان‌کاری ضعیف می‌خواهند روی هم بلغزند یا در شرایط لغزش قرار بگیرند، اصطکاک خشک در آنها به‌وجود می‌آید. نیروی اصطکاک مماس بر سطوح تماس هم در آستانهٔ وقوع لغزش و هم در حین عمل لغزش به‌وجود می‌آید. جهت این نیروی اصطکاک همواره در خلاف جهت حرکت موجود یا حرکت در آستانهٔ وقوع است. اصطکاک خشک را *اصطکاک کولنی* نیز می‌نامند. زیرا اصول حاکم بر اصطکاک خشک یا کولنی از نتایج آزمایشات کولن[1] در سال ۱۷۸۱ و کارهای مورین[2] از ۱۸۳۱ تا ۱۸۳۴ حاصل شده است. گفتنی است که تاکنون نظریهٔ جامعی برای اصطکاک خشک وجود ندارد. با این وجود بسیاری از مسائل اصطکاک خشک را می‌توان با استفاده از مدل تحلیلی حل کرد، که در بخش ۳.۶ نمونه‌ای از آن را توصیف می‌کنیم.

(ب) اصطکاک سیال. وقتی لایه‌های سیال با سرعت‌های متفاوت نسبت به هم حرکت می‌کنند، بین آنها اصطکاک به‌وجود می‌آید. این اصطکاک به دو عامل بستگی دارد: (۱) سرعت نسبی لایه‌های سیال و (۲) ویسکوزیته (چسبندگی) سیال، که در درس مکانیک سیالات بررسی می‌شود و در حال حاضر بیش از این درباره‌اش بحث نمی‌کنیم.

(ج) اصطکاک داخلی. در اجسامی که تحت اثر بارگذاری چرخه‌ای قرار دارند، اصطکاک داخلی به‌وجود می‌آید. در مورد مواد بسیار کشسان، هنگام بازگشت جسم به حالت اولیه‌اش، تنها مقدار کمی از انرژی بر اثر اصطکاک داخلی تلف می‌شود. اما برای مواد با کشسانی کم و موادی که تغییر شکل مومسان قابل ملاحظه‌ای ضمن بارگذاری از خود نشان می‌دهند، این کاهش انرژی قابل توجه، و همراه با تغییر شکل است. اصطکاک داخلی از تغییر شکل برشی حاصل می‌شود که در کتاب‌های مرجع علم مواد توضیح داده می‌شود و از آنجا که این کتاب عمدتاً با اثرات خارجی نیروها سروکار دارد، بیش از این در مورد اصطکاک داخلی بحث نمی‌کنیم.

1. Coulomb
2. Morin

Scanned by CamScanner

۳.۶ اصطکاک خشک

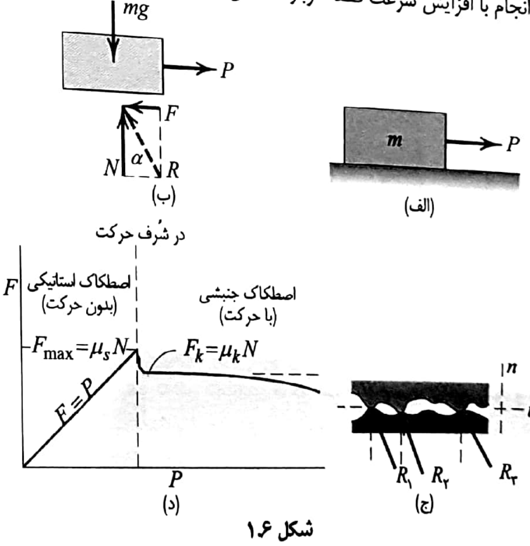
بقیهٔ این فصل به توصیف اثرات اصطکاک خشک وارد بر سطوح خارجی اجسام صلب می‌پردازد. اکنون سازوکار اصطکاک خشک را با کمک یک آزمایش بسیار ساده توضیح می‌دهیم.

سازوکار اصطکاک خشک

قطعهٔ جامدی به جرم m را مطابق شکل ۱۶ (الف) روی یک سطح افقی در نظر می‌گیریم. نیروی افقی P را بر قطعه وارد می‌کنیم، اندازهٔ این نیرو را از صفر افزایش می‌دهیم تا قطعه به حرکت درآمده و سرعت آن به‌میزان قابل ملاحظه‌ای برسد. [شکل ۱۶ (ب)] نمودار جسم آزاد این قطعه برای اندازه‌های مختلف P نشان داده شده است، که در آن نیروی اصطکاک مماسی F که از سطح تماس زیر آن بر قطعه وارد می‌شود، همواره با حرکت قطعه مخالفت می‌کند. این واکنش عمودی N با وزن قطعه، که در اینجا mg برابر است. در این حال نیروی R که از سطح تماس بر قطعه وارد می‌شود برایند نیروهای N و F است.

در شکل ۱.۶(ج) تصویر بزرگ‌شدهٔ زبری سطوح اتکای قطعات در ناحیهٔ تماس‌شان نشان می‌دهد که تکیه‌گاه واقعی بین دو سطح تماس مقطع بوده و تنها در برآمدگی‌های دو سطح این تماس وجود دارد جهت هریک از واکنش‌های R_1، R_2، R_3 و... که از سطح اتکا بر قطعه وارد می‌شوند به دو عامل بستگی دارد: (۱) شکل هندسی زبری‌ها و (۲) اندازهٔ وسعت تغییر شکل مکانی هر یک از نقاط تماس. نیروی قائم کل N برابر مجموع n مؤلفهٔ R و نیروی اصطکاکی کل F برابر مجموع t مؤلفهٔ R است. وقتی دو سطح تماس نسبت به هم ساکن هستند، در تمام زبری سطح باهم درگیرند اما وقتی نسبت به‌هم حرکت می‌کنند اساساً در نقاط برجسته، زبری‌ها باهم تماس دارند. لذا نیروی P مورد نیاز برای حفظ حرکت یک قطعه بر روی یک سطح کمتر از نیروی مورد نیاز برای به‌حرکت درآوردن آن قطعه از حالت سکون است.

با ثبت نیروی اصطکاک F به‌صورت تابعی از نیروی P رابطهٔ داده شده شکل ۱.۶ (د) به‌دست می‌آید. برای $P = 0$، از روابط تعادل نتیجه می‌شود $F = 0$، بدین معنی که نیروی اصطکاک بر قطعه وارد نمی‌شود. با افزایش نیروی P، نیروی اصطکاک F نیز شروع به افزایش می‌کند. تا وقتی حرکت قطعه شروع نشده است، نیروی اصطکاک F با نیروی P برابر و در خلاف جهت آن است. در این حالت قطعه در تعادل بوده و برایند نیروهای وارد بر قطعه صفر خواهد بود. سرانجام نیروی P به مقداری می‌رسد که قطعه را در جهت خود به حرکت در می‌آورد. در این لحظه نیروی اصطکاک قدری کاهش می‌یابد، سپس ثابت مانده و سرانجام با افزایش سرعت قطعه دوباره کاهش می‌یابد.



شکل ۱۶

اصطکاک استاتیکی

ناحیه‌ای در شکل ۱.۶ (د) تا لحظهٔ آستانهٔ لغزیدن را ناحیهٔ *اصطکاک استاتیکی* می‌نامند. در این ناحیه اندازهٔ نیروی اصطکاک از *معادله‌های تعادل* به‌دست می‌آید. این نیرو می‌تواند هر مقداری از صفر تا ماکزیمم مقدار نیروی استاتیکی F_{max} را در حد، دارا باشد. برای دو سطح تماسی، تجربه نشان می‌دهد که این مقدار ماکزیمم اصطکاک استاتیکی، F_{max}، با نیروی عمودی N متناسب است و می‌توان نوشت

$$F_{max} = \mu_s N \qquad (۱.۶)$$

در این رابطه μ_s ثابت تناسب است و *ضریب اصطکاک استاتیکی* نامیده می‌شود.

توجه کنید که معادلهٔ بالا تنها مقدار *حدی حداکثر* نیروی اصطکاک استاتیکی را نشان می‌دهد و *نه* مقداری کمتر از آن را. در نتیجهٔ رابطهٔ بالا فقط در مواردی که حرکت در آستانهٔ وقوع است و نیروی اصطکاک استاتیکی، دارای بیشترین مقدار خود است، به‌کار می‌رود. وقتی جسم به آستانهٔ حرکت نرسیده است، نیروی اصطکاک استاتیکی وارد بر آن کمتر از ماکزیمم نیروی اصطکاک استاتیکی است، یعنی

$$F < \mu_s N$$

اصطکاک جنبشی

بعد از وقوع لغزش حالتی از *اصطکاک جنبشی* با حرکت همراه است. نیروی اصطکاک جنبشی اغلب تا حدی کوچکتر از ماکزیمم نیروی اصطکاک استاتیکی است. نیروی اصطکاک جنبشی F_k نیز متناسب با نیروی عمودی است، از این‌رو

$$F_k = \mu_k N \qquad (۲.۶)$$

در این رابطه μ_k *ضریب اصطکاک جنبشی* است. معمولاً μ_k کوچکتر از μ_s می‌باشد. با افزایش سرعت قطعه، اصطکاک جنبشی تا اندازه‌ای کاهش می‌یابد و در سرعت‌های زیاد کاهش اصطکاک نیروی جنبشی قابل توجه است. گفتنی است که ضرایب اصطکاک به شرایط سطح تماس دو جسم و سرعت نسبی آنها بستگی دارد. این ضرایب را معمولاً نمی‌توان با دقت تعیین کرد.

به علت شرایط حاکم بر تغییر ساختار اصطکاک، تشخیص ضریب اصطکاک استاتیکی با ضریب اصطکاک جنبشی، به‌ویژه در ناحیهٔ انتقال از آستانهٔ وقوع حرکت تا خود حرکت دشوار است. برای مثال پیچ‌هایی که به خوبی روان کاری شده‌اند و تحت بار متوسط قرار دارند، اغلب اوقات مقاومت و بازدارندگی اصطکاکی قابل مقایسه‌ای را چه در آستانهٔ پیچیدن و چه در هنگام پیچیدن از خود نشان می‌دهند.

به‌طور معمول نیروی اصطکاک جنبشی و ماکزیمم نیروی اصطکاک استاتیکی را به‌صورت $F = \mu N$ می‌نویسند. بنابراین از صورت مسئله باید فهمید که کدام نیروی اصطکاک مورد نظر است. اگرچه در این کتاب بارها میان ضرایب اصطکاک استاتیکی و جنبشی تفاوت قائل شده‌ایم، در موارد دیگری هم تمایزی بین آن‌دو قائل نشدیم و ضریب اصطکاک فقط به‌صورت μ نوشته خواهد شد. در چنین مواردی، دانشجو باید تصمیم بگیرد که کدام‌یک از شرایط اصطکاک، یعنی ماکزیمم اصطکاک استاتیکی برای وضعیت در آستانهٔ حرکت و یا اصطکاک جنبشی مدنظر است. مجدداً تأکید می‌کنیم که در اغلب موارد، مسئله به‌گونه‌ای است که در آن نیروی اصطکاک استاتیکی کمتر از مقدار ماکزیمم متناظر با آستانهٔ حرکت است و نمی‌توان از رابطهٔ (۱.۶) استفاده کرد.

از شکل ۱.۶ (ج) ملاحظه می‌شود که امکان وجود زوایای بزرگ میان نیروهای واکنشی و جهت n برای سطوح زبر بیشتر از سطوح صاف است. از این‌رو، ضرایب اصطکاک منعکس‌کنندهٔ زبری دو سطح مماس بر یکدیگر است و دربرگیرندهٔ خاصیتی هندسی از هر دو ناحیهٔ تماسی سطوح می‌باشد. با این مدل هندسی اصطکاک، سطوحی را صاف می‌گویند که نیروی اصطکاک در آنها ناچیز باشد. ضریب اصطکاک برای یک جسم بی‌معنی است بلکه برای دو جسم به‌کار می‌رود.

Scanned by CamScanner

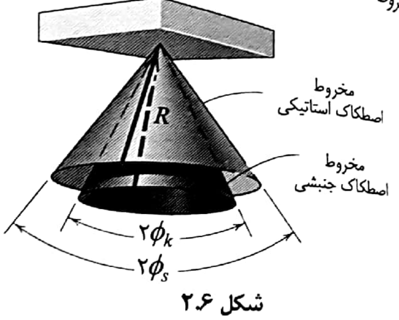
... $\tan\alpha = F/N$ با رابطهٔ N نسبت به R جهت برایند ... (ب) ... اصطکاک
... وقتی نیروی اصطکاک به مقدار ماکزیمم خود، F_{max}
... به مقدار حداکثر ϕ_s خواهد رسید. بنابراین

$$\tan\phi_s = \mu_s$$

... زاویهٔ α به مقدار ϕ_k متناظر با نیروی اصطکاک ... لغزش جسم، ... به‌طور مشابه می‌نویسیم

$$\tan\phi_k = \mu_k$$

... معمولاً از رابطهٔ $\tan\phi = \mu$ استفاده می‌شود که بسته به مورد ... اصطکاک استاتیکی و یا ضریب اصطکاک جنبشی باشد.
... ضریب اصطکاک استاتیکی و زاویه ϕ_k را *زاویهٔ اصطکاک جنبشی* ... زاویهٔ اصطکاک در هریک از دو حالت، وضعیت حدی واکنش کل R ... در تماس با یکدیگر را به‌روشنی تعریف می‌کند. نیروی واکنش R ... حرکت، روی مخروط قائم دوار با زاویهٔ رأس ۲ϕ_s قرار دارد ... حرکت در آستانهٔ وقوع باشد، R داخل مخروط است. این ... اگر حرکت ... ۲ϕ_s، *مخروط اصطکاک استاتیکی* نامیده می‌شود و مکان ... با زاویهٔ رأس ... تمام جهت‌های ممکن واکنش R در آستانهٔ حرکت را نشان می‌دهد. ... حرکت، زاویهٔ اصطکاک جنبشی تولید می‌شود و واکنش R روی سطح ... مخروط دیگر با تفاوتی اندک و با زاویهٔ رأس ۲ϕ_k قرار می‌گیرد. این مخروط را *مخروط اصطکاک جنبشی* می‌نامند.



شکل ۲.۶

عوامل مؤثر بر اصطکاک

... طبق آزمایش‌های انجام شده، نیروی اصطکاک اساساً مستقل از مساحت سطح تماس ظاهری یا تصویرشدهٔ دو جسم است. سطح تماس واقعی دو جسم ... کوچکتر از سطح تماس ظاهری آنهاست زیرا فقط نقاط برجستهٔ ... های دو سطح بار را تحمل می‌کنند. گفتنی است حتی نیروهای قائم نسبتاً کوچک، می‌توانند تنش‌های بزرگی را در این نقاط تماس به‌وجود آورند. با افزایش نیروی عمودی وارد بر سطح تماس دو جسم، نقاط واقع در روی نقاط برجستگی و زبری‌ها، دست‌خوش تسلیم، خردشدن یا گسیختگی می‌شوند؛ بنابراین سطح تماس واقعی نیز افزایش می‌یابد.

طبق نظریه‌ای جامع دربارهٔ اصطکاک خشک که فراتر از این کتاب است، برای سطوحی که سطح تماس بسیار نزدیک باهم دارند، نیروی ربایش مولکولی یکی از عوامل مهم اصطکاک در سطح تماس می‌باشند. سایر عواملی که در ایجاد اصطکاک خشک مؤثر و مهم‌اند عبارت‌اند از: دمای زیاد موضعی در نقاط تماس، چسبندگی در این نقاط، سختی نسبی سطوح تماس، وجود لایه‌های سطحی نازک ... روغن، گرد و خاک و موادی از این قبیل در سطوح تماس.

در جدول د۱ در پیوست د، مقدار تقریبی بعضی از ضرایب اصطکاک نشان داده شده است. این مقادیر تقریبی بوده و دارای تغییراتی قابل ملاحظه‌اند که بستگی به

سطوح تا حد امکان شبیه ...

بالا رفتن از درخت به اصطکاک بین طناب و وسایل مکانیکی که طناب در داخل آنها می‌لغزد، بستگی دارد.

مفاهیم کلیدی

انواع مسائل اصطکاک

اکنون می‌توانیم مسائل اصطکاک خشک را به سه دسته تقسیم کنیم. اولین گام در حل هر مسئلهٔ اصطکاک، شناخت نوع مسئله است.

۱. مسئلهٔ *نوع اول.* در این نوع مسئله، از قبل می‌دانیم که جسم در حالت تعادل، در آستانهٔ حرکت بوده و نیروی اصطکاک وارد بر آن مساوی با اصطکاک استاتیکی حدی است و مقدار آن طبق رابطهٔ $F_{max} = \mu_s N$ به‌دست می‌آید. البته در این حالت، معادلات تعادل نیز برقرارند.

۲. مسئلهٔ *نوع دوم.* در این نوع مسئله، از قبل نمی‌دانیم که جسم ساکن است، در آستانهٔ حرکت است، و یا حرکت می‌کند. گام اول در حل یک مسئلهٔ اصطکاک، تشخیص نوع حالت مسئله است. ابتدا فرض می‌کنیم جسم در وضع تعادل استاتیکی است، سپس با استفاده از معادله‌های تعادل، نیروی اصطکاک F را تعیین می‌کنیم. سه حالت زیر ممکن است روی دهد:

(الف) $F < (F_{max} = \mu_s N)$: در این حالت، نیروی اصطکاک مورد نیاز برای تعادل قابل تحمل است و از این‌رو جسم در تعادل می‌باشد و فرض اولیه درست است. لازم به تأکید است که نیروی اصطکاک *واقعی* F *کمتر از* مقدار حدی F_{max} است که از معادلهٔ (۱.۶) به‌دست آمد و همچنین F *صرفاً* با استفاده از معادلات تعادل به‌دست می‌آید.

(ب) $F = (F_{max} = \mu_s N)$: در این حالت چون نیروی اصطکاک F برابر ماکزیمم مقدار F_{max} است، مانند حالت ۱، جسم، در آستانهٔ حرکت است. بنابراین فرض تعادل استاتیکی معتبر است.

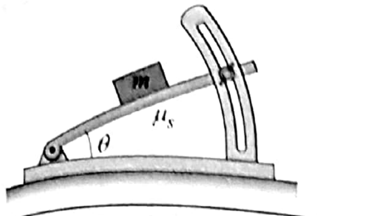
(ج) $F > (F_{max} = \mu_s N)$: این نتیجه غیرممکن است، چون سطوح نمی‌توانند نیرویی بیشتر از مقدار ماکزیمم $\mu_s N$ را تحمل کنند. بنابراین فرض تعادل استاتیکی درست نبوده و جسم حرکت می‌کند. در این حالت نیروی اصطکاک، مطابق معادلهٔ (۲.۶)، از رابطهٔ $F = \mu_k N$ به‌دست می‌آید.

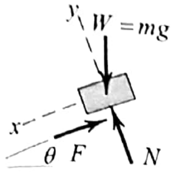
۳. مسئلهٔ *نوع سوم.* در این مسئله از قبل می‌دانیم که حرکت نسبی بین سطوح تماس وجود دارد، و از این‌رو از ضریب اصطکاک جنبشی استفاده می‌شود. در این حالت استفاده از معادلهٔ (۲.۶) همواره نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جسم را مستقیماً به‌دست می‌دهد.

این بحث برای تمام سطوح خشک در تماس با هم و تا حدودی برای سطوح متحرک با اندکی روغن‌کاری صادق است.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۶
قطعه‌ای به جرم m روی یک سطح شیبدار قرار دارد. زاویهٔ این سطح با افق قابل تغییر است. ماکزیمم زاویهٔ θ را برای تعادل قطعه به‌دست آورید. ضریب اصطکاک استاتیکی قطعه و سطح شیبدار μ_s است.





حل: نمودار جسم آزاد قطعه را رسم می‌کنیم. در این نمودار، $W = mg$ وزن قطعه، N نیروی واکنش عمودی و F نیروی اصطکاک را نشان می‌دهند. جهت نیروی اصطکاک F بر خلاف جهت حرکت جسم است.

❶ معادله‌های تعادل را در امتدادهای x و y، ایجاب می‌کند که

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad mg\sin\theta - F = ۰ \qquad F = mg\sin\theta$

$[\Sigma F_y = ۰]$ $\quad -mg\cos\theta + N = ۰ \qquad N = mg\cos\theta$

با تقسیم معادلهٔ اول بر معادلهٔ دوم نتیجه می‌گیریم که $F/N = \tan\theta$. از آنجاکه زاویهٔ ماکزیمم زمانی اتفاق می‌افتد که $F = F_{max} = \mu_s N$، برای آستانهٔ حرکت داریم

$$\mu_s = \tan\theta_{max} \quad \text{یا} \quad \theta_{max} = \tan^{-1}\mu_s$$

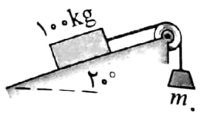
❷ ج.

راهنمایی‌های مفید

❶ برای اجتناب از تجزیهٔ F و N به مؤلفه‌هایشان، محورهای مختصات را در امتداد F و عمود بر آن در نظر می‌گیریم.

❷ این مسئله روش ساده‌ای برای تعیین ضریب اصطکاک استاتیکی را نشان می‌دهد. ماکزیمم مقدار θ را *زاویه سکون* نیز می‌گویند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۶
گسترهٔ مقادیرجرم $m_۰$ را به‌طوری‌که قطعهٔ ۱۰۰kg مطابق شکل ساکن باقی بماند (نه به‌طرف بالا حرکت کند و نه به‌طرف پایین)، تعیین کنید. ضریب اصطکاک استاتیکی در سطوح تماس ۰٫۳۰ است.

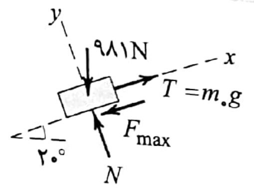


حل: ماکزیمم مقدار $m_۰$ به‌شرطی به‌دست می‌آید که قطعه، در آستانهٔ حرکت به‌سمت بالای شیب باشد. بنابراین، همان‌طورکه در نمودار جسم آزاد در حالت (۱) دیده می‌شود، نیروی اصطکاک وارد بر قطعه رو به پایین سطح شیبدار است و با توجه به اینکه وزن قطعه برابر $mg = ۱۰۰(۹٫۸۱) = ۹۸۱N$ است، از معادلات تعادل نتیجه می‌شود

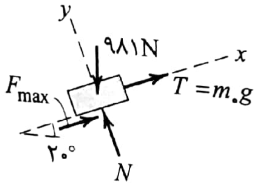
$[\Sigma F_y = ۰]$ $\quad N - ۹۸۱\cos۲۰° = ۰ \qquad N = ۹۲۲N$

$[\Sigma F_{max} = \mu_s N]$ $\quad F_{max} = ۰٫۳۰(۹۲۲) = ۲۷۷N$

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad m_۰(۹٫۸۱) - ۲۷۷ - ۹۸۱\sin۲۰° = ۰ \qquad m_۰ = ۶۲٫۴kg$ ج.



حالت ۱



حالت ۲

مقدار حداقل $m_۰$ وقتی است که آستانهٔ حرکت رو به پایین سطح باشد. همان‌گونه که در نمودار جسم آزاد در حالت (۲) نشان داده شد، نیروی اصطکاک وارد بر قطعه در جهت بالای سطح و ❶ مخالف تمایل حرکت جسم اثر می‌کند. تعادل در جهت x ایجاب می‌کند که

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad m_۰(۹٫۸۱) + ۲۷۷ - ۹۸۱\sin۲۰° = ۰ \qquad m_۰ = ۶٫۰۱kg$ ج.

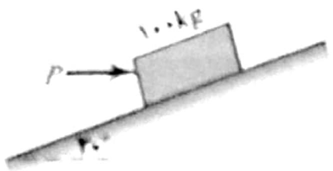
بنابراین $m_۰$ می‌تواند هر مقداری در بازهٔ $۶٫۰۱kg \le m_۰ \le ۶۲٫۴kg$ داشته باشد و قطعه در تعادل استاتیکی خواهد ماند.

در هر دو حالت (۱) و (۲) تعادل ایجاب می‌کند که برایند نیروهای F_{max}، N با نیروی وزن ۹۸۱N و کشش T همرس باشند.

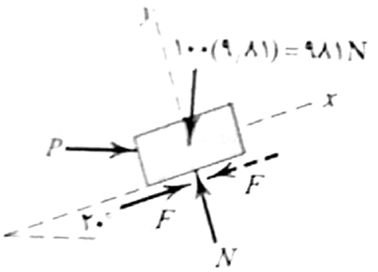
راهنمایی مفید

❶ از نتایج مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۶ می‌بینیم که اگر قطعه به‌جرم $m_۰$ متصل نباشد، به‌طرف پایین می‌لغزد زیرا $\tan ۲۰° > ۰٫۳۰$. پس برای برقراری تعادل مقدار $m_۰$ لازم است.

Scanned by CamScanner



مسئله نمونه ۶-۴ مقدار و جهت نیروی اصطکاک وارد بر قطعهٔ ۱۰۰kg در دو حالت (الف) $P = ۵۰۰\text{N}$، (ب) $P = ۱۰۰\text{N}$ را معین کنید. ضرایب اصطکاک استاتیکی و جنبشی بین قطعه و سطح شیبدار ۰٫۲۰ و ۰٫۱۷ هستند وقتی نیروها بر قطعه اعمال می‌شوند، قطعه در حالت سکون قرار دارد.



حل: از روی صورت مسئله نمی‌توان مشخص کرد که آیا قطعه بر اثر اعمال نیروی P ساکن می‌ماند یا به حرکت درمی‌آید. بنابراین باید فرضی را در نظر بگیریم. نیروی اصطکاک را به‌صورت پیکان توپُر نشان داده شده در شکل رو به بالا در نظر می‌گیریم. با توجه به نمودار جسم آزاد، از تعادل نیروها در جهات x و y نتیجه می‌شود

$$[\Sigma F_x = ۰] \qquad P\cos ۲۰^\circ + F - ۹۸۱\sin ۲۰^\circ = ۰$$

$$[\Sigma F_y = ۰] \qquad N - P\sin ۲۰^\circ - ۹۸۱\cos ۲۰^\circ = ۰$$

حالت (الف) $P = ۵۰۰\text{N}$

از جایگذاری $P = ۵۰۰\text{N}$ در دو رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود

$$F = -۱۳۴٫۳\text{N}$$

علامت منفی برای F نشان‌دهندهٔ این است که اگر جسم در تعادل استاتیکی باشد، نیروی اصطکاک مؤثر بر آن در خلاف جهت مفروض است. یعنی جهت واقعی آن به‌طرف پایین سطح است که با پیکان خط‌چین نشان داده شده است. ولی هنوز نمی‌توانیم در مورد F به نتیجه‌ای برسیم، تا زمانی که مطمئن شویم سطوح، قادر به تحمل نیروی اصطکاک ۱۳۴٫۳N می‌باشد.

با قراردادن $P = ۵۰۰\text{N}$ در معادلهٔ دوم، نتیجه می‌گیریم

$$N = ۱۰۹۳\text{N}$$

ماکزیمم نیروی اصطکاک استاتیکی که سطح می‌تواند تحمل کند برابر است با

$$[F_{\max} = \mu_s N] \qquad F_{\max} = ۰٫۲۰(۱۰۹۳) = ۲۱۹\text{N}$$

از آنجا که این نیرو از مقدار مورد نیاز برای تعادل، بزرگتر است، نتیجه می‌گیریم فرض تعادل استاتیکی درست بوده است. بنابراین

ج. $F = ۱۳۴٫۳\text{N}$ به‌طرف پایین سطح

حالت (ب) $P = ۱۰۰\text{N}$

از جایگذاری مقدار $P = ۱۰۰\text{N}$ در معادله‌های تعادل بالا نتیجه می‌شود

$$F = ۲۴۲\text{N}, \quad N = ۹۵۶\text{N}$$

اما ماکزیمم نیروی اصطکاکِ ممکن عبارت است از

$$[F_{\max} = \mu_s N] \qquad F_{\max} = ۰٫۲۰(۹۵۶) = ۱۹۱٫۲\text{N}$$

بنابراین ۲۴۲N اصطکاک، قابل تحمل نیست. از این‌رو، تعادلی وجود ندارد و مقدار صحیح نیروی اصطکاک را با استفاده از ضریب اصطکاک جنبشی در حرکت رو به پایین قطعه به‌دست می‌آوریم. ❶ از این‌رو پاسخ عبارت است از

ج. $[F_k = \mu_k N] \qquad F = ۰٫۱۷(۹۵۶) = ۱۶۲٫۵\text{N}$ به‌طرف بالای سطح

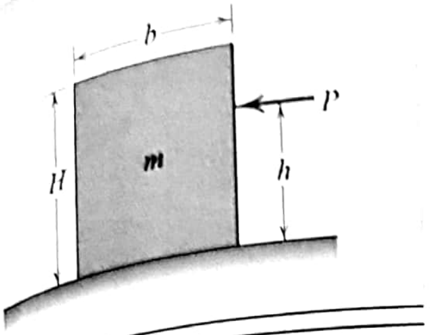
راهنمایی مفید

❶ باید توجه داشته باشیم اگرچه $\Sigma F_x \neq ۰$، تعادل در جهت y برقرار است، بنابراین $\Sigma F_y = ۰$ است. یعنی نیروی قائم N برابر ۹۵۶N می‌باشد، خواه قطعه ساکن یا متحرک باشد.

Scanned by CamScanner

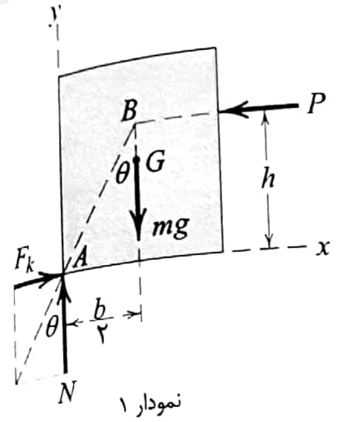
مسئلهٔ نمونهٔ ۶-۴

قطعهٔ همگن مستطیلی به جرم m با عرض b و ارتفاع H روی یک سطح افقی قرار دارد و تحت تأثیر نیروی P با سرعت ثابت در امتداد سطح حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه و سطح μ_k است. مطلوب است تعیین (الف) ماکزیمم مقدار h برای اینکه جسم در حین حرکت واژگون نشود و (ب) اگر $h = H/2$، مکان نقطهٔ C روی قاعدهٔ قطعه، که برایند نیروهای اصطکاکی و قائم از آن عبور می‌کند.



حل: (الف) قطعه را در آستانهٔ واژگونی قرار می‌دهیم، مشاهده می‌کنیم که نیروی واکنش کل بین سطح و قطعه از نقطهٔ A می‌گذرد. نمودار جسم آزاد قطعه این حالت را نشان می‌دهد (نمودار ۱). هنگام وقوع لغزش، نیروی اصطکاک برابر با مقدار حدی $\mu_k N$ است و زاویهٔ θ برابر است با $\theta = \tan^{-1}\mu_k$. برایند F_k و N از نقطهٔ B عبور می‌کند که نیروی P نیز باید از آن بگذرد، ❶ زیرا سه نیروی هم‌صفحه در حالت تعادل باید متقاطع باشند. از این‌رو، از شکل هندسی قطعه داریم

$$\tan\theta = \mu_k = \frac{b/۲}{h} \qquad h = \frac{b}{۲\mu_k} \qquad \text{ج.}$$



نمودار ۱

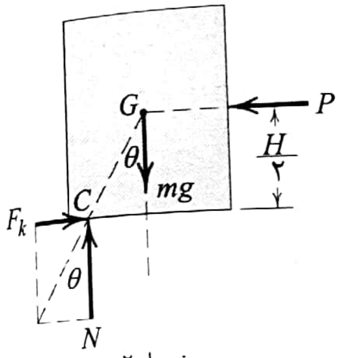
اگر h از مقدار به‌دست آمده بیشتر باشد، تعادل گشتاور حول A برقرار نشده و قطعه واژگون می‌شود.

روش دیگر برای تعیین h، از ترکیب شرایط تعادل در جهات x و y با معادلهٔ تعادل گشتاور حول A به‌دست می‌آید. از این‌رو

$$[\Sigma F_y = ۰] \qquad N - mg = ۰ \qquad N = mg$$

$$[\Sigma F_x = ۰] \qquad F_k - P = ۰ \qquad P = F_k = \mu_k N = \mu_k mg$$

$$[\Sigma M_A = ۰] \qquad Ph - mg\frac{b}{۲} = ۰ \qquad h = \frac{mgb}{۲P} = \frac{mgb}{۲\mu_k mg} = \frac{b}{۲\mu_k} \qquad \text{ج.}$$



نمودار ۲

(ب) با فرض $h = H/۲$ از نمودار جسم آزاد قسمت (ب)، درمی‌یابیم که برایند F_k و N از نقطهٔ C عبور می‌کند. این نقطه در فاصلهٔ x در سمت چپ خط مرکز قائم گذرا از G قرار دارد. تا زمانی‌که قطعه در حال لغزش است، زاویهٔ θ برابر $\theta = \phi = \tan^{-1}\mu_k$ می‌باشد. بنابراین، از هندسهٔ شکل داریم

$$\frac{x}{H/۲} = \tan\theta = \mu_k \Rightarrow x = \mu_k H/۲ \qquad \text{ج.} ❷$$

اگر μ_k را با ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s جایگزین می‌کردیم، پاسخ‌های ما بیانگر شرایطی بود که در آن قطعه از حالت سکون (الف) در آستانهٔ واژگون شدن، و (ب) در آستانهٔ لغزش بود.

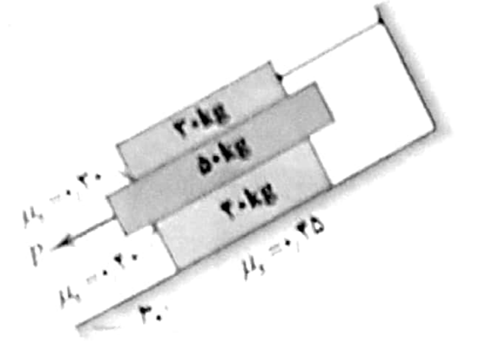
راهنمایی‌های مفید

❶ یادآور می‌شویم که معادلات تعادل هم برای جسمی که با سرعت ثابت در حال حرکت است (شتاب صفر) و هم در مورد جسم در حال سکون، به‌کار می‌رود.

❷ در روش دیگر، می‌توان با صفر قرار دادن گشتاورها حول نقطهٔ G، به معادلهٔ $F(H/۲) - N_x = ۰$ رسید. بنابراین، از آنجاکه $F_k = \mu_k N$، نتیجه می‌شود $x = \mu_x H/۲$.

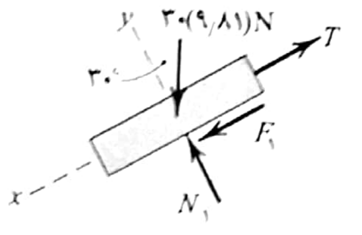
Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۶/۵ سه قطعهٔ تخت مطابق شکل روی یک سطح شیبدار به شیب ۳۰° قرار دارند و نیروی P به‌موازات سطح شیبدار بر قطعهٔ میانی وارد می‌شود. قطعهٔ بالایی توسط سیمی به تکیه‌گاه ثابت متصل است. این سیم از حرکت قطعهٔ بالایی جلوگیری می‌کند. ضریب اصطکاک استاتیکی برای هر سه قطعهٔ تماس در شکل نشان داده شده است. ماکزیمم نیروی P را پیش از شروع لغزش تعیین کنید.

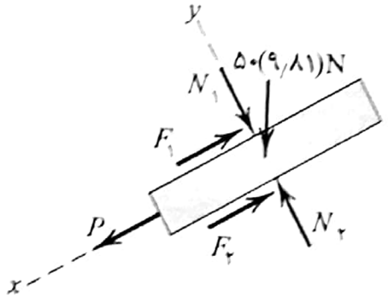


حل: نمودار جسم آزاد قطعات را رسم کرده و جهت نیروهای اصطکاک را در خلاف جهت حرکت نسبی قطعات (در صورت نبودن اصطکاک) در نظر می‌گیریم. برای آستانهٔ حرکت دو حالت ممکن وجود دارد: قطعهٔ ۵۰ کیلوگرمی بلغزد و قطعهٔ ۴۰ کیلوگرمی در جای خود بماند، و یا قطعات ۵۰ و ۴۰ کیلوگرمی با هم حرکت کنند و بین قطعهٔ ۴۰ کیلوگرمی و سطح شیبدار لغزش اتفاق افتد. ❶

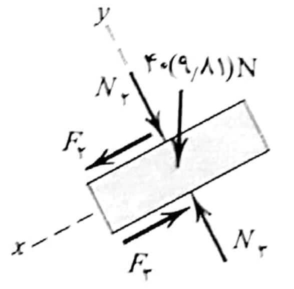
نیروهای عمودی را که در جهت y هستند، می‌توان بدون توجه به نیروهای اصطکاک، که همه در جهت x هستند، تعیین کرد. از این‌رو



$[\Sigma F_y = ۰]$ برای قطعهٔ ۳۰ کیلوگرمی: (۳۰kg) $N_۱ - ۳۰(۹٫۸۱)\cos ۳۰° = ۰$ $\quad N_۱ = ۲۵۵\text{N}$



برای قطعهٔ ۵۰ کیلوگرمی: (۵۰kg) $N_۲ - ۵۰(۹٫۸۱)\cos ۳۰° - ۲۵۵ = ۰$ $\quad N_۲ = ۶۸۰\text{N}$



برای قطعهٔ ۴۰ کیلوگرمی: (۴۰kg) $N_۳ - ۴۰(۹٫۸۱)\cos ۳۰° - ۶۸۰ = ۰$ $\quad N_۳ = ۱۰۱۹\text{N}$

به‌دلخواه فرض می‌کنیم که تنها قطعهٔ ۵۰ کیلوگرمی می‌لغزد و قطعهٔ ۴۰ کیلوگرمی در جای خود باقی می‌ماند. در این صورت برای آستانهٔ لغزش هر دو سطح بالایی و پایینی قطعهٔ ۵۰ کیلوگرمی، داریم

$[F_{\max} = \mu_s N]$ $\quad F_۱ = ۰٫۳۰(۲۵۵) = ۷۶٫۵\text{N}$ $\quad F_۲ = ۰٫۴۰(۶۸۰) = ۲۷۲\text{N}$

فرض تعادل نیروها در آستانهٔ حرکت قطعهٔ ۵۰ کیلوگرمی، نتیجه می‌دهد

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad P - ۷۶٫۵ - ۲۷۲ + ۵۰(۹٫۸۱)\sin ۳۰° = ۰$ $\quad P = ۱۰۳٫۱\text{N}$

اکنون صحت فرض اولیهٔ خود را بررسی می‌کنیم. برای قطعهٔ ۴۰ کیلوگرمی با $F_۲ = ۲۷۲\text{N}$، نیروی اصطکاک $F_۳$ عبارت است از

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad ۲۷۲ + ۴۰(۹٫۸۱)\sin ۳۰° - F_۳ = ۰$ $\quad F_۳ = ۴۶۸\text{N}$

اما مقدار ماکزیمم ممکن برای $F_۳$، برابر است با $F_۳ = \mu_s N_۳ = ۰٫۴۵(۱۰۱۹) = ۴۵۹\text{N}$. از این‌رو ۴۶۸N قابل تحمل نیست و فرض اولیهٔ ما نادرست بوده است. پس نتیجه می‌گیریم که لغزش ابتدا بین قطعهٔ ۴۰ کیلوگرمی و سطح شیبدار رخ می‌دهد. با مقدار اصلاح‌شدهٔ $F_۳ = ۴۵۹\text{N}$ تعادل قطعهٔ ۴۰ کیلوگرمی در آستانهٔ حرکت لازم ایجاب می‌کند که

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad F_۲ + ۴۰(۹٫۸۱)\sin ۳۰° - ۴۵۹ = ۰$ $\quad F_۲ = ۲۶۳\text{N}$ ❷

تعادل قطعهٔ ۵۰ کیلوگرمی نتیجه می‌دهد

$[\Sigma F_x = ۰]$ $\quad P + ۵۰(۹٫۸۱)\sin ۳۰° - ۲۶۳ - ۷۶٫۵ = ۰$

$P = ۹۳٫۸\text{N}$ **ج.**

پس با $P = ۹۳٫۸\text{N}$، هر دو قطعهٔ ۵۰ و ۴۰ کیلوگرمی به‌صورت یک‌پارچه در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرند.

راهنمایی‌های مفید

❶ در غیاب اصطکاک، سرعت قطعهٔ ۵۰ کیلوگرمی بیشتر از سرعت قطعهٔ ۴۰ کیلوگرمی خواهد بود زیرا مستقیماً تحت تأثیر نیروی P قرار دارد. بنابراین همان‌طورکه در نمودار جسم آزاد نشان‌داده‌شده، نیروی $F_۲$ در خلاف جهت این حرکت است.

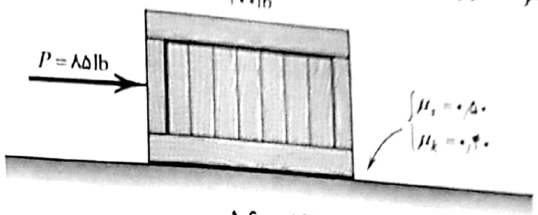
❷ مشاهده می‌شود که $F_۲$ کمتر از $\mu_s N_۲ = ۲۷۲\text{N}$ است.

Scanned by CamScanner

مسائل

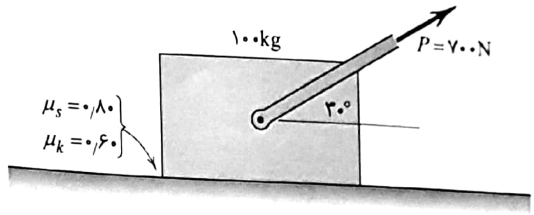
مسائل مقدماتی

۱.۶ نیروی P برابر 85lb بر صندوقی ۲۰۰ پوندی که روی زمین ساکن است وارد می‌شود. مقدار و جهت نیروی اصطکاک وارد بر صندوق را تعیین کنید.



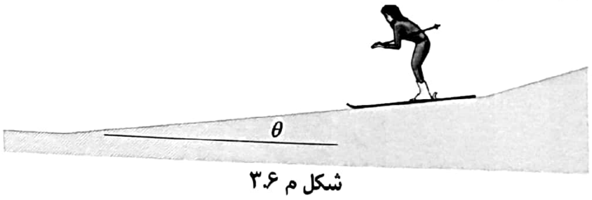
شکل م ۱.۶

۲.۶ نیروی ۷۰۰N بر قطعهٔ ساکن ۱۰۰ کیلوگرمی وارد می‌شود. مقدار و جهت نیروی اصطکاک F وارد بر سطح افقی قطعه را تعیین کنید.



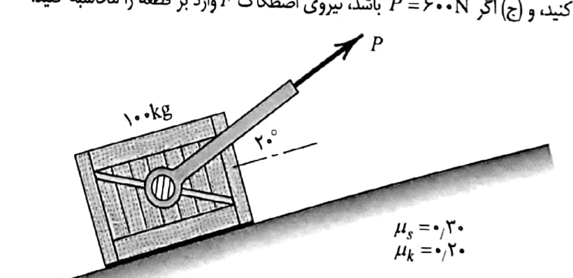
شکل م ۲.۶

۳.۶ طراح یک پیست اسکی می‌خواهد قسمت شیبداری برای اسکی‌بازان مبتدی طراحی کند که دارای سرعت نسبی ثابتی باشد. آزمون نشان می‌دهد که میانگین ضرایب اصطکاک بین پیست اسکی و برف $\mu_s = ۰/۱۰$ و $\mu_k = ۰/۰۸$ است. زاویهٔ شیب θ برای حفظ سرعت ثابت در این قسمت، چقدر باید باشد؟



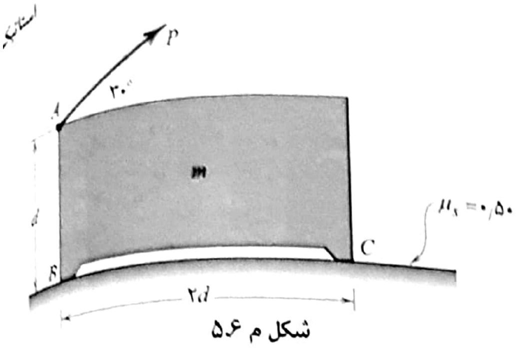
شکل م ۳.۶

۴.۶ ضرایب اصطکاک استاتیکی و جنبشی بین قطعهٔ ۱۰۰ کیلوگرمی و سطح شیبدار به‌ترتیب $\mu_s = ۰/۳۰$ و $\mu_k = ۰/۲۰$ می‌باشند. (الف) نیروی اصطکاک F وارد بر قطعه را وقتی P به‌مقدار ۲۰۰N بر قطعهٔ در حالت سکون وارد می‌شود تعیین کنید. (ب) مقدار نیروی مورد نیاز P را برای شروع حرکت از حالت سکون به‌سمت بالای سطح شیبدار تعیین کنید، و (ج) اگر $P = ۶۰۰N$ باشد، نیروی اصطکاک F وارد بر قطعه را محاسبه کنید.



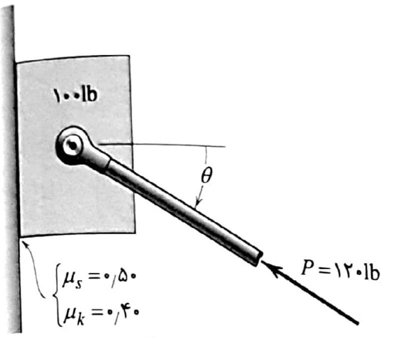
شکل م ۴.۶

۵.۶ اندازهٔ نیروی P به‌تدریج افزایش می‌یابد. آیا جعبهٔ همگن به جرم m ابتدا می‌لغزد یا واژگون می‌شود؟ مقدار P که باعث هر رخدادی می‌شود را تعیین کنید. از هرگونه اثر کوچک صرف نظر کنید.



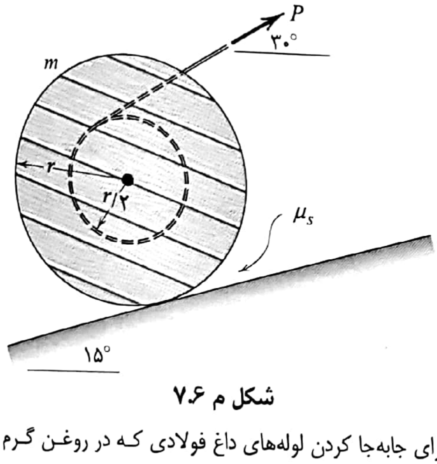
شکل م ۵.۶

۶.۶ مقدار و جهت نیروی اصطکاک را که دیوار قائم بر قطعهٔ ۱۰۰ پوندی وارد می‌کند برای (الف) $\theta = ۱۵°$ و (ب) $\theta = ۳۰°$ تعیین کنید.



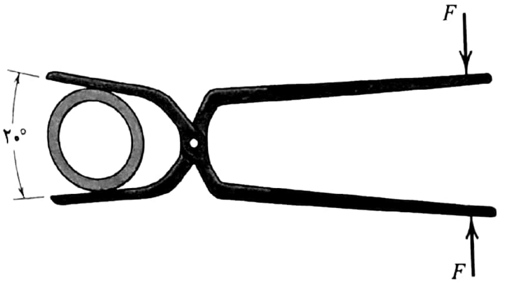
شکل م ۶.۶

۷.۶ حداقل ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s را که اجازه می‌دهد مرکز ثابت استوانه در سطحی با شیب ۱۵° با سرعت ثابت بدون لغزیدن حرکت کند محاسبه کنید. مقدار مورد نظر نیروی P و نیروی اصطکاک F چه اندازه است؟



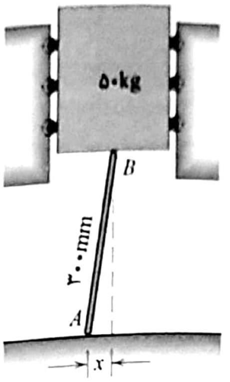
شکل م ۷.۶

۸.۶ انبری برای جابه‌جا کردن لوله‌های داغ فولادی که در روغن گرم قرار دارند طراحی شده است. برای دهانهٔ فکی که به‌میزان ۲۰° باز شده، حداقل ضریب اصطکاک استاتیکی بین فک‌ها و لوله‌ها، که انبر را قادر به گرفتن لوله بدون لغزش می‌سازد، چقدر است؟



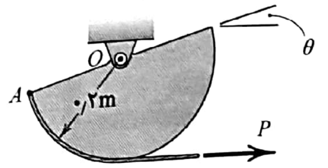
شکل م ۸.۶

۹.۶ از میلهٔ باریکی برای نگهداری قطعهٔ ۵۰ کیلوگرمی در ناودان عمودی استفاده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی در انتهای بالای میله ۰٫۳۰ و در انتهای پایین میله ۰٫۴۰ باشد، نیروی اصطکاک وارد بر هر انتها را برای $x = 75mm$ پیدا کنید. همچنین ماکزیمم مقدار x را، که به‌ازای آن میله نلغزد، تعیین کنید.



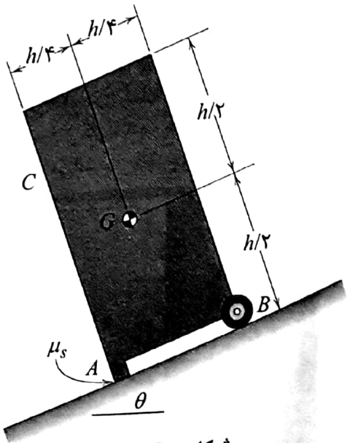
شکل م ۹.۶

۱۰.۶ صفحهٔ نیم‌دایرهٔ ۵ کیلوگرمی حول محور ثابت یاتاقان در نقطهٔ O می‌چرخد. این یاتاقان می‌تواند حداکثر گشتاور اصطکاکی $1/2 N\cdot m$ را بر صفحه وارد کند. به طنابی که با اتصال به نقطهٔ A به دور صفحه پیچیده شده است، نیروی افقی P وارد می‌شود. (الف) با فرض $P = 0$؛ حداکثر زاویهٔ θ برای اینکه تعادل امکان‌پذیر شود را تعیین کنید. (ب) در وضعیت تعیین‌شده در قسمت (الف)، نیروی P مورد نیاز را برای چرخش جسم در جهت پادساعتگرد محاسبه کنید.



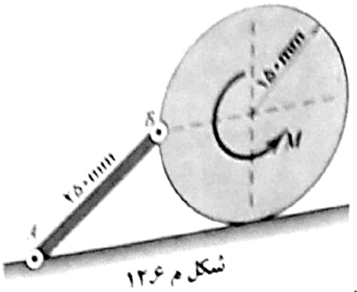
شکل م ۱۰.۶

۱۱.۶ جسمی همگن با دو پایهٔ کوچک و دو چرخ مناسب روی سطح ناصاف شیبدار در وضعیت سکون قرار دارد. (الف) با فرض نبودن لغزش، ماکزیمم مقدار زاویهٔ θ را برای اینکه جسم حول پایهٔ A واژگون نشود تعیین کنید. (ب) اگر $\mu_s = 0/40$، حداکثر مقدار زاویهٔ θ را برای اینکه جسم نلغزد تعیین کنید. (ج) اگر $\mu_s = 0/40$ و طرف C جسم، اکنون وجوهش به‌سمت بالای سطح شیبدار باشد، حداکثر مقدار زاویهٔ θ را برای اینکه جسم نلغزد تعیین کنید.



شکل م ۱۱.۶

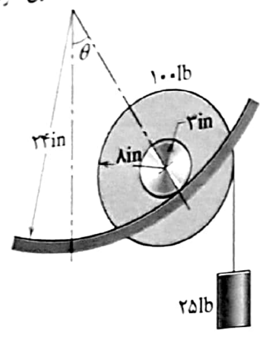
۱۲.۶ حایل تقویت AB با جرم ناچیز به سطح افقی در نقطهٔ A و به چرخ یکنواخت ۲۵ کیلوگرمی در نقطهٔ B لولا شده است. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین چرخ و سطح اتکا ۰٫۴۰ باشد، حداقل کوپل M وارد بر چرخ را که باعث چرخش آن خواهد شد تعیین کنید.



شکل م ۱۲.۶

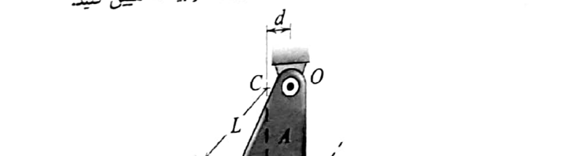
مسائل برگزیده

۱۳.۶ چرخ ۱۰۰ پوندی روی شیب با مرکز دایره تحت اثر وزن ۲۵lb متصل به طنابی که حول محیط آن پیچیده شده بالا می‌رود. با فرض اینکه اصطکاک کافی برای ایستادن موجود باشد، زاویهٔ θ را وقتی که چرخ ساکن می‌شود تعیین کنید. مینیمم ضریب اصطکاک ممکن برای رسیدن به حالت بدون لغزش چقدر است؟



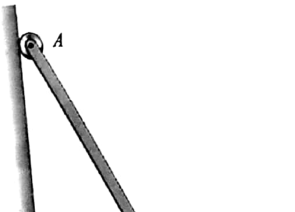
شکل م ۱۳.۶

۱۴.۶ شکل نشان‌داده‌شده طرح یک مانع اصطکاک است که به‌وسیلهٔ آن در حضور اصطکاک، با قفل شدن از حرکت جسم B به‌سمت راست جلوگیری نموده و حرکت به‌سمت چپ را محدود می‌کند. سطح مانع در نزدیکی نقطهٔ D به‌صورت دایره‌ای به مرکز C است. با فاصلهٔ مشخص L اگر ضریب اصطکاک استاتیکی $\mu_s = 0/20$ یا بزرگتر باشد، طول تماس d ابزار را برای اینکه ابزار به‌کار بیفتد، تعیین کنید.



شکل م ۱۴.۶

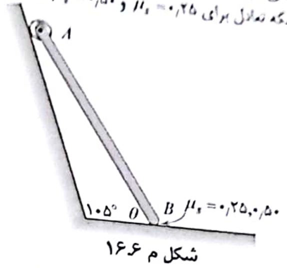
۱۵.۶ میلهٔ بلند و باریکی دارای یک غلتک مناسب در انتهای بالای نقطهٔ A است. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی در نقطهٔ B برابر $\mu_s = 0/25$ باشد، حداقل زاویهٔ θ را برای اینکه تعادل امکان‌پذیر شود، تعیین کنید. مسئله را برای $\mu_s = 0/50$ تکرار کنید.



شکل م ۱۵.۶

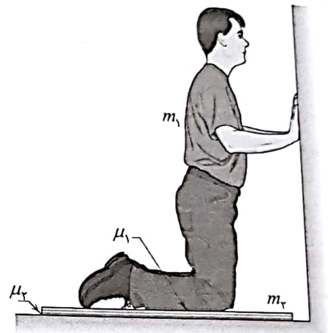
Scanned by CamScanner

۱۶.۶ انتهای بالای میلهٔ مسئلهٔ ۱۵.۶ اکنون مقابل دیوار مایل قرار دارد. حداقل مقدار زاویهٔ θ را برای اینکه تعادل برای $\mu_s = ۰/۲۵$ و $\mu_s = ۰/۵۰$ امکان‌پذیر باشد تعیین کنید.



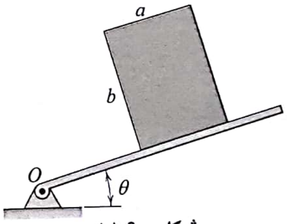
شکل م ۱۶.۶

۱۷.۶ شخصی (به‌جرم $m_۱$) زانوی خود را روی تختهٔ صاف (به جرم $m_۲$) مطابق شکل قرار می‌دهد. ضریب $\mu_۲$ چه اندازه باشد تا شخص بتواند خودش را به‌همراه تخته به‌طرف خارج دیوار هل دهد؟ $\mu_۱$ و $\mu_۲$ ضرایب مناسبی برای اصطکاک استاتیکی هستند. $\mu_۲$ را درصورتی که $m_۱ = ۸۰\text{kg}$، $m_۲ = ۱۰\text{kg}$ و $\mu_۱ = ۰/۶۰$ باشد، ارزیابی کنید.



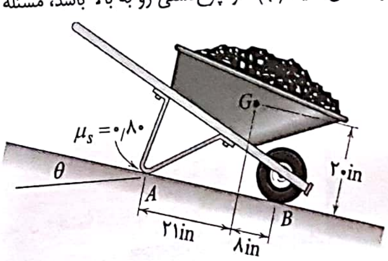
شکل م ۱۷.۶

۱۸.۶ قطعهٔ مستطیلی همگن به جرم m روی صفحهٔ مایلی که حول محور افقی که از O عبور می‌کند قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین قطعه و تخته μ باشد به‌طور صریح شرایط مشخص‌کنندهٔ اینکه، آیا قطعه پیش از واژگون شدن می‌لغزد یا پیش از لغزیدن واژگون می‌شود را وقتی θ به‌طور تدریجی افزایش می‌یابد، تعیین کنید.



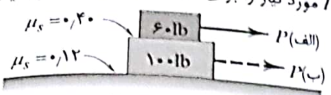
شکل م ۱۸.۶

۱۹.۶ چرخ‌دستی پُر از باری روی سطح ناصاف شیبدار قرار گرفته است. مجموع وزن چرخ‌دستی و بار آن بر مرکز گرانی G وارد می‌شود. (الف) حداکثر زاویهٔ θ را برای اینکه چرخ‌دستی نلغزد تعیین کنید. (ب) اگر چرخ‌دستی رو به بالا باشد، مسئله را تکرار کنید.



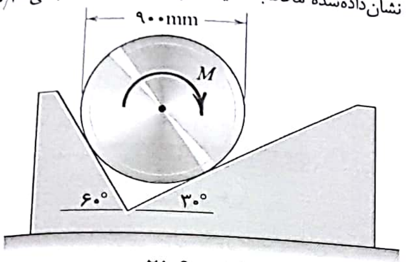
شکل م ۱۹.۶

۲۰.۶ نیروی P، (الف) بر قطعهٔ ۶۰ پوندی و (ب) بر قطعهٔ ۱۰۰ پوندی وارد می‌شود در هر مورد، اندازهٔ P مورد نیاز را برای حرکت اولیهٔ قطعه تعیین کنید.



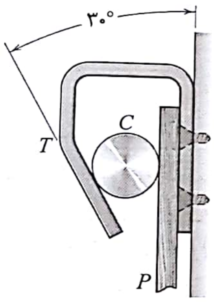
شکل م ۲۰.۶

۲۱.۶ اندازهٔ کوپل M ساعتگرد لازم برای چرخش استوانهٔ ۵۰ کیلوگرمی را برای نگهداری قطعهٔ نشان‌داده‌شده محاسبه کنید. ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۳۰ است.



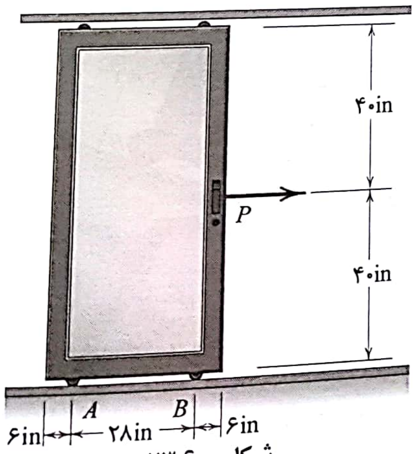
شکل م ۲۱.۶

۲۲.۶ ریل معکوس T که استوانهٔ شناور C آزادانه در آن حرکت می‌کند، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند که برای نگهداری کاغذ یا جسم سبک P در جای خود به‌کار می‌رود. ضریب اصطکاک استاتیکی برای تمام سطوح آن μ است. حداقل مقدار μ را برای اینکه این وسیله بدون مشکل کار کند تعیین کنید. ضخامت موادی که نگهداری می‌شوند چقدر باید باشد؟



شکل م ۲۲.۶

۲۳.۶ درب شیشه‌ای کشویی بر روی چرخ‌های کوچک A و B در پایین آن می‌لغزد. در شرایط عادی، چرخ‌های بالایی با هدایت‌کنندهٔ افقی تماس ندارند. (الف) اگر چرخ A از کار بیفتد و روی یاتاقان نچرخد نیروی P لازم را برای لغزیدن درب با سرعت ثابت محاسبه کنید. (ب) اگر چرخ B به‌جای چرخ A از کار بیفتد، مسئله را دوباره تکرار کنید. ضریب اصطکاک جنبشی بین چرخ از کار افتاده و سطح تکیه‌گاه، ۰/۳۰ و مرکز جرم ۱۴۰ پوندی درب در مرکز هندسی آن می‌باشد. از قطر چرخ‌های کوچک صرف‌نظر کنید.

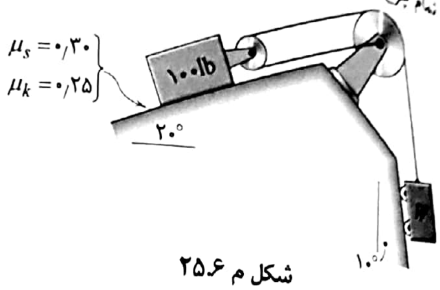


شکل م ۲۳.۶

۲۴.۶ کوپل M ساعتگرد بر استوانهٔ مدور مطابق شکل وارد می‌شود. مقدار M لازم برای حرکت اولیه در شرایط $m_B = ۳kg$، $m_C = ۶kg$، $(\mu_s)_B = ۰٫۵۰$، $(\mu_s)_C = ...$ و $r = ۰٫۲m$ معین کنید. اصطکاک بین استوانهٔ C و قطعهٔ B ناچیز است.

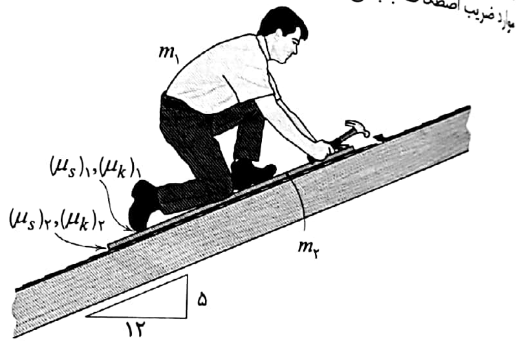
شکل م ۲۴.۶

۲۵.۶ کمترین وزن W را برای اینکه قطعهٔ ۱۰۰ پوندی در تعادل باشد، تعیین کنید. از اصطکاک در تمام چرخ‌ها و قرقره‌ها صرف‌نظر شود.



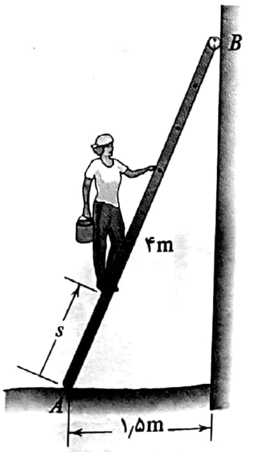
شکل م ۲۵.۶

۲۶.۶ تعمیرکار سقف به‌وزن ۱۰۰ کیلوگرم روی ورق تختهٔ چندلایهٔ ۱۸ کیلوگرمی، به‌منظور تخته‌پوش کردن سطح سقف خم شده است. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی برابر (الف) $(\mu_s)_۱ = ۰٫۶۰$ و $(\mu_s)_۲ = ۰٫۵۰$ و (ب) $(\mu_s)_۱ = ۰٫۵۰$ و $(\mu_s)_۲ = ۰٫۴۰$ باشد، نیروی اصطکاکی را که سطح سقف بر تخته وارد می‌کند تعیین کنید. در تمام موارد ضریب اصطکاک جنبشی ۷۵٪ ضریب اصطکاک استاتیکی است.



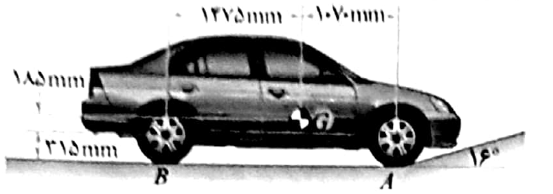
شکل م ۲۶.۶

۲۷.۶ فاصله‌ای (s) را که نقاش ۹۰ کیلوگرمی می‌تواند از نردبان ۴ متری بالا رود و انتهای پایین آن در نقطهٔ A نلغزد معین کنید. در بالای این نردبان ۱۵ کیلوگرمی غلتک کوچکی وجود دارد، و ضریب اصطکاک استاتیکی نردبان بر روی زمین ۰٫۲۵ است. مرکز جرم نقاش مستقیماً بالای پاهای او می‌باشد.



شکل م ۲۷.۶

۲۸.۶ اتومبیل ۱۴۰۰ کیلوگرمی در آستانهٔ حرکت بر روی سطح شیبداری با شیب °۱۶ است. اگر اتومبیل دیفرانسیل‌عقب باشد حداقل ضریب اصطکاک استاتیکی در نقطهٔ B را تعیین کنید.

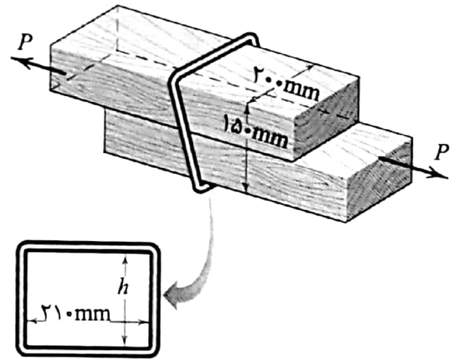


شکل م ۲۸.۶

۲۹.۶ مسئلهٔ ۲۸.۶ را برای اتومبیل دیفرانسیل‌جلو حل کنید.

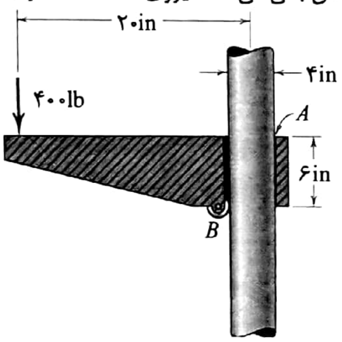
۳۰.۶ مسئلهٔ ۲۸.۶ را برای اتومبیل دودیفرانسیله حل کنید. فرض کنید لغزش در A و B به‌طور همزمان اتفاق افتد.

۳۱.۶ یوغ (قید) مستطیلی از جنس فولاد برای جلوگیری از لغزش بین دو تختهٔ تحت کشش بار P به‌کار می‌رود. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین تخته‌ها، قید، و سطوح دو تخته، همه ۰٫۳۰ باشد، مقدار ماکزیمم h را برای اینکه لغزشی رخ ندهد، معین کنید. برای $P = ۸۰۰N$، اگر تمام سطوح در آستانهٔ حرکت باشند، نیروی واکنش N بین دو تخته را تعیین کنید.



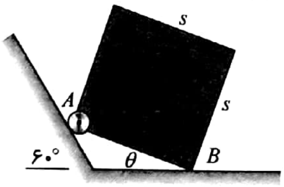
شکل م ۳۱.۶

۳۲.۶ شکل زیر مقطعی از دیوارکوب بارگذاری‌شده را نشان می‌دهد، که از سوی میل‌گردان ثابت با غلتک در نقطهٔ B و اصطکاک در گوشهٔ A تحمل می‌شود. ضریب اصطکاک استاتیکی ۰٫۴۰ است. از وزن دیوارکوب صرف‌نظر کنید و نشان دهید این دیوارکوب در جای خودش باقی می‌ماند. نیروی اصطکاک F را به‌دست آورید.



شکل م ۳۲.۶

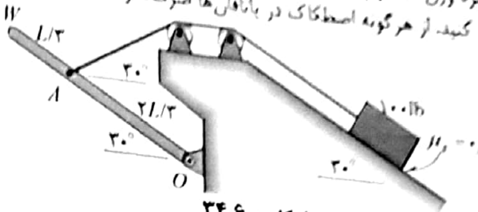
۳۳.۶ جسم مربع همگن در وضعیت نشان داده شده قرارگرفته است. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی در نقطهٔ B، برابر ۰٫۴۰ باشد، مقدار بحرانی زاویهٔ θ را پیش از اینکه لغزش رخ بدهد، تعیین کنید. اصطکاک در نقطهٔ A ناچیز است.



شکل م ۳۳.۶

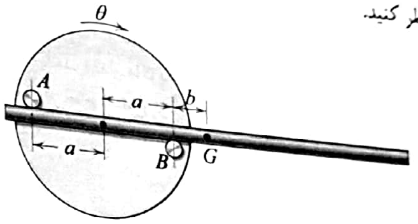
Scanned by CamScanner

۶.۳۴ گسترهٔ وزن W مربوط به میلهٔ بلند یکنواخت را، درحالی که سیستم در تعادل باشد، تعیین کنید. از هرگونه اصطکاک در یاتاقان‌ها صرف‌نظر کنید.



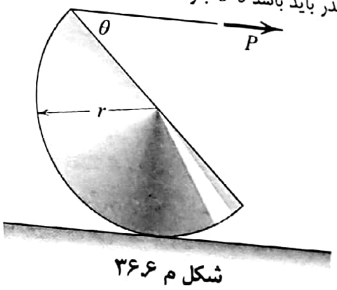
شکل م ۶.۳۴

۶.۳۵ میلهٔ یکنواخت، با مرکز جرم G توسط دو مانع در نقاط A و B نگه‌داشته می‌شود. اگر ضریب اصطکاک بین میله و دو مانع برابر μ باشد، زاویهٔ θ را برای اینکه چرخ تدریجاً حول محور افقی‌اش در نقطهٔ O بچرخد، بدون آنکه میله دچار لغزش شود، تعیین کنید. حرکت از وضع نشان‌داده‌شده شروع شده و از قطر میله در مقایسه با ابعاد دیگر صرف‌نظر کنید.



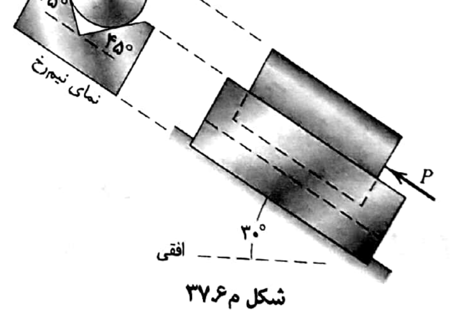
شکل م ۶.۳۵

۶.۳۶ نیم استوانهٔ توپُری به جرم m و شعاع r، تحت تأثیر نیروی افقی P به‌اندازهٔ زاویهٔ θ می‌غلتد. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s باشد، هنگامی که استوانه شروع به لغزیدن روی سطح افقی می‌کند و P به‌تدریج افزایش می‌یابد، زاویهٔ θ را تعیین کنید. اندازهٔ μ_s چقدر باید باشد تا θ بتواند به زاویهٔ ۹۰° برسد؟



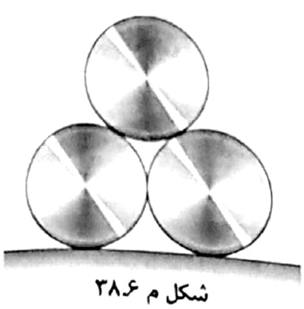
شکل م ۶.۳۶

۶.۳۷ استوانه‌ای توپُر به‌وزن ۱۰kg در قطعهٔ توپُر V_شکلی ساکن است. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین قطعه و استوانه ۰٫۵۰ باشد، (الف) نیروی اصطکاک F وارد بر استوانه در هر طرف را پیش از اینکه نیروی P بر آن وارد شود، تعیین کنید و (ب) مقدار نیروی P لازم را برای شروع لغزیدن استوانه به‌سمت بالا به‌دست آورید.



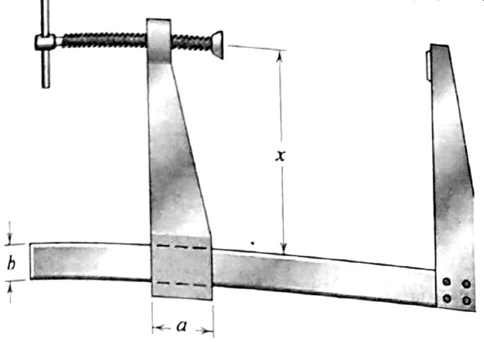
شکل م ۶.۳۷

۶.۳۸ سه غلتک مشابه روی‌هم مطابق شکل در سطحی افقی چیده شده‌اند. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s بین دو جفت مماس برای همهٔ آنها یکسان باشد، حداقل مقدار μ_s را برای وقتی که غلتک‌ها نلغزند، تعیین کنید.



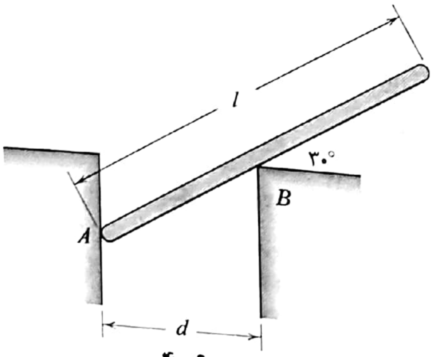
شکل م ۶.۳۸

۶.۳۹ فک متحرک گیرهٔ نشان‌داده‌شده را می‌توان برای افزایش ظرفیت گیره در راستای پایهٔ خود لغزاند. برای جلوگیری از لغزیدن فک روی قاب وقتی گیره تحت تأثیر بار است باید بُعد x از مینیمم مشخصی بیشتر باشد. برای مقادیر داده شدهٔ a و b و ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s، حداقل مقدار x را برای جلوگیری از لغزیدن فک معین کنید.



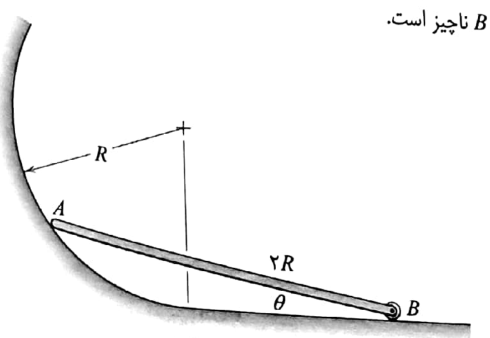
شکل م ۶.۳۹

۶.۴۰ میلهٔ بلند و باریکی به‌طول l به‌صورت نشان‌داده‌شده با زاویهٔ ۳۰° در شکافی به‌عرض d قرارگرفته است. برای چه مقدار l/d میله در تعادل استاتیکی باقی خواهد ماند؟ ضریب اصطکاک استاتیکی در A و B، $\mu_s = ۰٫۴۰$ است.



شکل م ۶.۴۰

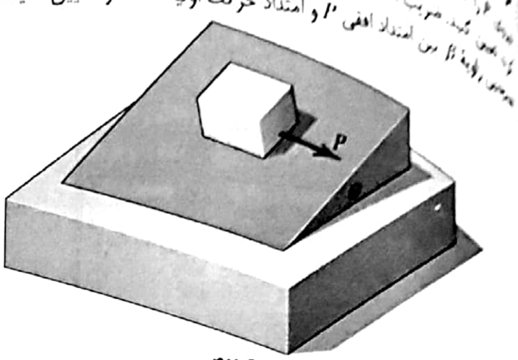
۶.۴۱ ماکزیمم مقدار زاویهٔ θ را برای اینکه میلهٔ باریک یکنواخت در تعادل استاتیکی باقی بماند، معین کنید. ضریب اصطکاک استاتیکی $\mu_A = ۰٫۸۰$ و اصطکاک در غلتک کوچک B ناچیز است.



شکل م ۶.۴۱

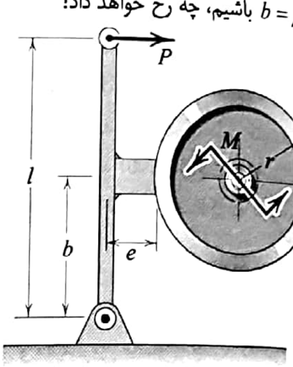
Scanned by CamScanner

۴۲.۶ قطعهٔ یکنواخت به‌جرم m روی سطح شیبدار با زاویهٔ θ ساکن است. حداکثر نیرویی را که می‌توان بر قطعه در امتداد نشان‌داده‌شده پیش از شروع لغزیدن وارد کرد، تعیین کنید. ضریب اصطکاک استاتیکی بین قطعه و سطح شیبدار μ_s است. زاویهٔ β بین امتداد افقی P و امتداد حرکت اولیهٔ قطعه را تعیین کنید.



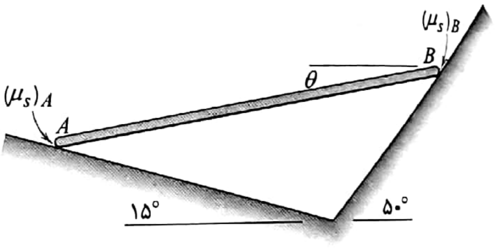
شکل م ۴۲.۶

۴۳.۶ ترمز اهرمی تک‌کفشکی نشان‌داده‌شده از چرخش چرخ طیار تحت پیچش M جلوگیری می‌کند. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s باشد، نیروی P مورد نیاز را برای جلوگیری از چرخش تعیین کنید. توضیح دهید، اگر از نظر هندسی مجاز به نوشتن رابطهٔ $b = \mu_s e$ باشیم، چه رخ خواهد داد؟



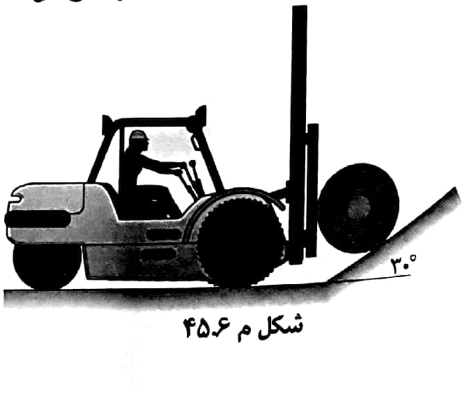
شکل م ۴۳.۶

۴۴.۶ درصورتی‌که (الف) $(\mu_s)_A = ۰/۶۰$ و $(\mu_s)_B = ۰/۲۰$ و (ب) $(\mu_s)_A = ۰/۴۰$ و $(\mu_s)_B = ۰/۱۰$، مقدار حداقل θ را برای اینکه تعادل امکان‌پذیر باشد معین کنید.



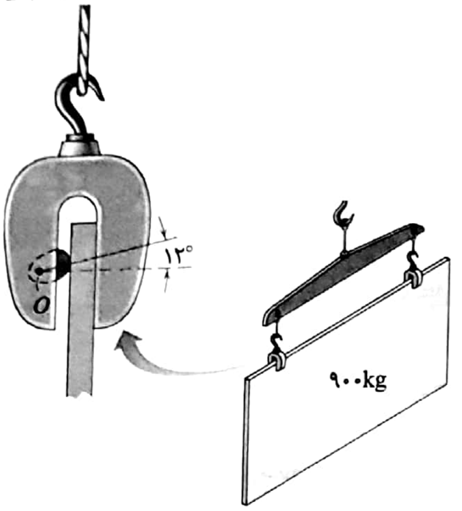
شکل م ۴۴.۶

۴۵.۶ از دستگاه صنعتی نشان‌داده‌شده برای حرکت دادن رُل کاغذ توپُر به جرم ۱۲۰۰kg به بالای شیب °۳۰ استفاده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی و ضریب اصطکاک جنبشی بین رُل کاغذ و سطح قائم دستگاه و بین کاغذ و سطح شیبدار هر دو ۰/۴۰ باشد، نیروی P را بین تایرهای دستگاه و سطح افق محاسبه کنید.



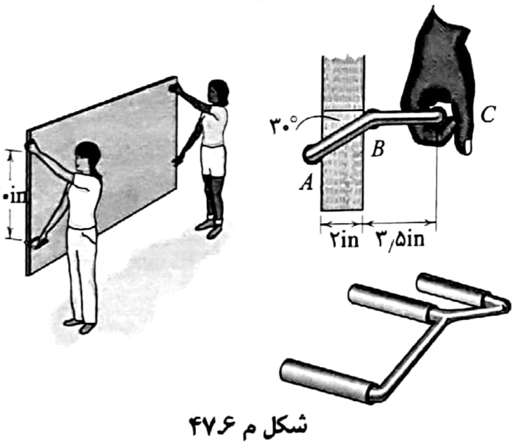
شکل م ۴۵.۶

۴۶.۶ برای بلندکردن و حمل اجسام سنگین، از گیره‌های مقاوم نشان‌داده‌شده با بادامک‌های گوه‌ای به‌صورت زوجی استفاده می‌شود. در هنگام کارکردن هر بادامک، ورق، کمی روی سطح قائم گیره می‌لغزد و در محل سطوح تماس اصطکاک استاتیکی حدی ایجاد می‌کند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی برای همهٔ سطوح تماس ۰/۳۰ باشد، نیروی R نگهدارنده توسط پین را در نقطهٔ O روی صفحهٔ ۹۰۰ کیلوگرمی معین کنید.



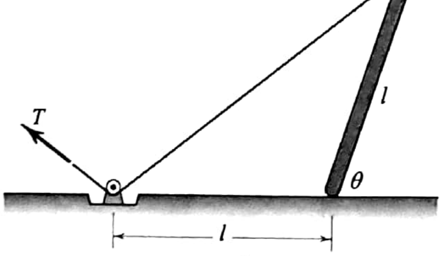
شکل م ۴۶.۶

۴۷.۶ دو کارگر صفحه‌ای به‌ضخامت ۲ in را با دستگیره‌های ویژه حمل می‌کنند، که در شکل جزئیات فقط یکی از این دو دستگیره نشان داده شده است. صفحه توسط نیروهای افقی و مساوی واردشده از طرف دست چپ کارگران به‌حالت عمودی نگه‌داشته می‌شود. حداقل ضریب اصطکاک استاتیکی بین صفحه و دستگیره‌های حمل‌کننده را طوری تعیین کنید که لغزشی رخ ندهد. لوله‌های لاستیکی در نقاط A و B و C از دستگیرهٔ حمل روی قاب نمی‌چرخند. توجه کنید که هر کارگر باید هم نیروی افقی و هم عمودی، بر دستهٔ حمل کننده وارد کند.



شکل م ۴۷.۶

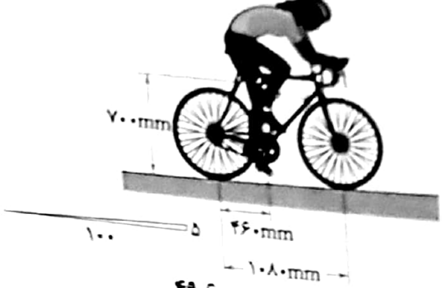
۴۸.۶ میلهٔ یکنواختی با استفاده از طنابی که به انتهای بالایی آن بسته شده و از زیر قرقرهٔ ثابت کوچک می‌گذرد به‌آهستگی از وضعیت ایستاده ($\theta = ۹۰°$) پایین آورده می‌شود. اگر انتهای پایین میله زمانی شروع به لغزش کند که $\theta = ۴۰°$ باشد، ضریب اصطکاک استاتیکی را در سطح افقی تعیین کنید.



شکل م ۴۸.۶

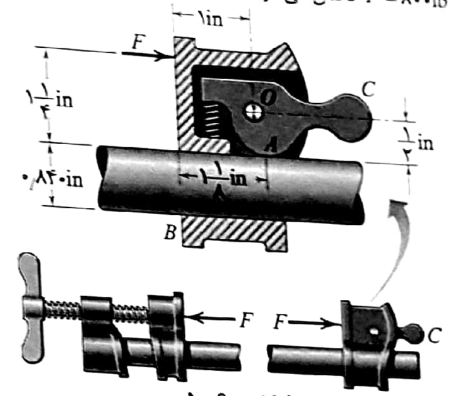
Scanned by CamScanner

۶.۴۹ دوچرخه‌سواری روی سطح شیب‌دار افزونه‌ای با شیب ۵ درصد با سرعت ثابت پدال می‌زند. مجموع جرم دوچرخه‌سوار و دوچرخه ۸۲ کیلوگرم و مرکز جرم مجموعه در نقطهٔ G است. اگر چرخ عقب در آستانهٔ لغزش باشد، ضریب اصطکاک μ_s بین لاستیک عقب دوچرخه و جاده را تعیین کنید. اگر ضریب اصطکاک دو برابر شود، نیروی F وارد بر چرخ عقب چقدر خواهد بود؟ چرا از اصطکاک چرخ جلو می‌توان صرف‌نظر کرد؟



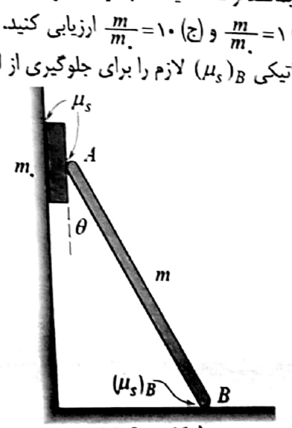
شکل م ۶.۴۹

۶.۵۰ گیره‌های لوله‌گیر برای گرفتن لولهٔ فولادی استاندارد $\frac{1}{2}$ in آب (قطر خارجی = ۰٫۸۴۰in) طراحی شده است. با بالا نگه‌داشتن اهرم C و آزادکردن تماس آن با لوله، می‌توان قطعهٔ سمت راست را آزادانه در امتداد لوله لغزاند. قطعهٔ سمت راست تحت تأثیر بار گیرشی F فقط در نقاط A و B با لوله در تماس است، زیرا به‌دلیل لقی به‌صورت جزئی در جهت ساعتگرد روی لوله می‌چرخد. مطلوب است تعیین (الف) حداقل ضریب اصطکاک μ_s بین سطوح تماس در A و B به‌طوری‌که انتهای جایگیری تحت بار نلغزد و (ب) نیروی R که توسط پین در نقطهٔ O تحت تأثیر نیروی نگهدارندهٔ $F = 800\text{lb}$ تحمل می‌شود. نیروی فنر تحت اثر کنش اهرم ناچیز است.



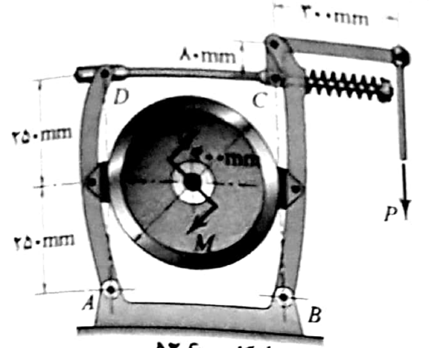
شکل م ۶.۵۰

۶.۵۱ قطعه‌ای به جرم m_0 بین دیوار قائم و انتهای بالایی A از میلهٔ باریک یکنواختی به جرم m قرار گرفته است. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین قطعه و میله و همچنین قطعه و دیوار μ_s باشد عبارتی کلی را برای کمترین مقدار زاویهٔ θ (θ_{min}) برای اینکه قطعه در وضع تعادل باقی بماند ارائه دهید عبارت خود را برای شرایط $\mu_s = 0{,}50$ و (الف) $\frac{m}{m_0} = 0{,}1$، (ب) $\frac{m}{m_0} = 1$ و (ج) $\frac{m}{m_0} = 10$ ارزیابی کنید. برای هر حالت حداقل ضریب اصطکاک استاتیکی $(\mu_s)_B$ لازم را برای جلوگیری از لغزیدن B تعیین کنید.



شکل م ۶.۵۱

۶.۵۲ ترمز نشان‌داده‌شده تحت تأثیر نیروی فنر، چرخ طیاری را نگه می‌دارد. برای آزادکردن ترمز، نیروی P به اهرم کنترل اعمال می‌شود. در وضعیت عملیات ... فنر به‌میزان ۳۰ mm متراکم می‌شود. اگر ضریب اصطکاک هر دو کفشک ترمز ۰٫۲۰ باشد، فنری با سختی مطلوب k که نیروی کافی برای ترمزکردن و نگه‌داشتن چرخ طیار در اثر اصطکاک دو کفشک را با گشتاور $M = 100\text{N·m}$ فراهم می‌کند تعیین کنید. از ابعاد کفشک‌ها صرف‌نظر کنید.



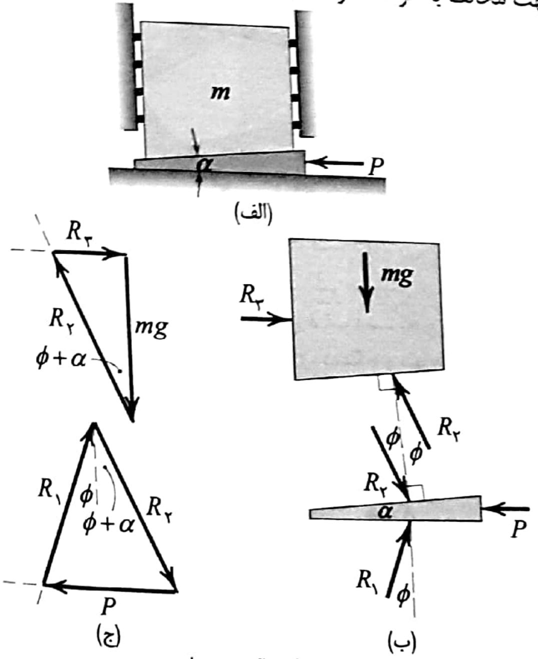
شکل م ۶.۵۲

قسمت (ب): کاربردهای اصطکاک در ماشین‌ها

در این قسمت اثر اصطکاک را درکاربردهای مختلف در ماشین‌ها بررسی می‌کنیم. از آنجا که در چنین کاربردهایی معمولاً با حالت‌های اصطکاک استاتیکی حدی یا جنبشی مواجه هستیم، به‌طور کلی از متغیر μ (به‌جای μ_s و μ_k) استفاده می‌کنیم. بسته به اینکه حرکت در آستانهٔ وقوع باشد یا عملاً در حال انجام باشد، μ را به‌عنوان ضریب اصطکاک استاتیکی یا ضریب اصطکاک جنبشی تلقی می‌کنیم.

۶.۴ گوه‌ها

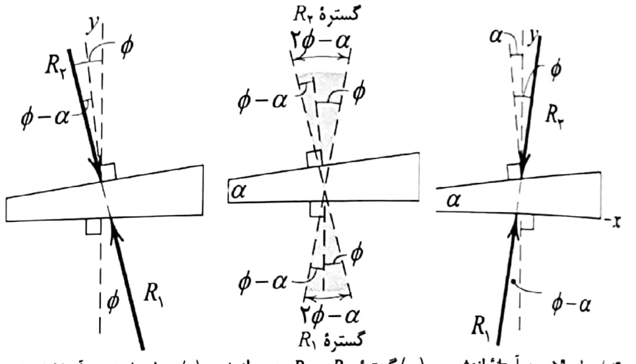
گوه یکی از ساده‌ترین و مفیدترین ماشین‌هاست که در تنظیم‌های ظریف یا برای اعمال نیروهای بزرگ استفاده می‌شود. کار گوه عمدتاً وابسته به اصطکاک است. وقتی که گوه در آستانهٔ لغزش است، نیروی برایند وارد بر هریک از سطوح لغزندهٔ گوه، با امتداد عمود بر سطح، زاویه‌ای را تشکیل می‌دهند که مقدار آن برابر زاویهٔ اصطکاک است. مؤلفهٔ برایند در امتداد سطح، نیروی اصطکاک است که همواره در جهت مخالف با حرکت گوه نسبت به سطوح تماس می‌باشد.



نیروها برای بالا بردن بار
شکل ۶.۳

شکل ۴.۶(الف) گوه‌ای را نشان می‌دهد که برای استقرار یا بلندکردن جرم بزرگ m استفاده می‌شود، که در آن بارگذاری عمودی برابر mg است. ضریب اصطکاک برای هر دو سطح $\mu = \tan\phi$ است. نیروی P مورد نیاز برای آغاز حرکت گوه با استفاده از مثلث تعادل نیروهای روی بار و روی گوه به‌دست می‌آید. نمودارهای جسم آزاد در شکل ۴.۶(ب) نشان داده شده است که در آن واکنش‌ها با عمودهای مربوط به آنها زاویهٔ ϕ می‌سازند و در جهت خلاف حرکت هستند. از جرم گوه صرف‌نظر می‌کنیم. با استفاده از نمودارهای جسم آزاد شرایط تعادل نیروها را می‌نویسیم و حاصل جمع بردارهای نیروی وارد بر هر جسم را برابر صفر قرار می‌دهیم. حل این معادلات در شکل ۴.۶(ج) نشان داده شده است، که در آن $R_۲$ ابتدا از نمودار جسم آزاد بالایی با معلوم بودن mg به‌دست آمده است. سپس نیروی P از مثلث پایین و پس از معلوم شدن مقدار $R_۲$ تعیین می‌شود.

اگر گوه پس از حذف نیروی P در جای خود باقی بماند، تعادل گوه ایجاب می‌کند که مطابق شکل ۴.۶، واکنش‌های $R_۱$ و $R_۲$ هم‌امتداد باشند، که در آن زاویهٔ α گوه کوچکتر از ϕ در نظر گرفته شده است. شکل‌های ۴.۶(الف) و ۴.۶(ج) به‌ترتیب آستانهٔ لغزش در سطح بالایی و پایین گوه را نشان می‌دهد. برای خروج گوه از زیر بار، لغزش هر دو سطح تماس گوه باید به‌طور همزمان روی دهد که در غیر این صورت گوه، *خودقفل* خواهد بود. در این حالت گسترهٔ معینی برای زاویهٔ ϕ وجود دارد که در اثر آن گوه در جای خود می‌ماند. شکل ۴.۶(ب) نشان‌دهندهٔ این گستره است. با توجه به این شکل اگر $\alpha > ۲\phi$ باشد، احتمال لغزش همزمان وجود ندارد. پیشنهاد می‌کنیم نمودارهای اضافی را برای حالت $\alpha > \phi$ رسم کنید و نشان دهید که تا زمانی که $\alpha < ۲\phi$، گوه خودقفل است.

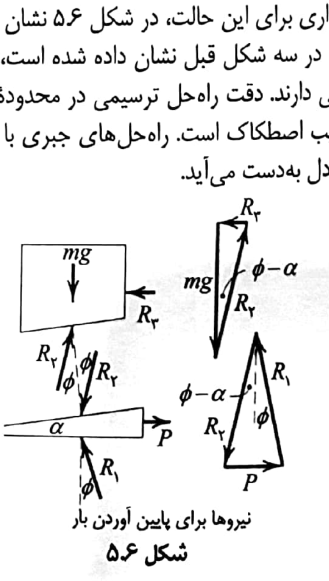


(الف) سطح بالایی در آستانهٔ لغزش (ب) گسترهٔ $R_۱ = R_۲$ بدون لغزش (ج) سطح پایینی در آستانهٔ لغزش

شکل ۴.۶

اگر گوه خودقفل باشد، برای خروج آن از زیر بار باید نیروی فشاری P را بر آن وارد کرد، که در این حالت واکنش‌های $R_۱$ و $R_۲$ نسبت به حالت قبل در طرف دیگر عمود بر سطوح مربوطه وارد می‌شوند. در این صورت، پاسخ مسئله با شیوه‌ای مشابه با حالت بالابردن بار به‌دست می‌آید. نمودارهای جسم آزاد و چندضلعی‌های برداری برای این حالت، در شکل ۵.۶ نشان داده شده است.

همان‌گونه که در سه شکل قبل نشان داده شده است، مسائل مربوط به گوه‌ها حل ترسیمی دارند. دقت راه‌حل ترسیمی در محدودهٔ خطاهای سازگار با عدم قطعیت ضرایب اصطکاک است. راه‌حل‌های جبری با استفاده از مثلثات در چندضلعی‌های تعادل به‌دست می‌آید.



نیروها برای پایین آوردن بار

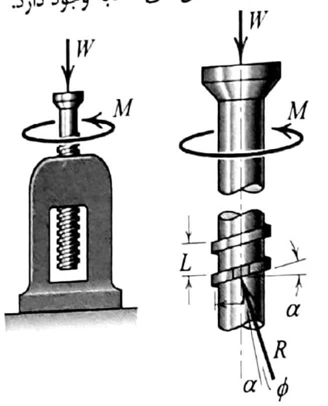
شکل ۵.۶

۵.۶ پیچ‌ها

پیچ‌ها برای محکم کردن اتصال قطعات به یکدیگر و انتقال حرکت و قدرت به کار می‌روند. در تمام این موارد نیروی اصطکاک در رزوه (دنده)های پیچ نقش مهمی را در کارکرد آنها دارند. یادآور می‌شود که پیچ‌ها در انتقال قدرت یا حرکت پیچ‌های رزوه با مقطع مربع (در مقایسه با پیچ‌های روزه با مقطع V_شکل) بهتر عمل می‌کنند. در اینجا تنها پیچ‌های رزوه مربعی را مورد تحلیل قرار می‌دهیم.

تحلیل نیرو

در شکل ۶.۶ یک جک دنده‌مربعی نشان داده شده است. این جک تحت تأثیر بار محوری W و گشتاور M که حول محور پیچ اعمال می‌شود، قرار دارد. این پیچ دارای پیشروی L (یعنی اندازهٔ فاصله‌ای که در هر دوران پیش می‌رود) و شعاع میانگین r است. تماس بین پیچ و رزوه، هریک در قسمتی از رزوه‌های کوچک از رزوهٔ پیچ نشان‌داده شده است. در نمودار جسم آزاد پیچ نیروی W و واکنش R در یک قسمت با رزوهٔ قاب در تماس هستند. در تمام قسمت‌های دیگر رزوهٔ پیچ که پیچ روی می‌دهد، واکنش‌های مشابه وجود دارد.



شکل ۶.۶

اگر M تنها برای پیچاندن پیچ کافی باشد، رزوهٔ پیچ می‌لغزد و پیچ در رزوهٔ ثابت بدنه بالا می‌رود. زاویهٔ ϕ بین امتداد R و راستای عمود بر سطح رزوه، همان زاویهٔ اصطکاک خواهد بود، $\tan\phi = \mu$. گشتاور نیروی R نسبت به محور عمودی پیچ برابر است با $Rr\sin(\alpha+\phi)$، و گشتاور کل حاصل از همهٔ واکنش‌های وارد بر رزوه‌های پیچ برابر است با $\Sigma Rr\sin(\alpha+\phi)$. از آنجا که همیشه $r\sin(\alpha+\phi)$ در تمام گشتاورها وارد می‌شود، می‌توان از آن فاکتور گرفت. در نتیجه معادلهٔ تعادل گشتاور پیچ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$M = [r\sin(\alpha+\phi)]\Sigma R$$

تعادل نیروها در امتداد محوری ایجاب می‌کند که

$$W = \Sigma R\cos(\alpha+\phi) = [\cos(\alpha+\phi)]\Sigma R$$

از ترکیب معادله‌های W و M نتیجه می‌گیریم

$$M = Wr\tan(\alpha+\phi) \qquad (۳.۶)$$

برای تعیین زاویهٔ مارپیچی α، رزوهٔ پیچ را یک دوران کامل می‌دهیم و توجه داریم که $\alpha = \tan^{-1}(L/۲\pi r)$.

برای شبیه‌سازی عملکرد پیچ‌های رزوه‌مربعی می‌توانیم از نمونهٔ رزوهٔ باز شده در شکل ۷.۶ (الف) به‌عنوان مدل استفاده کنیم.[1] نیروی معادل مورد نیاز P برای هل‌دادن رزوهٔ حرکت‌پذیر به‌طرف بالای سطح شیبدار، برابر $P = M/r$ است و معادلهٔ (۳.۶) از مثلث بردارهای نیرو به‌دست می‌آید.

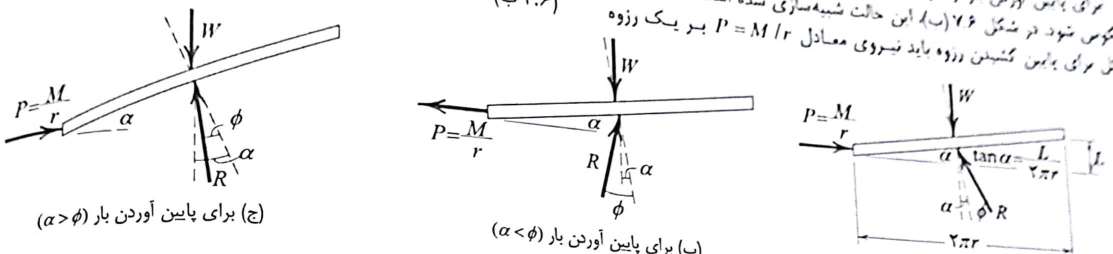
۱. در این نمونه عملکرد پیچ مانند حرکت یک قطعه تحلیل می‌شود که بر روی سطح شیبدار حرکت می‌کند. ـ م.

شرایط باز شدن پیچ (پایین آمدن بار)
با حذف گشتاور M، جهت نیروی اصطکاک تغییر کرده و زاویهٔ ϕ در سمت دیگر خط عمود بر امتداد رزوه واقع می‌شود. اگر $\phi > \alpha$ باشد، پیچ در جای خود باقی می‌ماند بدین معنی که پیچ خودقفل است، و اگر $\phi = \alpha$، پیچ در آستانهٔ باز شدن قرار می‌گیرد. برای پایین آوردن بار از طریق باز کردن پیچ تا وقتی $\phi > \alpha$، جهت M باید معکوس شود. در شکل ۷.۶(ب) این حالت شبیه‌سازی شده است. مطابق این شکل برای پایین کشیدن رزوه باید نیروی معادل $P = M / r$ بر یک رزوه اعمال شود. با توجه به مثلث بردارهای نیرو، گشتاور مورد نیاز برای پایین آوردن بار چنین می‌شود

$$M = Wr\tan(\phi - \alpha) \qquad (۳.۶\ \text{الف})$$

اگر $\alpha > \phi$، پیچ به‌طور خودکار باز می‌شود. در این حالت مطابق شکل ۷.۶(ج) گشتاور مورد نیاز برای جلوگیری از باز شدن پیچ چنین می‌شود

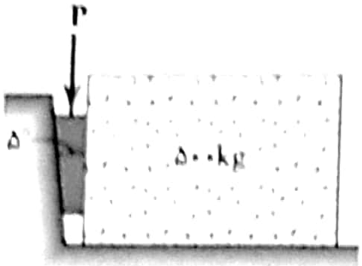
$$M = Wr\tan(\alpha - \phi) \qquad (۳.۶\ \text{ب})$$



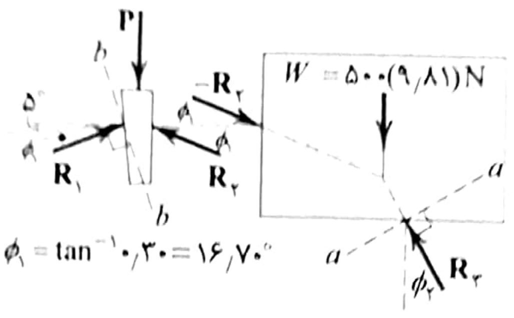
(الف) برای بالا بردن بار — (ب) برای پایین آوردن بار $(\alpha < \phi)$ — (ج) برای پایین آوردن بار $(\alpha > \phi)$

شکل ۷.۶

مسئله نمونه ۶.۶ موقعیت افقی قطعهٔ بتنی مستطیل شکل ۵۰۰ کیلوگرمی، توسط گوهٔ ۵° تنظیم شده است که بر آن نیروی **P** وارد می‌شود. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی برای هر دو سطح گوه ۰٫۳۰ و ضریب اصطکاک استاتیکی قطعه و سطح افقی ۰٫۶۰ باشد، حداقل نیروی P لازم برای حرکت قطعه را به‌دست آورید.



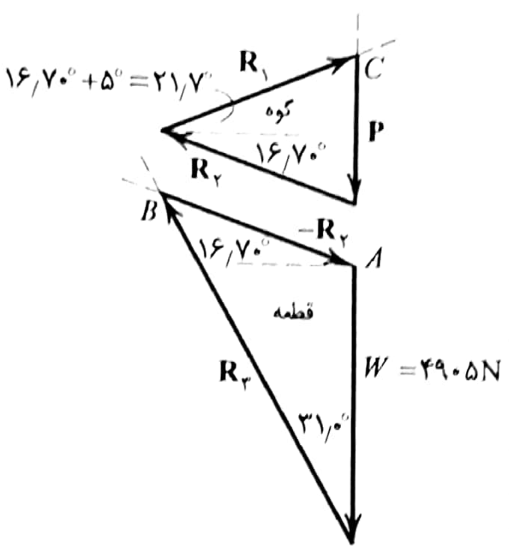
حل: نمودارهای جسم آزاد گوه و قطعه به‌همراه واکنش‌های $\mathbf{R}_1$، $\mathbf{R}_2$ و $\mathbf{R}_3$ رسم شده‌اند که نسبت به عمودهایشان تحت زاویه‌های اصطکاک آستانهٔ حرکت قراردارند. زاویهٔ اصطکاک استاتیکی از رابطهٔ $\phi = \tan^{-1}\mu_s$ به‌دست می‌آید. هر دو زاویهٔ اصطکاک مورد نیاز در مسئله محاسبه شده و در نمودارهای جسم آزاد نشان داده شده است.



$\phi_1 = \tan^{-1} ۰٫۳۰ = ۱۶٫۷۰°$

$\phi_2 = \tan^{-1} ۰٫۶۰ = ۳۱٫۰°$

ابتدا تعادل قطعه در نقطهٔ مناسب A را در نظرگرفته و تنها بردار معلوم، یعنی وزن **W** قطعه را رسم می‌کنیم. سپس بردار $\mathbf{R}_3$ را که با راستای عمود زاویهٔ ۳۱٫۰° می‌سازد اضافه نموده و بعد بردار $-\mathbf{R}_2$ را که با راستای افقی زاویهٔ ۱۶٫۷۰° می‌سازد رسم و مثلث نیروها را تکمیل می‌کنیم. بنابراین نقطهٔ B روی چندضلعی پایین همان نقطهٔ تقاطع خط اثر نیروهای $\mathbf{R}_3$ و $-\mathbf{R}_2$ است و مقادیر این دو بردار مشخص می‌شوند.



برای گوه ابتدا بردار $\mathbf{R}_2$ را که اکنون مقدار آن معلوم است رسم کرده و سپس بردار $\mathbf{R}_1$ را با جهت معلوم اضافه می‌کنیم. امتدادهای $\mathbf{R}_1$ و **P** یکدیگر را در نقطهٔ C قطع می‌کنند. بدین ترتیب اندازهٔ **P** به‌دست می‌آید.

حل جبری. ساده‌ترین انتخاب برای محورهای مختصات به‌منظور انجام محاسبات، در قطعهٔ بتنی در امتداد محور a-a عمود بر $\mathbf{R}_3$ و در گوه در امتداد محور b-b عمود بر $\mathbf{R}_1$ است. زاویهٔ بین $\mathbf{R}_2$ و امتداد a برابر است با $۱۶٫۷۰° + ۳۱٫۰° = ۴۷٫۷°$. بنابراین، برای قطعهٔ بتنی می‌نویسیم

$$[\Sigma F_a = ۰] \qquad ۵۰۰(۹٫۸۱)\sin ۳۱٫۰° - R_2 \cos ۴۷٫۷° = ۰$$

$$R_2 = ۳۷۵۰\text{N}$$

برای گوه، زاویهٔ بین $\mathbf{R}_2$ و امتداد b چنین است $۹۰° - (۲\phi_1 + ۵°) = ۵۱٫۶°$ و زاویهٔ بین **P** و امتداد b برابر است با $\phi_1 + ۵° = ۲۱٫۷°$. از این‌رو

$$[\Sigma F_b = ۰] \qquad ۳۷۵۰\cos ۵۱٫۶° - P\cos ۲۱٫۷° = ۰$$

$$P = ۲۵۰۰\text{N}$$

ج.

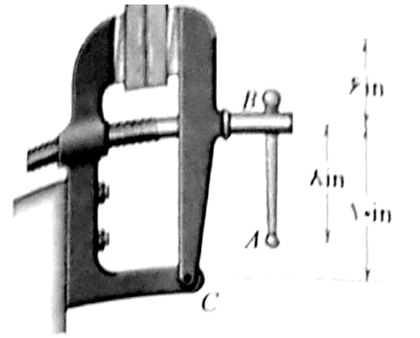
حل ترسیمی. دقت حل ترسیمی بستگی به دقت ضرایب اصطکاک دارد و نتیجهٔ ساده و سرراستی را می‌دهد. با ترسیم بردارها با مقیاس مناسب و به‌ترتیب بیان‌شده، اندازه‌های **P** و نیروهای **R**، مستقیماً از روی نمودار به‌دست می‌آیند.

راهنمایی‌های مفید

❶ توجه کنید که زاویهٔ بین واکنش‌ها و امتداد عمود بر سطوح مربوطه، در جهت مخالف حرکت است. همچنین، به واکنش‌های برابر و مخالف $\mathbf{R}_2$ و $-\mathbf{R}_2$ نیز توجه کنید.

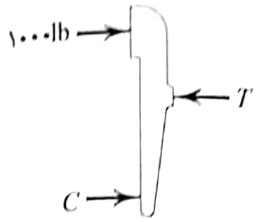
❷ بدیهی است که با عدم استفاده از $\mathbf{R}_3$ برای قطعه و $\mathbf{R}_1$ برای گوه، از حل معادلات هم‌زمان پرهیز کرده‌ایم.

Scanned by CamScanner



مسئلهٔ نمونهٔ ۷.۶

پیچ تکراههٔ گیره‌ای نشان‌داده‌شده به‌قطر میانگین ۱in است و تعداد پنج رزوهٔ مربعی در هر اینچ از طول خود دارد. ضریب اصطکاک استاتیکی در رزوه‌ها ۰٫۲۰ است. با اعمال نیروی ۶۰lb در امتداد عمود بر دستهٔ گیره در نقطهٔ A نیروی گیرش ۱۰۰۰ پوندی بین فک‌های گیره به‌وجود می‌آید. (الف) گشتاور اصطکاک M_B در برش B را که حاصل از نیروی محوری پیچ بر بدنهٔ فک است، تعیین کنید و (ب) نیروی Q لازم را که در نقطهٔ A در امتداد عمود در دستهٔ گیره برای بازکردن گیره باید وارد گردد، تعیین کنید.



حل: از نمودار جسم آزاد فک، ابتدا کشش T در پیچ را به‌دست می‌آوریم

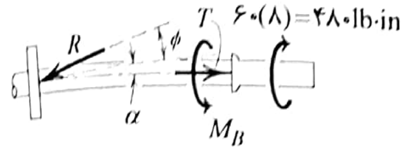
$$[\Sigma M_C = ۰] \qquad ۱۰۰۰(۱۶) - ۱۰T = ۰ \qquad T = ۱۶۰۰\,\text{lb}$$

زاویهٔ مارپیچ α و زاویهٔ اصطکاک ϕ برای رزوه‌های پیچ عبارت است از

① $$\alpha = \tan^{-1}\frac{L}{۲\pi r} = \tan^{-1}\frac{۱/۵}{۲\pi(۰٫۵)} = ۳٫۶۴^\circ$$

$$\phi = \tan^{-1}\mu = \tan^{-1}۰٫۲۰ = ۱۱٫۳۱^\circ$$

در این روابط شعاع میانگین رزوه‌ها برابر است با $r = ۰٫۵$ in.



(الف) مرحلهٔ بستن گیره

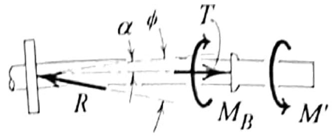
(الف) مرحلهٔ بستن گیره. نمودار جسم آزاد پیچ جدا شده، مطابق شکل شبیه‌سازی شده و در آن برایند تمام نیروهای وارد بر رزوه‌ها با R نشان داده شده است. این نیرو با امتداد عمود بر رزوه زاویهٔ اصطکاک ϕ را تشکیل می‌دهد. اندازهٔ گشتاور وارد بر محور پیچ برابر است با $۴۸۰\text{lb·in} = ۶۰(۸)$. جهت این گشتاور وقتی از روبه‌روی گیره دیده می‌شود، ساعتگرد است. گشتاور اصطکاکی M_B حاصل از نیروهای اصطکاکی واردشده بر طوقهٔ B در جهت پادساعتگرد است تا با حرکت در آستانهٔ وقوع مخالفت کند. اکنون از معادلهٔ (۳.۶) نیروی T را به‌جای W قرار داده و گشتاور خالص مؤثر بر پیچ را به‌دست می‌آوریم

$$M = Tr\tan(\alpha + \phi)$$

$$۴۸۰ - M_B = ۱۶۰۰(۰٫۵)\tan(۳٫۶۴^\circ + ۱۱٫۳۱^\circ)$$

$$M_B = ۲۶۶\,\text{lb·in}$$

ج.



(ب) مرحلهٔ باز کردن گیره

(ب) مرحلهٔ بازکردن گیره. نمودار جسم آزاد پیچ را در آستانهٔ باز شدن رسم می‌کنیم. در این نمودار واکنش R تحت زاویهٔ اصطکاک ϕ نسبت به راستای عمود بر روزه و در جهتی اعمال می‌شود که با حرکت در آستانهٔ شروع مخالفت کند. همچنین گشتاور اصطکاکی ② $M_B = ۲۶۶\text{lb·in}$ نیز در شکل نشان داده شده است که در جهت ساعتگرد عمل می‌کند تا مانع حرکت شود. در این حالت، زاویهٔ بین R و محور پیچ برابر است با $\phi - \alpha$. از معادلهٔ (۳.۶ الف) استفاده می‌کنیم و در آن گشتاور خالص را برابر با گشتاور واردشدهٔ M' منهای M_B قرار می‌دهیم. از این‌رو

$$M = Tr\tan(\phi - \alpha)$$

$$M' - ۲۶۶ = ۱۶۰۰(۰٫۵)\tan(۱۱٫۳۱^\circ - ۳٫۶۴^\circ)$$

$$M' = ۳۷۴\,\text{lb·in}$$

بنابراین نیرویی که باید برای بازکردن گیره بر دسته وارد کرد، عبارت است از

$$Q = M'/d = ۳۷۴/۸ = ۴۶٫۸\,\text{lb}$$

ج.

راهنمایی‌های مفید

① دقت کنید که زاویهٔ مارپیچ را به‌درستی حساب کنید. تانژانت آن، پیشروی L (فاصله‌ای که در هر چرخش پیش می‌رود) تقسیم بر محیط میانگین $۲\pi r$ است، نه تقسیم بر قطر $۲r$.

② توجه داشته باشید که وقتی جهت آستانهٔ حرکت عوض می‌شود، R به طرف دیگر امتداد عمود بر رزوه منتقل می‌شود.

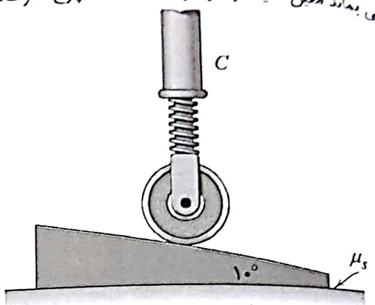
Scanned by CamScanner

مسائل

در مسائل زیر از وزن گوه‌ها و پیچ‌ها صرف‌نظر کنید، مگر اینکه خلاف آن گفته شده باشد.

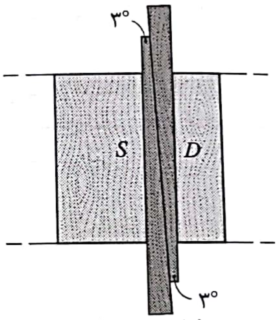
مسائل مقدماتی

۵۳.۶ گوه‌ی 10° به زیر فنر تحت بار متصل به چرخ که مطابق شکل روی استوانهٔ ساکن C ثابت است، رانده می‌شود. حداقل ضریب اصطکاک μ_s را برای اینکه گوه در جای خود باقی بماند معین کنید. از هر گونه اصطکاک چرخ صرف‌نظر شود.



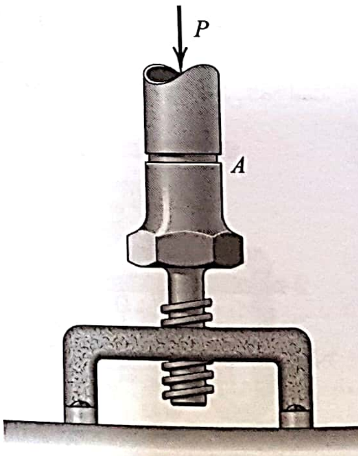
شکل م ۵۳.۶

۵۴.۶ در ساخت وسایل چوبی، اغلب برای پُرکردن فاصلهٔ بین وادار چوبی S و لغار باریک D چارچوب در و پنجره، از دو تختهٔ نازک و باریک استفاده می‌شود. در شکل، مقطع اعضای S و D نشان داده شده‌اند. برای گوهٔ 3° نشان‌داده‌شده، حداقل ضریب اصطکاک لازم را طوری تعیین کنید که گوه‌ها در جای خود باقی بمانند.



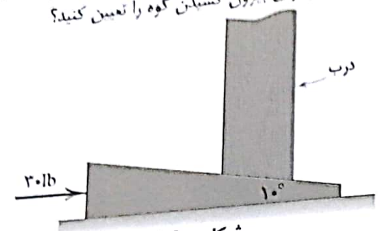
شکل م ۵۴.۶

۵۵.۶ وسیلهٔ نشان‌داده‌شده برای تنظیم کلی ارتفاع یک دستگاه آزمایشی به‌کار می‌رود به‌طوری‌که تغییری در وضع افقی سطح اتفاق نیفتد. به‌دلیل اتصال لغزشی در A، چرخاندن پیچ باعث چرخیدن پایهٔ استوانه‌ای بالای A نمی‌شود. قطر میانگین رزوهٔ پیچ $\frac{3}{8}$in و ضریب اصطکاک ۰٫۱۵ است. در یک طرح محافظه‌کارانه که از اصطکاک هنگام لغزش صرف‌نظر می‌شود، برای اطمینان از اینکه پیچ تک‌راهه خودبه‌خود تحت تأثیر وزن وسیله نچرخد، حداقل تعداد N دنده‌های موجود پیچ در هر اینچ را تعیین کنید.



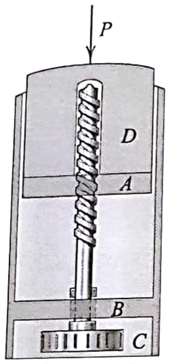
شکل م ۵۵.۶

۵۶.۶ گوهٔ 10° نگهدارندهٔ درب، با نیروی افقی مستقیم ۳۰lb به زیر درب رانده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی برای تمام سطوح $\mu_s = 0{,}20$ باشد، مقادیر N_U و N_L نیروهای عمودی وارد بر سطح بالایی و پایین درب را محاسبه کنید. با اطلاعات داده‌شده، آیا می‌توانید نیروی P لازم برای بیرون کشیدن گوه را تعیین کنید؟



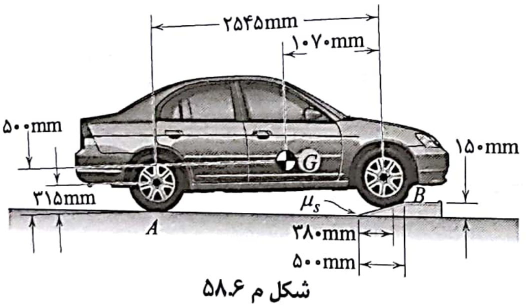
شکل م ۵۶.۶

۵۷.۶ اجزای یک دستگاه ضد بوی زیر بغل در شکل نشان‌داده شده است. برای جلوبردن سر D ضد بو، دکمهٔ C می‌چرخد. میل‌گردان رزوه‌دار با رزوه‌های پایهٔ متحرک A درگیر می‌شود. میل‌گردان در تکیه‌گاه B رزوه ندارد. رزوهٔ دوراههٔ مربعی با قطر ۶mm پیشروی معادل ۵mm دارد. ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s را به‌گونه‌ای که با اعمال نیروی P نتوان ضد بو را به داخل محفظه راند، معین کنید. از اصطکاک در B صرف‌نظر کنید.



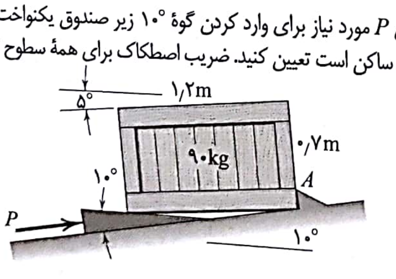
شکل م ۵۷.۶

۵۸.۶ یک اتومبیل ۱۶۰۰ کیلوگرمی با چرخ‌های محرک عقب، از یک جادهٔ سربالایی با سرعت منظم و کم بالا می‌رود. حداقل ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s را به‌گونه‌ای تعیین کنید که سطح شیبدار متحرک به‌سمت جلو نلغزد. همچنین نیروی اصطکاک لازم F_A را در هر چرخ عقب تعیین کنید.



شکل م ۵۸.۶

۵۹.۶ نیروی P مورد نیاز برای وارد کردن گوهٔ 10° زیر صندوق یکنواخت ۹۰ کیلوگرمی را که در نقطه A ساکن است تعیین کنید. ضریب اصطکاک برای همهٔ سطوح تماس ۰٫۴۰ است.

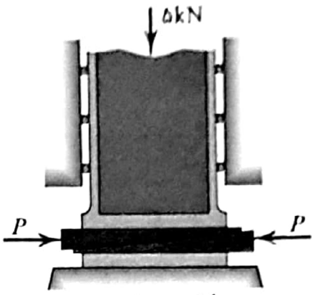


شکل م ۵۹.۶

Scanned by CamScanner

مسائل برگزیده

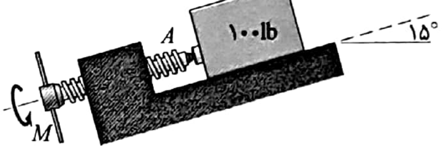
۶۰.۶ دو گوهٔ ۵° نشان‌داده‌شده برای تنظیم مکان یک ستون تحت بار عمودی 5kN به‌کار می‌رود. اگر ضریب اصطکاک برای همهٔ سطوح تماس ۰٫۴۰ باشد، اندازهٔ نیروی P مورد نیاز برای بلند کردن ستون را تعیین کنید.



شکل م ۶۰.۶

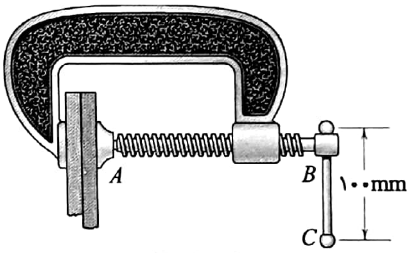
۶۱.۶ اگر بار ستون مسئلهٔ ۶۰.۶ کمتر شود، نیروی افقی P' لازم برای درآوردن گوه را محاسبه کنید.

۶۲.۶ گشتاور M را که باید بر دستهٔ پیچ وارد کرد تا قطعهٔ ۱۰۰ پوندی در سطح شیبدار ۱۵° بالا رود، تعیین کنید. ضریب اصطکاک استاتیکی بین قطعه و سطح شیبدار ۰٫۵۰ و پیچ تک‌راهه با رزوهٔ مربع و قطر میانگین 1in و پیش‌روندهٔ 0.4in در هر دور کامل می‌باشد. ضریب اصطکاک استاتیکی برای رزوه‌ها نیز ۰٫۵۰ است. از اصطکاک کرهٔ کوچک مفصل A صرف‌نظر کنید.



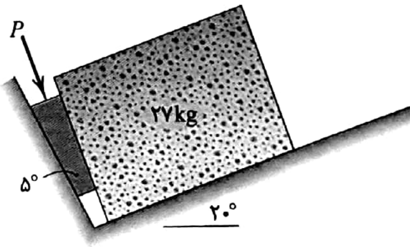
شکل م ۶۲.۶

۶۳.۶ برای اتصال دو تخته، نیروی فشاری 600N بر نقطهٔ C گیره وارد می‌شود. قطر میانگین رزوه‌ها 10mm و پیش‌رونده 2.5mm در هر دور است. ضریب اصطکاک استاتیکی ۰٫۲۰ است. نیروی F را که باید به‌طور عمود بر دستهٔ O وارد شود برای (الف) بستن و (ب) بازکردن گیره، تعیین کنید. از اصطکاک نقطهٔ A صرف‌نظر شود.



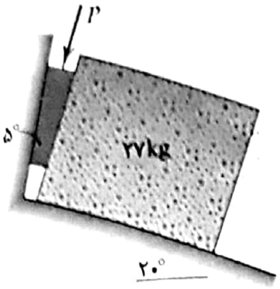
شکل م ۶۳.۶

۶۴.۶ ضریب اصطکاک برای هر دو سطح ۰٫۴۰ و بین قطعهٔ بتنی 27kg و شیب ۲۰° برابر ۰٫۷۰ است. حداقل مقدار نیروی P لازم را برای شروع حرکت قطعه به‌طرف بالای شیب تعیین کنید. از وزن گوه صرف‌نظر کنید.



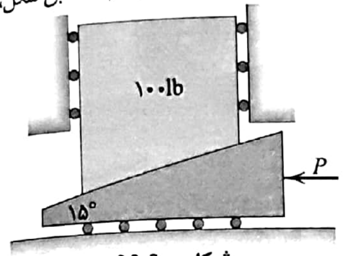
شکل م ۶۴.۶

۶۵.۶ مسئلهٔ ۶۴.۶ را با این تفاوت که قطعهٔ بتنی 27kg شروع به پایین آمدن از سطح شیبدار ۲۰° مطابق شکل کرده است، حل کنید. تمام شرایط دیگر مانند مسئلهٔ ۶۴.۶ می‌باشد.



شکل م ۶۵.۶

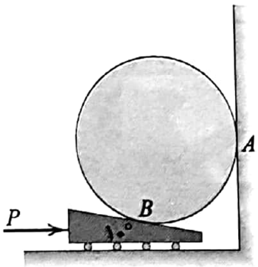
۶۶.۶ ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s بین جسم ۱۰۰ پوندی و گوهٔ ۱۵° برابر ۰٫۲۰ است. مقدار نیروی لازم P برای شروع بالا رفتن جسم ۱۰۰ پوندی را تعیین کنید اگر: (الف) غلتک‌هایی با اصطکاک ناچیز، مطابق شکل، در زیر گوه قرارگرفته باشند و (ب) غلتک‌ها حذف شده و ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s برابر ۰٫۲۰، مطابق شکل، بر سطح وارد شود.



شکل م ۶۶.۶

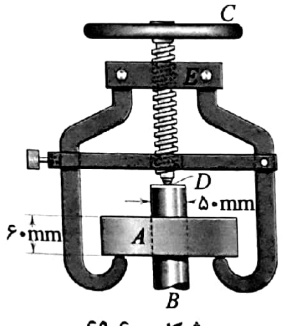
۶۷.۶ برای هر دو شرط (الف) و (ب) که در مسئله ۶۶.۶ بیان گردید، مقدار و جهت نیروی P' لازم را برای شروع پایین‌آمدن جسم ۱۰۰ پوندی معین کنید.

۶۸.۶ نیروی افقی P بر گوهٔ سبک ۱۰° مورد نیاز برای حرکت اولیهٔ استوانهٔ ۴۰ کیلوگرمی را محاسبه و نیروی اصطکاک F_B در نقطهٔ B را معین کنید. ضریب اصطکاک استاتیکی در هر دو سطح تماس ۰٫۲۵ است. (*هشدار*: به‌طور دقیق جواب را که در آن لغزش رخ می‌دهد وارسی کنید.)



شکل م ۶۸.۶

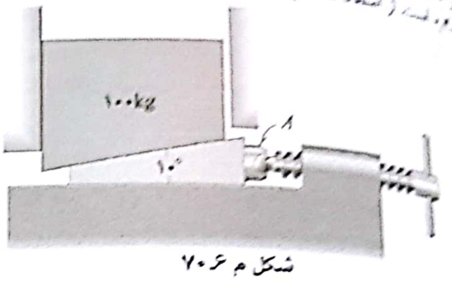
۶۹.۶ طوقهٔ A نیروی مناسب بر محور B وارد می‌کند و می‌خواهیم آن را به‌وسیلهٔ سازوکار نشان‌داده‌شده از میل‌گردان خارج کنیم. پیچ دارای رزوهٔ تک‌راههٔ مربعی با قطر میانگین 20mm و پیشروی $L = 6\text{mm}$ است. اگر گشتاور $24\text{N}\cdot\text{m}$ برای چرخاندن چرخ C و آزاد شدن محور از طوقه لازم باشد، فشار میانگین p (تنش فشاری) بین طوقه (برش) و میل‌گردان را معین کنید. ضریب اصطکاک پیچ در نقطهٔ E، ۰٫۲۵ و برای میل‌گردان و طوقه (برش) ۰٫۳۰ است. اصطکاک در ساچمهٔ D میل‌گردان ناچیز است.



شکل م ۶۹.۶

Scanned by CamScanner

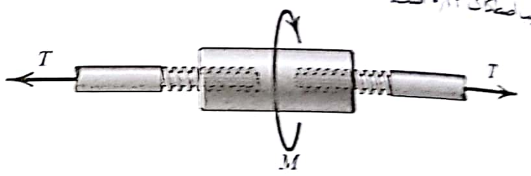
[illegible] عمودی، قطعهٔ ۱۰۰ کیلوگرمی مطابق شکل به واسطهٔ اعمال گوه [illegible] گشتاور M را که باید بر دستهٔ پیچ برای بالا بردن قطعه به‌کار برود [illegible] پیچ [illegible] با قطر میانگین ۲۰mm و پیش‌رونده ۱۰mm برای [illegible] ضریب اصطکاک در رزوه‌های پیچ ۰٫۲۵ و ضریب اصطکاک قطعه [illegible] و اصطکاک ساچمهٔ نقطهٔ A صرف‌نظر شود.



شکل م ۶.۷۰

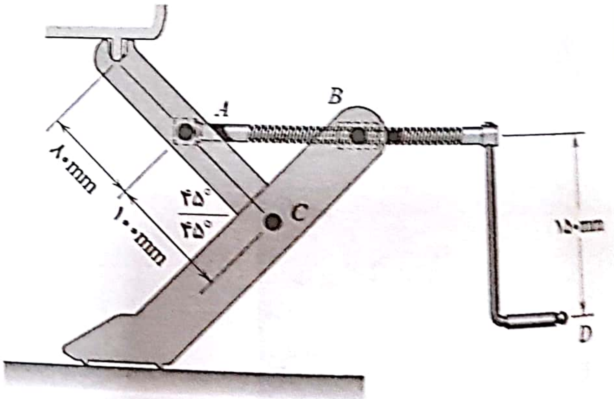
۶.۷۱ گشتاور M' را که باید بر دستهٔ پیچ مسئلهٔ ۶.۷۰، وارد کرد تا گوه خارج شده و [illegible] کیلوگرمی پایین بیاید تعیین کنید.

۶.۷۲ برای اتصال دو میل‌گردان از طوقهٔ رزوه‌شده‌ای استفاده می‌شود که دنده‌های [illegible] آن راست‌گرد است. میل‌گردان‌ها تحت کشش $T = 8kN$ قرار دارند. اگر [illegible] قطر میانگین ۱۶mm و پیش‌روندهٔ ۴mm باشند، گشتاور M لازم را برای [illegible] طوقه در راستایی که از چرخش میل‌گردان‌ها جلوگیری می‌کند محاسبه کنید. [illegible] اصطکاک ۰٫۲۴ است.



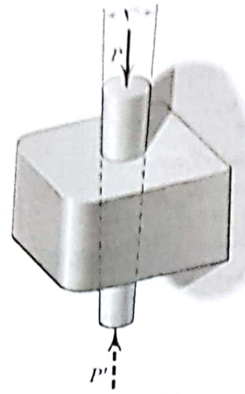
شکل م ۶.۷۲

۶.۷۳ جک نشان‌داده‌شده برای بالا بردن اتومبیل‌های کوچک طراحی شده است. پیچ [illegible] به‌سمت طوقهٔ لولاشده در B و میل‌گردان، روی یاتاقان کف‌گرد A می‌چرخد. قطر میانگین رزوه ۱۰mm و پیش‌رونده (در یک دوران) ۲mm می‌باشد. ضریب اصطکاک برای رزوه‌ها ۰٫۲۰ است. نیروی P لازم عمود بر دسته در نقطهٔ D را (الف) برای بالا بردن جرم ۵۰۰kg در وضعیت نشان‌داده‌شده و (ب) برای پایین آوردن بار در وضعیت یکسان معین کنید. از اصطکاک لولا و یاتاقان در A صرف‌نظر کنید.



شکل م ۶.۷۳

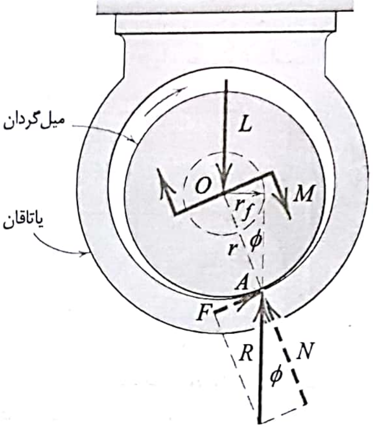
۶.۷۴ پین مخروطی ۳° با نیروی $P = 400N$ به داخل سوراخ مخروطی قطعهٔ ثابتی [illegible] می‌شود. اگر نیروی لازم برای حذف پین ($P = 0$) برابر $P' = 300N$ باشد، ضریب اصطکاک بین پین و سطوح تماس سوراخ را معین کنید. [راهنمایی: تا زمانی‌که پین [illegible] واقعی حرکت کند، فشار (تنش) عمود بر سطح پین بدون تغییر می‌ماند. نیروی [illegible] روی سطح پین را می‌توان با یک تک‌نیروی برایند معادل جایگزین کرد.]



شکل م ۶.۷۴

۶.۶ یاتاقان‌های شعاعی

یاتاقان شعاعی، یاتاقانی است که برخلاف تکیه‌گاه محوری یا کف‌گرد، برای میل‌گردان تکیه‌گاه جانبی به‌وجود می‌آورد. به‌عبارت دیگر میل‌گردان تنها می‌تواند در امتداد محور حرکت کند نه در امتداد جانبی. برای یاتاقان خشک و برای بیشتر یاتاقان‌ها به‌طور جزئی در وضع نسبتاً ثابت می‌توان اصول اصطکاک خشک را به‌کار برد که با تقریب خوبی، هدف طراحی را برآورده می‌کند.



شکل ۶.۸

یک یاتاقان خشک یا نیمه‌روان‌کاری‌شده (نشان داده شده در شکل ۶.۸) که در آن برای وضوح، لقی بین میل‌گردان و یاتاقان را بزرگتر نشان داده‌ایم، تماس بین میل‌گردان و یاتاقان برقرار یا تقریباً برقرار است. با شروع چرخش میل‌گردان در جهت نشان‌داده‌شده، میل‌گردان تا زمان لغزش، به‌سمت بالای سطح داخلی یاتاقان لغزش می‌کند. در این حالت میل‌گردان ضمن دوران در وضعیت نسبتاً ثابتی باقی می‌ماند. گشتاور M مورد نیاز برای حفظ چرخش و بار شعاعی وارد بر میل‌گردان، موجب ایجاد واکنش R در نقطهٔ تماس A می‌شود. تعادل میل‌گردان در امتداد قائم ایجاب می‌کند که مقدار R با مقدار L برابر باشد، ولی این دو نیرو هم‌راستا نیستند. بنابراین نیروی R بر دایرهٔ کوچکی به‌شعاع r_f مماس است. این دایره را *دایرهٔ اصطکاک* می‌نامند. لازم به یادآوری است که نیروی R تحت زاویهٔ اصطکاک ϕ نسبت به مؤلفهٔ عمودی N قرار دارد. حال مجموع گشتاورها نسبت به نقطهٔ A را مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$M = Lr_f = Lr\sin\phi \qquad (۶.۴)$$

برای ضریب اصطکاک کوچک، زاویهٔ ϕ کوچک خواهد بود. پس در این حالت می‌توان سینوس و تانژانت آن را با کمی خطا به‌جای هم به‌کار برد چون $\mu = \tan\phi$، تقریب خوبی برای گشتاور عبارت است از

$$M = \mu L r \qquad (\text{۴.۶ الف})$$

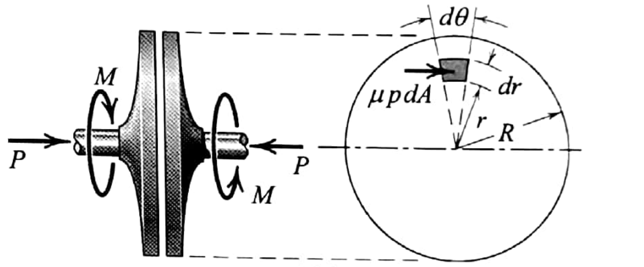
این رابطه، مقدار گشتاوری را به‌دست می‌دهد که باید بر میل‌گردان اعمال کرد تا بر اصطکاک یاتاقان خشک و یا نیمه‌روان‌کاری‌شده، غلبه کند.

۷.۶ یاتاقان‌های محوری، اصطکاک دیسک‌ها

اصطکاک بین سطوح دایره‌ای تحت فشار قائم گسترده در یاتاقان‌های کف‌گرد، صفحه کلاچ‌ها، و ترمزهای دیسکی به‌وجود می‌آید. برای وارسی این موضوع دو دیسک دایره‌ای یک کلاچ را در نظر می‌گیریم (شکل ۹.۶). محورهای گردان این دو دیسک در یاتاقان‌ها (نشان داده نشده) به‌گونه‌ای قرارگرفته است که تحت تأثیر نیروی محوری P با یکدیگر در تماس قرار می‌گیرند. حداکثر گشتاوری که این کلاچ می‌تواند انتقال دهد برابر است با گشتاور M که باعث لغزش یک دیسک نسبت به دیسک دیگر می‌شود. اگر P فشار عمودی در هر نقطهٔ بین دو دیسک باشد، نیروی اصطکاکی وارد بر جزء مساحت dA از سطح تماس دیسک‌ها برابر است با $\mu p dA$ که در آن μ ضریب اصطکاک و dA مساحت جزء سطح یعنی $r\,dr\,d\theta$ است. گشتاور این نیروی اصطکاک نسبت به محور دوران برابر $\mu pr\,dA$ می‌باشد، و گشتاور به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$M = \int \mu pr\, dA$$

که در آن، انتگرال را روی تمام سطح دیسک محاسبه می‌کنیم. برای انجام این انتگرال‌گیری، باید تغییرات μ و p را برحسب r بدانیم.



شکل ۹.۶

در مثال‌های زیر، ضریب اصطکاک μ را ثابت در نظر می‌گیریم. در ضمن اگر سطوح نو، تخت و دارای تکیه‌گاه خوبی باشند، این فرض که فشار p در سطح مورد نظر توزیع یکنواختی دارد، منطقی است. از این‌رو $\pi R^2 p = P$. با جایگزینی مقدار ثابت p در عبارت مربوط به M داریم

$$M = \frac{\mu P}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^2\,dr\,d\theta = \frac{2}{3}\mu PR \qquad (\text{۵.۶})$$

در این رابطه M گشتاور حاصل از نیروی اصطکاک است که اندازهٔ آن μP است و در فاصلهٔ $\frac{2}{3}R$ از مرکز میل‌گردان اثر می‌کند.

چنانچه دیسک‌های اصطکاک به شکل حلقوی باشند (شکل ۱۰.۶)، حدود انتگرال‌گیری به‌ترتیب در معادلهٔ (۵.۶) عبارت‌اند از شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o، پس گشتاور اصطکاک چنین خواهد بود

$$M = \frac{2}{3}\mu P \frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \qquad (\text{۵.۶ الف})$$

پس از مدتی کارکرد اولیهٔ دیسک‌ها سطح آنها فرسوده و به‌صورت یکنواخت و صاف در می‌آیند و این سایدگی به دو عامل فاصلهٔ محیطی پیموده شده و فشار p بستگی دارد. از آنجا که محیط طی‌شده متناسب با r است، می‌توان عبارت $rp = K$ را نوشت که در آن K مقدار ثابت است. برای تعیین ضریب ثابت K از تعادل نیروهای محوری استفاده کرده و می‌نویسیم

$$P = \int p\,dA = K\int_0^{2\pi}\int_0^{R} dr\,d\theta = 2\pi KR$$

که با توجه به رابطهٔ $pr = K = P/(2\pi R)$، عبارت M به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$M = \int \mu pr\,dA = \frac{\mu P}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,dr\,d\theta$$

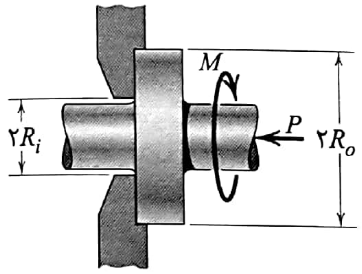
در نتیجه

$$M = \frac{1}{2}\mu PR \qquad (\text{۶.۶})$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که گشتاور اصطکاکی برای دیسک‌های فرسوده به‌مقدار $(1/2)/(2/3)$ یا ۳/۴ گشتاور اصطکاکی برای دیسک‌های نو است. اگر دیسک اصطکاکی به‌صورت حلقه‌هایی با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o باشند، رابطهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید

$$M = \frac{1}{2}\mu P(R_o + R_i) \qquad (\text{۶.۶ الف})$$

در مسائل اصطکاک دیسک ممکن است فشار p تابع دیگری از r باشد و باید برای حل این نوع مسائل آماده باشید

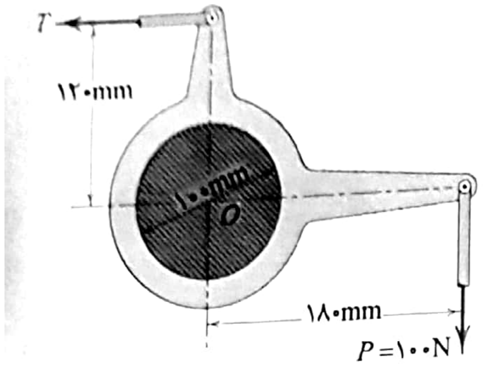


شکل ۱۰.۶

نمونهٔ یک ترمز دیسکی اتومبیل

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۸.۶ سیبکی روی میل‌گردانی ثابت و بدون دوران به‌قطر ۱۰۰mm جا زده شده است. نیروی افقی T برای حفظ تعادل سیبک، تحت تأثیر نیروی $P=۱۰۰\text{N}$، بر آن وارد می‌شود. حداکثر و حداقل اندازهٔ T را به گونه‌ای تعیین کنید که سیبک در هیچ جهتی حرکت نکند. ضریب اصطکاک اصطکاکی بین میل گردان و سطح یاتاقان ۰/۲۰ است.



حل: وقتی نیروی واکنش R میل‌گردان ثابت بر سیبک وارد می‌شود و با امتداد عمود بر یاتاقان زاویهٔ $\phi=\tan^{-۱}\mu$ می‌سازد؛ بدین معنی است که وقتی R بر دایرهٔ اصطکاک مماس می‌شود، سیبک در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد. تعادل سیبک ایجاب می‌کند که سه نیروی وارد بر آن در نقطهٔ C متقاطع باشند. (نمودارهای جسم آزاد سیبک را که برای دو حالت در آستانهٔ چرخش رسم شده‌اند نگاه کنید.)

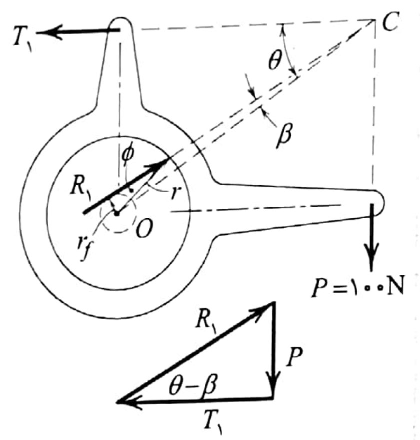
بنابراین محاسبات زیر را انجام می‌دهیم

زاویهٔ اصطکاک $\phi=\tan^{-۱}\mu=\tan^{-۱}۰/۲۰=۱۱/۳۱$

شعاع دایرهٔ اصطکاک $r_f=r\sin\phi=۵۰\sin۱۱/۳۱=۹/۸۱\text{mm}$

زاویهٔ θ $\theta=\tan^{-۱}\frac{۱۲۰}{۱۸۰}=۳۳/۷°$

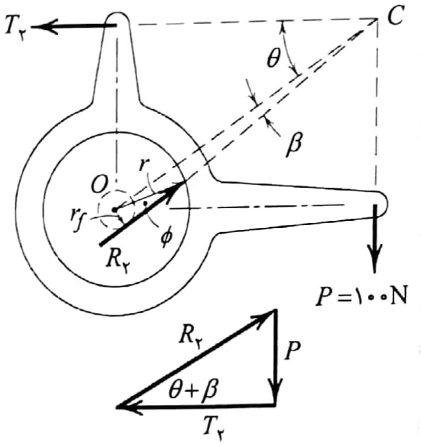
زاویهٔ β $\beta=\sin^{-۱}\frac{r_f}{OC}=\sin^{-۱}\frac{۹/۸۱}{\sqrt{(۱۲۰)^۲+(۱۸۰)^۲}}=۲/۶۰°$



(الف) آستانهٔ حرکت در جهت پادساعتگرد

(الف) *آستانهٔ چرخش در جهت پادساعتگرد.* با توجه به مثلث تعادل نیروها داریم

$$T_۱=P\cot(\theta-\beta)=۱۰۰\cot(۳۳/۷°-۲/۶۰°)$$
$$T_۱=T_{max}=۱۶۵/۸\text{N}$$ ◄



(ب) آستانهٔ حرکت در جهت ساعتگرد

(ب) *آستانهٔ چرخش در جهت ساعتگرد.* با توجه به مثلث نیروها داریم

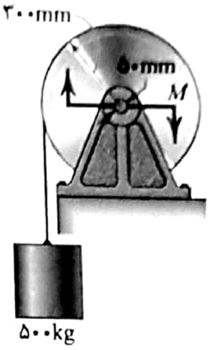
$$T_۲=P\cot(\theta+\beta)=۱۰۰\cot(۳۳/۷°+۲/۶۰°)$$
$$T_۲=T_{min}=۱۳۶/۲\text{N}$$ ◄

Scanned by CamScanner

مسائل

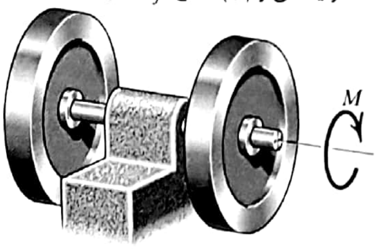
مسائل مقدماتی

۷۵.۶ کشتاور M بمقدار ۱۵۱۰N·m باید بر میل‌گردانی به‌قطر ۵۰mm وارد شود تا بالا بردن بشکهٔ بار ۵۰۰ کیلوگرمی با سرعت ثابت انجام گیرد. جرم بشکه و میل‌گردان باهم ۱۰۰kg است. ضریب اصطکاک μ را برای یاتاقان محاسبه کنید.



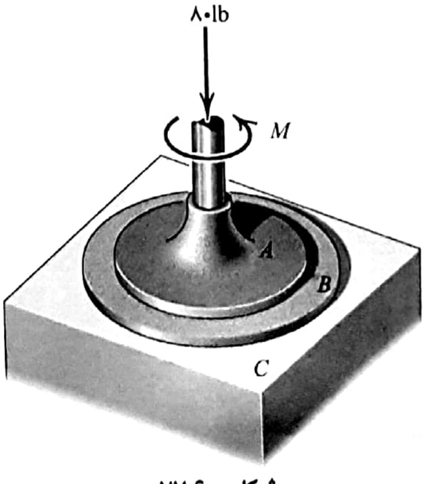
شکل م ۷۵.۶

۷۶.۶ دو چرخ طیار روی یک میل‌گردان نصب شده است و میل‌گردان، بین چرخ طیارها در یک یاتاقان شعاعی قرار دارد. چرخ طیار ۴۰kg جرم دارد و قطر میل‌گردان ۴۰mm می‌باشد. اگر کوپل M با اندازهٔ ۳ نیوتن ـ متری روی میل‌گردان برای ادامهٔ چرخش چرخ‌های طیار و میل‌گردان لازم باشد تا با سرعت ثابت کم حرکت کند، (الف) ضریب اصطکاک در یاتاقان و (ب) شعاع r_f دایرهٔ اصطکاک را محاسبه کنید.



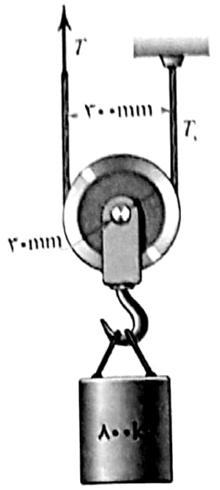
شکل م ۷۶.۶

۷۷.۶ دیسک A روی دیسک B قرار دارد و به آن نیروی فشاری ۸۰lb وارد می‌شود. قطرهای A و B به‌ترتیب برابر ۹in و ۱۲in و فشار وارد بر هر دیسک در کل سطح آن ثابت است. اگر ضریب اصطکاک بین A و B، ۰٫۴۰ باشد. کوپل M که باعث می‌شود A روی B بلغزد، همچنین حداقل ضریب اصطکاک μ بین B و سطح نگهدارندهٔ C برای اینکه B را از چرخیدن باز دارد چقدر است؟



شکل م ۷۷.۶

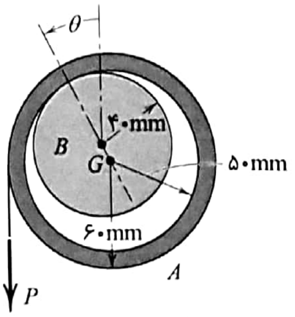
۷۸.۶ اگر ضریب اصطکاک با یاتاقان ۳۰ میلیمتری، ۰٫۲۵ باشد، کشش T در کابل برای بالا بردن بار ۸۰۰kg را محاسبه کنید. همچنین کشش T_1 را در لحظهٔ توقف کابل تعیین کنید. از جرم کابل و شعاع قرقره صرف‌نظر کنید.



شکل م ۷۸.۶

۷۹.۶ کشش T لازم برای پایین آوردن بار ۸۰۰ کیلوگرمی را که در مسئلهٔ ۷۸.۶ بیان شد محاسبه کنید. همچنین T_1 را بیابید.

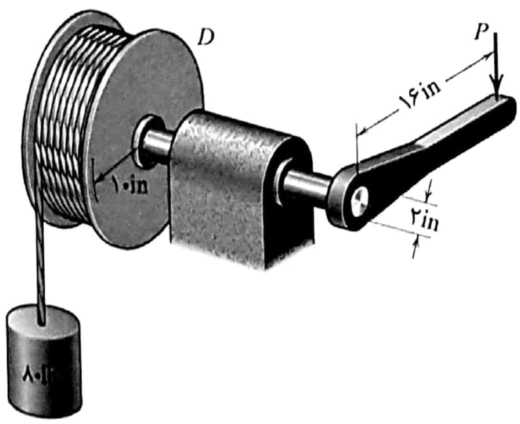
۸۰.۶ حلقهٔ فولادی ۲۰ کیلوگرمی A با شعاع داخلی و خارجی به‌ترتیب برابر ۵۰mm و ۶۰mm، روی یک میل‌گردان افقی ثابت به‌شعاع ۴۰mm ساکن است. اگر نیروی $P = ۱۵۰N$ به‌سمت پایین بر محیط حلقه وارد شده و این نیرو دقیقاً برای توقف لغزش آن کافی باشد، ضریب اصطکاک μ و زاویهٔ θ را محاسبه کنید.



شکل م ۸۰.۶

مسائل برگزیده

۸۱.۶ وزن بشکهٔ D به‌همراه کابل، ۱۰۰lb است و ضریب اصطکاک μ آن برای یاتاقان ۰٫۲۰ است. نیروی P لازم برای بالا بردن استوانه ۸۰lb را تعیین کنید؛ اگر اصطکاک یاتاقان (الف) قابل صرف‌نظرکردن باشد و (ب) در تحلیل در نظر گرفته شود. وزن میل‌گردان ناچیز است.

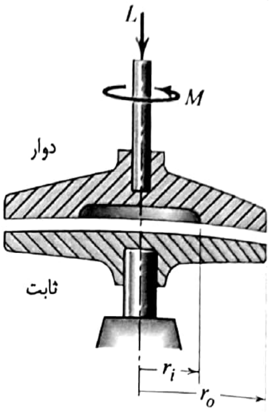


شکل م ۸۱.۶

۸۲.۶ نیروی P لازم برای پایین آوردن استوانهٔ ۸۰ پوندی مسئلهٔ ۸۱.۶ را تعیین کنید. پاسخ خود را با جواب بیان‌شده برای آن مسئله، مقایسه کنید. آیا مقدار بدون اصطکاک P مساوی میانگین نیروی مورد نیاز برای بالابردن و پایین آوردن آن استوانه است؟

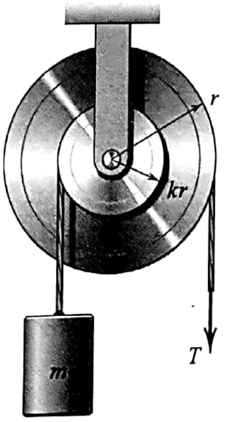
Scanned by CamScanner

... مقطع دو دیسک دایره‌ای در تماس با یکدیگر نشان داده شده است. عبارتی برای M لازم برای چرخاندن دیسک بالایی روی دیسک پایین را به‌دست آورید. فرض کنید فشار p بین دیسک‌ها مطابق با رابطهٔ $p = k/r^{۲}$ باشد، که در آن k یک مقدار ثابت و ضریب اصطکاک μ در تمام سطوح تماس، ثابت است.



شکل م ۸۳.۶

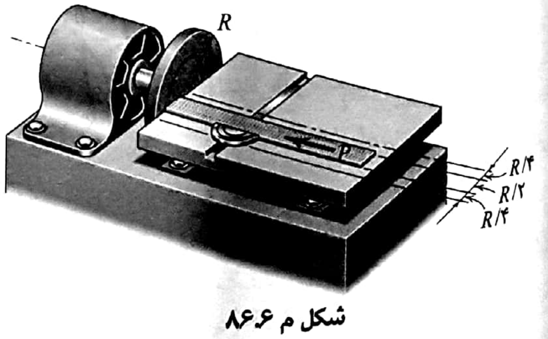
۸۴.۶ از دو قرقرهٔ متصل به‌هم برای بالا بردن استوانه‌ای به جرم m استفاده می‌شود. ضریب k از صفر تا یک تغییر می‌کند. اگر ضریب اصطکاک برای یاتاقان به‌شعاع $r_{۰}$ برابر μ باشد، عبارتی برای کشش T لازم برای بالا بردن استوانه با سرعت ثابت به‌دست آورید. μ مقداری است به‌اندازهٔ کافی کوچک که می‌توان جایگزین $\sin\phi$ کرد، که در آن ϕ زاویهٔ اصطکاک می‌باشد. جرم هر قرقره برابر $m_{۰}$ می‌باشد. پاسخ خود را برای T درصورتی که $m = ۵۰\text{kg}$ ، $m_{۰} = ۳۰\text{kg}$ ، $r = ۰/۳\text{m}$ ، $k = \frac{۱}{۲}$ ، $r_{۰} = ۲۵\text{mm}$ و $\mu = ۰/۱۵$ باشد ارزیابی کنید.



شکل م ۸۴.۶

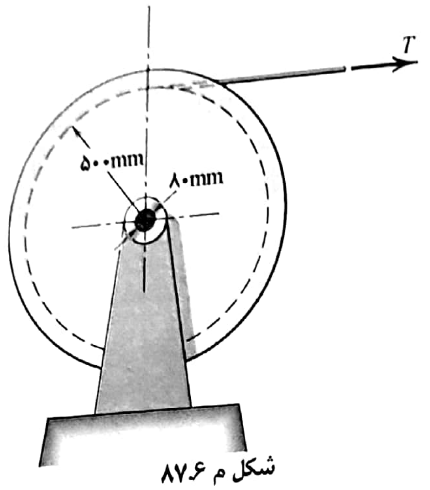
۸۵.۶ مسئلهٔ ۸۴.۶ را برای حالت پایین آوردن استوانه به‌جرم m که با سرعت ثابت حرکت کند، تکرار کنید.

۸۶.۶ انتهای یک تختهٔ باریک با اعمال نیروی P به‌کمک دستگاه سنگ‌زن دیسکی، سمباده‌زنی می‌شود. اگر ضریب اصطکاک جنبشی مؤثر، μ و فشار لازم روی تخته ثابت باشد، گشتاور Mای را که باید توسط موتور بر آن وارد کرد تا دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت بچرخد معین کنید. مرکز تخته در امتداد شعاع در مرکز دیسک است.



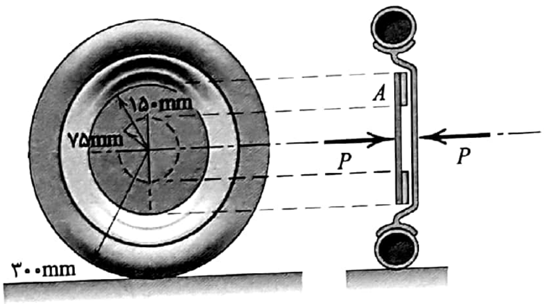
شکل م ۸۶.۶

۸۷.۶ کلاف پیچ کابل تلفن به جرم ۲۵۰kg روی میل‌گردانی به‌قطر ۸۰mm نصب شده است. اگر ضریب اصطلکاک بین میل‌گردان و یاتاقان ۰/۳۰ باشد، کشش افقی T لازم برای چرخش حلقهٔ سیم را محاسبه کنید.



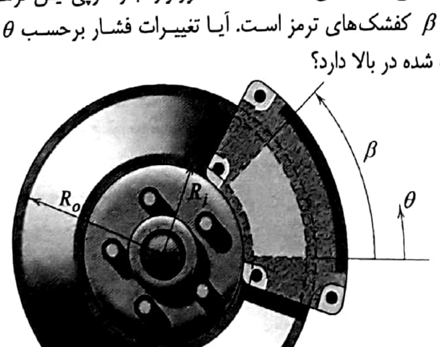
شکل م ۸۷.۶

۸۸.۶ چرخ‌های جلوی یک وسیلهٔ نقلیهٔ آزمایشی دیفرانسیل‌عقب به‌شعاع ۳۰۰mm ، دارای ترمزهای دیسکی هستند که شامل رینگ A با شعاع داخلی و خارجی به‌ترتیب برابر ۷۵mm و ۱۵۰mm، می‌باشد. رینگ که به‌همراه چرخ نمی‌چرخد، توسط نیروی P به دیسک چرخ فشرده می‌شود. اگر فشار بین رینگ و دیسک چرخ در تمام سطوح تماس به‌طور یکنواخت پخش شده باشد، نیروی اصطکاک F بین هریک از تایرهای جلو و مسیر حرکت را برای، نیروی محوری $P = ۱\text{kN}$ ، تعیین کنید. می‌دانیم که وسیلهٔ نقلیه با سرعت ثابت حرکت می‌کند و چرخ‌ها متحرک‌اند. ضریب اصطکاک بین رینگ و دیسک چرخ ۰/۳۵ است.



شکل م ۸۸.۶

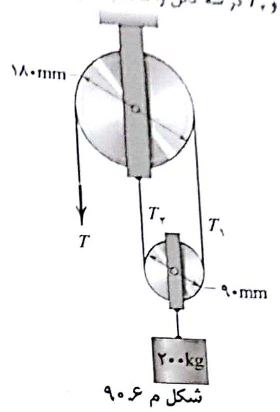
۸۹.۶ ترمز دیسکی یک اتومبیل از یک دیسک گردان تخت و دو کفشک ترمز تشکیل شده‌است. هریک از این دو کفشک ترمز در یک دیسک گردان قرار دارند. فشار p وارد بر این بالشتک‌ها یکنواخت است و نیروی فشار کل وارد بر کفشک ترمز برابر با P می‌باشد. نشان دهید که گشتاور وارد بر توپی این ترمز مستقل از پهنای زاویهٔ β کفشک‌های ترمز است. آیا تغییرات فشار برحسب θ تأثیری بر گشتاور گفته شده در بالا دارد؟



شکل م ۸۹.۶

Scanned by CamScanner

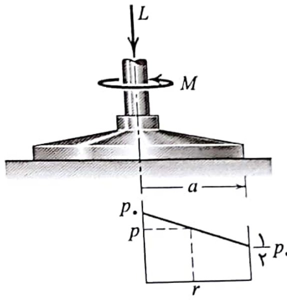
۹۰.۶ سیستم قرقرهٔ نشان‌داده‌شده برای بالا بردن قطعهٔ ۲۰۰ کیلوگرمی به‌کار می‌رود. قطر یاتاقان برای قرقرهٔ بالایی ۲۰ میلیمتر و برای قرقرهٔ پایینی ۱۲ میلیمتر است. با ضریب اصطکاک $\mu = 0{,}25$ برای هر دو یاتاقان، اگر قطعه به‌آرامی بالا برده شود، کشش‌های T، T_1 و T_2 در سه کابل را محاسبه کنید.



شکل م ۹۰.۶

۹۱.۶ کشش‌های T، T_1 و T_2 در مسئلهٔ ۹۰.۶ را با این تفاوت که قطعه به‌آهستگی پایین می‌آید، محاسبه کنید.

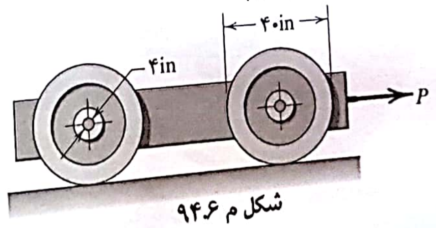
۹۲.۶ برای دستگاه سنگ‌زن تخت به‌شعاع a، فشار p وارد شدهٔ بین دیسک و سطح سنگ‌زده‌شده به‌طور خطی نسبت به r از مقدار p_0 در مرکز تا $p_0/2$ در نقطهٔ $r = a$ کاهش می‌یابد. اگر ضریب اصطکاک μ باشد، عبارتی برای گشتاور M لازم برای چرخیدن میل‌گردان تحت نیروی L را تعیین کنید.



شکل م ۹۲.۶

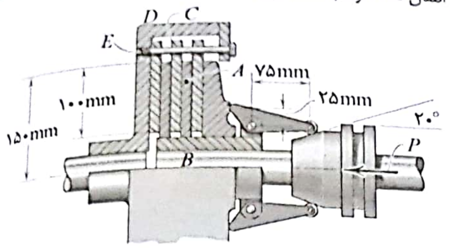
۹۳.۶ علاوه بر تغییرات شعاعی فشار در مسئلهٔ ۹۲.۶، فرض کنید μ به‌طور خطی نسبت به r از مقدار μ_0 در مرکز، تا $\mu_0/2$ در $r = a$ کاهش یابد. عبارتی برای گشتاور M لازم برای چرخش میل‌گردان تحت تأثیر بار محوری L به‌دست آورید و با نتیجهٔ بیان شده در مسئلهٔ ۹۲.۶ مقایسه کنید.

۹۴.۶ هر یک از چهار چرخ وسیلهٔ نقلیه دارای وزن ۴۰lb و روی میل‌گردانی به‌قطر ۴in نصب شده‌اند. وزن کل وسیلهٔ نقلیه به‌همراه وزن چرخ‌ها ۹۶۰lb به‌طور مساوی روی هر چهار چرخ توزیع شده است. اگر برای غلتیدن وسیلهٔ نقلیه همراه غلتش با سرعت پایین بر روی سطح افقی و با سرعت ثابت و کم نیروی $P = 16\text{lb}$ مورد نیاز باشد، ضریب اصطکاک موجود در یاتاقان چرخ‌ها را محاسبه کنید (*راهنمایی*: نمودار جسم آزاد یک چرخ را رسم کنید).



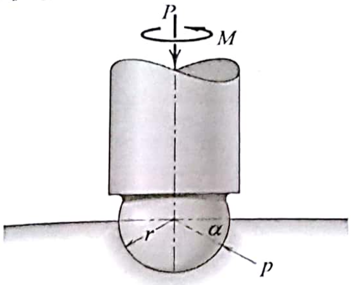
شکل م ۹۴.۶

۹۵.۶ شکل نشان‌داده‌شده، یک کلاچ چند صفحه‌ای را نشان می‌دهد که در کشتی به‌کار می‌رود. دیسک‌های A توسط خار به میل‌گردان B متصل شده‌اند. این دیسک‌ها می‌توانند روی میل‌گردان بلغزند ولی باید همراه آن بچرخند. دیسک‌های C توسط پیچ و مهره‌های E بوسط D را به‌حرکت در می‌آورند و خود می‌توانند در امتداد این پیچ‌ها بلغزند. در کلاچ نشان‌داده‌شده پنج جفت صفحهٔ اصطکاکی وجود دارد. فرض کنید فشار در سطوح تماس این صفحات دارای توزیع یکنواخت باشند، و ضریب اصطکاک ۰٫۱۵ و $P = 500\text{N}$ باشد، حداکثر گشتاور M را که می‌تواند انتقال داده شود، به‌دست آورید.



شکل م ۹۵.۶

۹۶.۶ یاتاقان محوری نیم‌کره‌ای انتهای یک محور، نیروی محوری P را تحمل می‌کند. اگر فشار p متناسب با $\sin\alpha$ و ضریب اصطکاک برابر μ باشد، عبارتی برای گشتاور M لازم برای چرخش میل‌گردان با سرعت ثابت تعیین کنید.

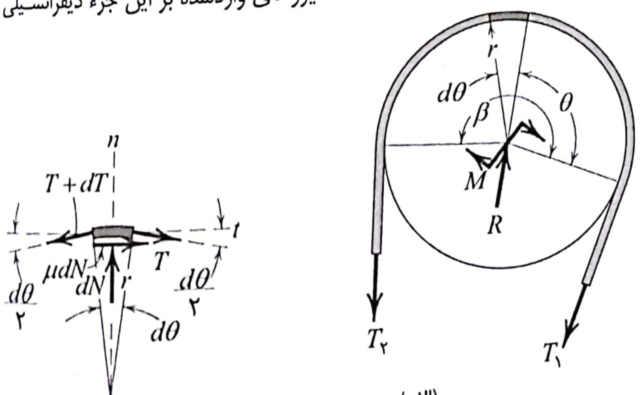


شکل م ۹۶.۶

۸.۶ تسمه‌های انعطاف‌پذیر

آستانهٔ لغزیدن کابل‌ها، تسمه‌ها، و طناب‌های انعطاف‌پذیر روی قرقره‌ها و طبلک‌ها در طراحی انواع محرک‌های تسمه‌گرد، ترمزهای نواری، و وسایل و تجهیزات بالابر بسیار مهم‌اند.

شکل ۱۱.۶ (الف) طبلکی را نشان می‌دهد که تحت تأثیر کشش دو سر تسمه مانند T_1 و T_2 و گشتاور M لازم برای جلوگیری از چرخش، و واکنش تکیه‌گاهی R واقع شده است. اگر M در امتداد نشان‌داده‌شده باشد، معمولاً T_2 بزرگتر از T_1 است. نمودار جسم آزاد جزء کوچکی از تسمه‌ای به طول $r\,d\theta$ در شکل ۱۱.۶ (ب) نشان داده شده است. نیروهای واردشده بر این جزء دیفرانسیلی را،



(ب) (الف)

شکل ۱۱.۶

Scanned by CamScanner

... یک دور چرخش بیشتر طناب به دور ... ثابت، می‌تواند باعث تغییر زیادی در کشش شود.

... نشان دادن تعادل این جزء در این حالت، مشابه با به‌کاربردن در مسئله‌های ... با نیروهای تغییرپذیر، تحلیل می‌کنیم. کشش از مقدار T در زاویهٔ θ، به مقدار $T+dT$ در زاویهٔ $\theta+d\theta$ افزایش می‌یابد. نیروی عمودی نیروی dN است زیرا بر جزء دیفرانسیلی سطح وارد می‌شود. به‌همین ترتیب نیروی اصطکاک، که باید در جهتی مخالف با جهت لغزش بر تسمه وارد شود، نیروی دیفرانسیلی و برابر $\mu\, dN$ در آستانهٔ حرکت است.

معادلهٔ تعادل در امتداد t چنین نوشته می‌شود

$$T\cos\frac{d\theta}{۲}+\mu\, dN=(T+dT)\cos\frac{d\theta}{۲}$$

یا

$$\mu\, dN=dT$$

چون کسینوس یک کمیت دیفرانسیلی در حد برابر واحد است. برای تعادل در امتداد n لازم است که

$$dN=(T+dT)\sin\frac{d\theta}{۲}+T\sin\frac{d\theta}{۲}$$

یا

$$dN=T\,d\theta$$

که در آن، از این نکته که سینوس یک زاویهٔ دیفرانسیلی در حد، برابر خود زاویه است، و از حاصلضرب دو دیفرانسیل در مقایسه با دیفرانسیل‌های مرتبهٔ اول باید صرف‌نظر کرد، استفاده نمودیم.

تلفیق دو معادلهٔ تعادل نتیجه می‌دهد

$$\frac{dT}{T}=\mu\, d\theta$$

با گرفتن انتگرال بین حدود متناظر نتیجه می‌شود

$$\int_{T_۱}^{T_۲}\frac{dT}{T}=\int_{۰}^{\beta}\mu\, d\theta$$

یا

$$\ln\frac{T_۲}{T_۱}=\mu\beta$$

که در آن $\ln(T_۲/T_۱)$، لگاریتم طبیعی (بر مبنای e) است. با حل برای $T_۲$ نتیجه می‌شود

$$T_۲=T_۱e^{\mu\beta} \qquad (۷.۶)$$

توجه کنید که زاویهٔ β کل زاویهٔ تماس تسمه است و باید برحسب رادیان بیان شود. اگر تسمه یا طناب n بار دور طبلک پیچیده شده باشد، زاویهٔ β برابر $۲\pi n$ رادیان خواهد بود. معادلهٔ (۷.۶) برای یک مقطع غیر دایره‌ای نیز به کار برده می‌شود که در آن زاویهٔ کل تماس با قرقره برابر β است. این نتیجه از آنجا حاصل می‌شود که شعاع r طبلک دایره‌ای در شکل ۱۱.۶، در معادلات تعادل جزء دیفرانسیلی تسمه وارد نمی‌شود.

رابطهٔ بیان‌شده در معادلهٔ (۷.۶) همچنین برای محرک‌های تسمه‌گردی که در آنها هم تسمه و هم قرقره با سرعت ثابتی چرخش دارند، برقرار است. در این مورد، این معادله نسبت میزان کشش تسمه‌ها را در لغزش و یا آستانهٔ لغزیدن توصیف می‌کند. وقتی نسبت چرخش بسیار زیاد باشد، تسمه تمایل به جداشدن از روی طوقه پیدا می‌کند، و در محاسبهٔ معادلهٔ (۷.۶) قدری خطا وارد می‌شود.

۹.۶ مقاومت غلتشی

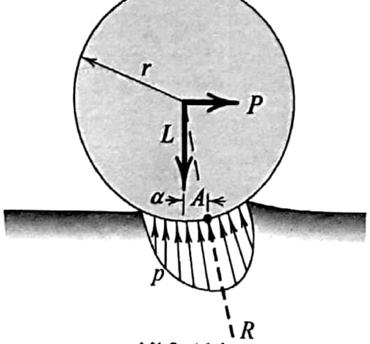
تغییر شکل در نقطهٔ تماس بین چرخ غلتشی و سطح تکیه‌گاه تسمه، همان‌طورکه در بالا به‌اختصار توضیح داده شد، مقاومتی در غلتش ایجاد می‌کند. این مقاومت حاصل نیروی اصطکاک مماسی نیست، از این‌رو با پدیدهٔ اصطکاک خشک تفاوت کلی دارد.

برای توصیف مقاومت غلتشی، چرخ نشان‌داده‌شده در شکل ۱۲.۶ را در نظر بگیرید که تحت تأثیر بار L روی تسمه و نیرویی مانند P وارد بر مرکز جهت ایجاد غلتش را نشان می‌دهد. تغییر شکل چرخ و سطح تکیه‌گاهش در شکل بیش از اندازهٔ واقعی نشان داده شده است. توزیع فشار p روی سطح تماس مشابه توزیع نشان‌داده‌شده است. برایند R این توزیع در نقطه‌ای مانند A وارد می‌شود و برای اینکه چرخ در وضع تعادل باشد، باید امتداد آن از مرکز چرخ عبور کند. نیروی P لازم برای ادامهٔ غلتش با سرعت ثابت با برابر صفر قراردادن گشتاورهای همهٔ نیروها حول نقطهٔ A به‌دست می‌آید. بنابراین داریم

$$P=\frac{a}{r}L=\mu_r L$$

که در آن گشتاور بازوی P برابر r فرض می‌شود. نسبت $\mu_r=a/r$ را *ضریب مقاومت غلتشی* می‌نامند. این ضریب نسبت نیروی مقاوم به نیروی عمودی را نشان می‌دهد که از این نظر شبیه ضریب اصطکاک استاتیکی یا ضریب اصطکاک جنبشی است. از طرف دیگر در μ_r اثری از لغزش یا آستانهٔ لغزشی وجود ندارد.

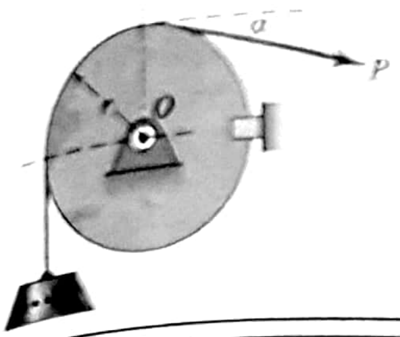
به‌علت اینکه بُعد a بستگی به بسیاری عوامل دارد که تعیین اندازهٔ آنها مشکل است، درک جامعی در مورد مقاومت غلتشی در دست نیست. فاصلهٔ a تابع خواص کشسانی و مومسانی و مواد تماسی، شعاع چرخ، تندی حرکت و زبری سطوح است. بعضی آزمایش‌ها نشان می‌دهد که a تنها اندکی با شعاع چرخ تغییر می‌کند، از این‌رو اغلب آن را مستقل از شعاع چرخش فرض می‌کنند. متأسفانه در بعضی منابع، کمیت a را ضریب اصطکاک غلتشی نیز نامیده‌اند، اما دارای بُعد طول است و نمی‌تواند ضریبی بدون بُعد به مفهوم متداول باشد.



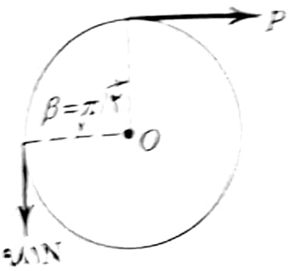
شکل ۱۲.۶

مسئله نمونه ۶-۹

یک کابل انعطاف‌پذیر که بار ۱۰۰ کیلوگرمی را نگه می‌دارد از روی طبلک دایره‌ای ثابتی گذرانده و نیروی P بر آن اعمال می‌شود تا تعادل برقرار شود. ضریب اصطکاک بین تسمه و طبلک ثابت ۰٫۳۰ است. الف) اگر $\alpha = ۰$ باشد حداکثر و حداقل مقدار P را برای حفظ تعادل در حالتی که بار نه بالا برود و نه پایین بیاید تعیین کنید. ب) برای $P = ۵۰۰\,N$ حداقل مقدار زاویهٔ α را پیش از شروع لغزش کابل تعیین کنید.



حل: آستانهٔ حرکت کابل روی طبلک ثابت از معادلهٔ (۶-۷) بدست می‌آید به گونه‌ای که $T_2 > T_1$.



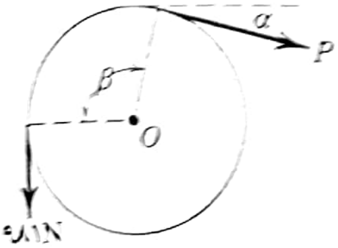
$\alpha = ۰$ (الف)

① الف) وقتی $\alpha = ۰$ است زاویهٔ تماس β برابر $\frac{\pi}{۲}$ rad است. در آستانهٔ حرکت بار به سمت بالا $T_2 = P_{max}$ و $T_1 = ۹۸۱\,N$ است و داریم

② $$P_{max}/۹۸۱ = e^{۰٫۳۰(\pi/۲)} \qquad P_{max} = ۹۸۱(۱٫۶۰۲) = ۱۵۷۲\,N$$

برای آستانهٔ حرکت بار به سمت پایین $T_2 = ۹۸۱\,N$ و $T_1 = P_{min}$ است. بنابراین داریم

$$۹۸۱/P_{min} = e^{۰٫۳۰(\pi/۲)} \qquad P_{min} = ۹۸۱/۱٫۶۰۲ = ۶۱۲\,N$$



$P = ۵۰۰\,N$ (ب)

ب) با فرض $T_2 = ۹۸۱\,N$ و $T_1 = P = ۵۰۰\,N$ از معادلهٔ (۶-۷) داریم

$$۹۸۱/۵۰۰ = e^{۰٫۳۰\beta} \qquad ۰٫۳۰\beta = \ln(۹۸۱/۵۰۰) = ۰٫۶۷۴$$

$$\beta = ۲٫۲۵\,rad \quad \text{یا} \quad \beta = ۲٫۲۵\left(\frac{۳۶۰}{۲\pi}\right) = ۱۲۸٫۷^\circ$$

③ $$\alpha = ۱۲۸٫۷^\circ - ۹۰^\circ = ۳۸٫۷^\circ$$

③ هنگام بدست آوردن معادلهٔ (۶-۷) توجه کنید که شعاع قرقره در محاسبات وارد نشده است. تنها زاویهٔ تماس و ضریب اصطکاک است که شرایط محدودکننده‌ای را برای آستانهٔ حرکت کابل انعطاف‌پذیر بر سطح خمیده تعیین می‌کند.

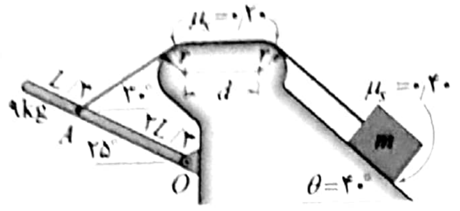
راهنمایی‌های مفید

① باید دقت کنیم که زاویهٔ β برحسب رادیان باشد.

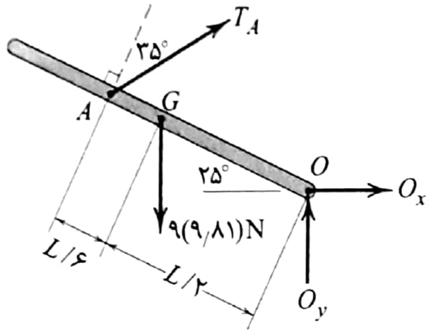
② هنگام بدست آوردن معادلهٔ (۶-۷) توجه کنید که $T_2 > T_1$ است.

Scanned by CamScanner

نمونه ۶.۱۰ [مقدار] جرم m روی سیستم را به‌طوری که سیستم در تعادل استاتیکی قرار گیرد، تعیین کنید. [ضریب] اصطکاک استاتیکی بین طناب و سطح خم‌شدهٔ بالای قرقره ۰٫۲۰ و بین قطعه و سطح [شیب‌دار] ۰٫۴۰ است. از اصطکاک در لولای O صرف‌نظر کنید.



حل: از نمودار جسم آزاد جسم میلهٔ بلند یکنواخت، کشش T_A را می‌توان در کابل نقطهٔ A تعیین کرد.



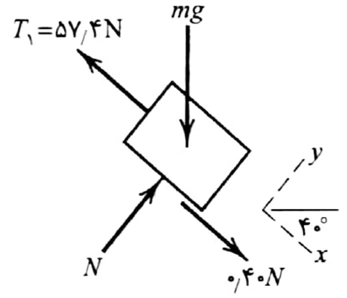
$$[\Sigma M_O = ۰] \qquad -T_A\left(\frac{۲L}{۳}\cos ۳۵°\right) + ۹(۹٫۸۱)\left(\frac{L}{۲}\cos ۲۵°\right) = ۰$$
$$T_A = ۷۳٫۳\,\text{N}$$

۱. حرکت جرم m در حرکت به‌سمت بالای سطح شیبدار. کشش $T_A = ۷۳٫۳\,\text{N}$ از کشش مربوط به سطح خمیدهٔ زیر بیشتر است. از معادلهٔ (۷.۶) داریم

$$[T_۲ = T_۱ e^{\mu_s \beta}] \qquad ۷۳٫۳ = T_۱ e^{۰٫۲۰[۳۰° + ۴۰°]\pi/۱۸۰°} \qquad T_۱ = ۵۷٫۴\text{N}$$

از FBD قطعه برای مورد ۱ داریم

$$[\Sigma F_y = ۰] \qquad N - mg\cos ۴۰° = ۰ \qquad N = ۰٫۷۶۶mg$$
$$[\Sigma F_x = ۰] \qquad -۵۷٫۴ + mg\sin ۴۰° + ۰٫۴۰(۰٫۷۶۶mg) = ۰$$
$$mg = ۶۰٫۵\text{N} \qquad m = ۶٫۱۶\text{kg}$$



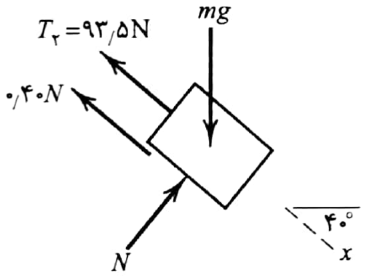
۱. در آستانهٔ حرکت به‌سمت بالای سطح شیبدار

۲. حرکت جرم m در آستانهٔ حرکت به‌سمت پایین سطح شیبدار. مقدار $T_A = ۷۳٫۳\,\text{N}$ تغییر نمی‌کند ولی اکنون از دو کشش در معادلهٔ (۷.۶) کوچکتر است

$$[T_۲ = T_۱ e^{\mu_s \beta}] \qquad T_۲ = ۷۳٫۳ e^{۰٫۲۰[۳۰° + ۴۰°]\pi/۱۸۰°} \qquad T_۲ = ۹۳٫۵\text{N}$$

با در نظر گرفتن FBD قطعه برای مورد ۲، می‌بینیم که نیروی عمود N با وضعیت ۱ تغییر نمی‌کند.

$$[\Sigma F_x = ۰] \qquad -۹۳٫۵ - ۰٫۴(۰٫۷۶۶mg) + mg\sin ۴۰° = ۰$$
$$mg = ۲۷۸\,\text{N} \qquad m = ۲۸٫۳\,\text{kg}$$



۲. در آستانهٔ حرکت به‌سمت پایین سطح شیبدار

❶ بنابراین گسترهٔ لازم $۶٫۱۶ \le m \le ۲۸٫۳\,\text{kg}$ است.

راهنمایی‌های مفید

❶ تنها تماس زاویه‌ای کل در معادلهٔ (۷.۶) وارد می‌شود (مانند β) به‌طوری‌که نتایج بستگی به کمیت‌های r و d دارد.

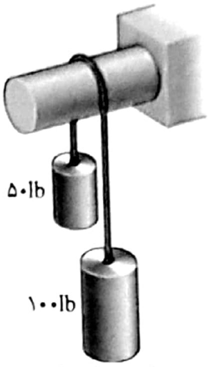
❷ اگر زاویهٔ شیب θ به ۲۰° تغییر کرده باشد، مسئله را دوباره حل کنید، با این فرض که همهٔ اطلاعات دیگر ثابت باقی می‌ماند. برای یک نتیجهٔ غیرمنتظره آماده باشید!

Scanned by CamScanner

مسائل

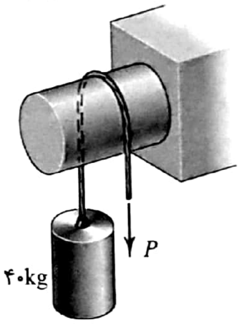
مسائل مقدماتی

۹۷.۶ حداقل ضریب اصطکاک μ بین طناب و میل‌گردان ثابت که بتواند از حرکت استوانه‌های ناموازن جلوگیری نماید چقدر است؟



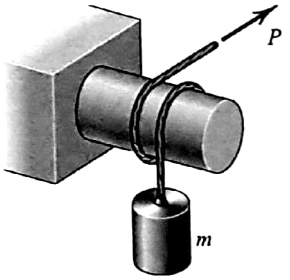
شکل م ۹۷.۶

۹۸.۶ نیروی P لازم را برای (الف) بالا رفتن (ب) پایین آمدن استوانهٔ ۴۰ کیلوگرمی با سرعت آهستهٔ یکنواخت تعیین کنید. ضریب اصطکاک بین طناب و سطح تکیه‌گاه ۰٫۳۰ است.



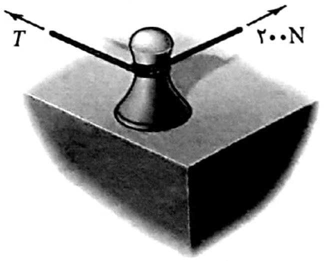
شکل م ۹۸.۶

۹۹.۶ برای پایین آوردن استوانه با سرعت کم و آهسته با طناب $1\frac{1}{4}$ دور، حول میل‌گردان ثابت نیروی $P = mg/6$ مورد نیاز است. ضریب اصطکاک μ بین طناب و میل‌گردان را محاسبه کنید.



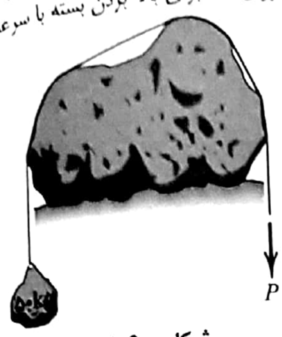
شکل م ۹۹.۶

۱۰۰.۶ کارگری در اسکله می‌خواهد با پیچیدن طناب به دور یک ستون، مطابق شکل، یک کشتی را نگه دارد. اگر او به یک انتهای طناب نیروی ۲۰۰N وارد کند که $1\frac{1}{4}$ دور حول مهاربند پیچیده شده است، نیروی طرف دیگر طناب T چه اندازه است؟ ضریب اصطکاک طناب و مهاربند چدنی ۰٫۳۰ می‌باشد.



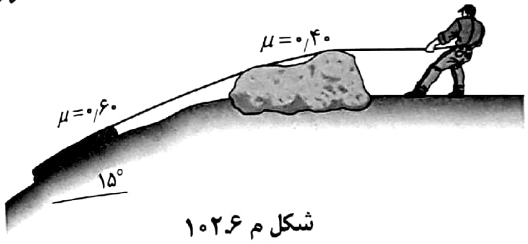
شکل م ۱۰۰.۶

۱۰۱.۶ طنابی که بسته‌ای ۵۰ کیلوگرمی به آن متصل است از سطح نامتقارنی، مطابق شکل، می‌گذرد. اگر نیروی $P = ۷۰N$ برای پایین رفتن بسته با سرعت ثابت لازم باشد، (الف) ضریب اصطکاک μ بین طناب و روی سطح را تعیین کنید. (ب) مقدار نیروی P' برای بالا بردن بسته با سرعت ثابت چقدر باید باشد؟



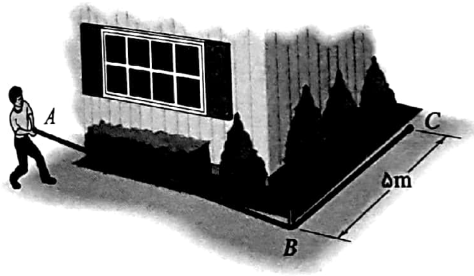
شکل م ۱۰۱.۶

۱۰۲.۶ با چه نیروی افقی Pای باید کارگر تنهٔ درخت ۳۵kg را مطابق شکل از سطح شیبدار °۱۵ بالا بکشد؟ ضریب اصطکاک بین الوار و سطح شیبدار ۰٫۶۰ و بین طناب و الوار ۰٫۴۰ است.



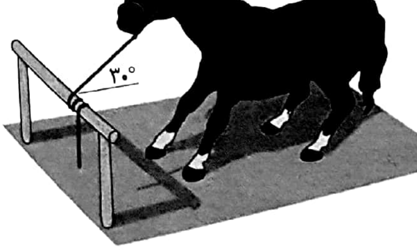
شکل م ۱۰۲.۶

۱۰۳.۶ شیلنگ آبی به جرم ۱٫۲kg/m از B تا C در تماس کامل با زمین می‌باشد. مؤلفهٔ افقی P_x نیرویی که باغبان باید برای کشیدن شیلنگ دور حفاظ کوچک استوانه‌ای در نقطهٔ B وارد کند، چه اندازه است؟ ضریب اصطکاک بین شیلنگ و زمین ۰٫۵۰ و بین شیلنگ و استوانهٔ باریک ۰٫۴۰ است. فرض کنید شیلنگ و زمین بین نقاط A و B در تماس نباشند.



شکل م ۱۰۳.۶

۱۰۴.۶ در فیلم‌های وسترن معمولاً گاوچران‌ها افسار اسب‌های خود را چند بار دور یک تیر افقی می‌چرخانند و انتهای آن را آزاد می‌گذارند و اسب را رها می‌کنند. اگر وزن انتهای آزاد افسار ۲oz و تعداد پیچش‌ها دور تیر افقی مطابق شکل نشان‌داده‌شده باشد، چه نیروی کششی T باید توسط اسب در جهت نشان‌داده‌شده وارد شود تا اسب آزاد شود؟ ضریب اصطکاک بین افسار و تیر چوبی ۰٫۷۰ است.



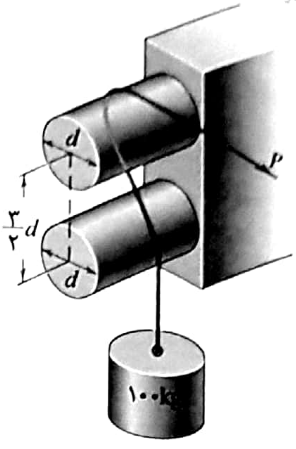
شکل م ۱۰۴.۶

Scanned by CamScanner

...اصطکاکی

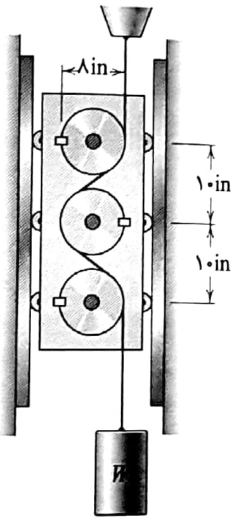
مسائل برگزیده

۱۰۵.۶ نیروی افقی P لازم برای بالا بردن بار 100kg را محاسبه کنید. ضریب اصطکاک بین طناب و میله‌های ثابت برابر ۰٫۴۰ است.



شکل م ۱۰۵.۶

۱۰۶.۶ سازوکار نشان‌داده‌شده به‌وزن 50lb از یک قاب، سه غلتک ثابت به‌قطر 8in، و شش چرخ راهنمای کوچک تشکیل شده است. حداقل وزن W لازم برای نگهداری غلتک‌ها در حالت تعادل برای هر وضعیت در راهنمای قائم را تعیین کنید. ضریب اصطکاک بین نوار سبک و غلتک‌ها ۰٫۳۰ می‌باشد.

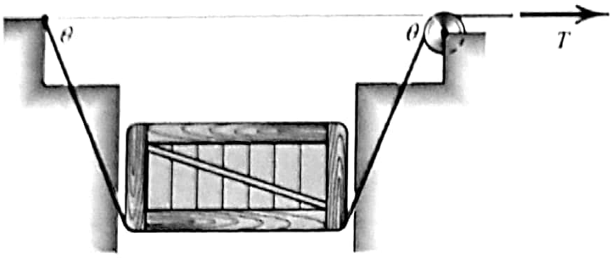


شکل م ۱۰۶.۶

۱۰۷.۶ شخصی به‌وزن 180lb از شاخهٔ افقی درخت آویزان شده است و به‌طرف پایین می‌آید. اگر ضریب اصطکاک بین طناب و شاخهٔ درخت ۰٫۶۰ باشد، نیروی وارده توسط شخص بر طناب را به‌گونه‌ای که به‌آرامی پایین بیاید تعیین کنید.

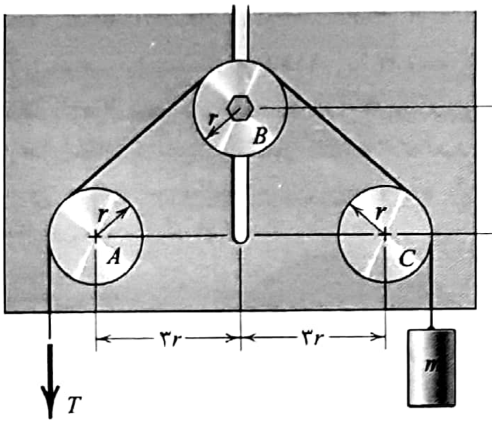
شکل م ۱۰۷.۶

۱۰۸.۶ صندوقی یکنواخت به جرم m با کشش تسمهٔ انعطاف‌پذیر که از زیر آن عبور می‌کند نگه‌داشته شده است. برای موقعیت معین θ، اگر ضریب اصطکاک بین تسمه و صندوق μ باشد، عبارتی برای کشش مورد نیاز T روی تسمه برای شروع (الف) بالا بردن و (ب) پایین آوردن صندوق، تعیین کنید. از هرگونه اصطکاک بین صندوق و راهبرهای عمودی صرف‌نظر کنید.



شکل م ۱۰۸.۶

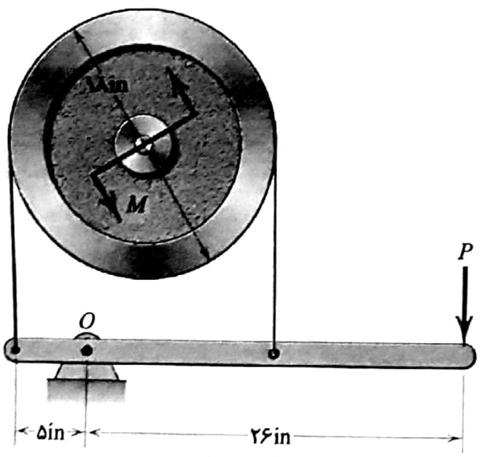
۱۰۹.۶ موقعیت‌های میل‌گردان‌های A و C در وضعیت نشان‌داده‌شده ثابت‌اند، درحالی‌که میل‌گردان B می‌تواند نسبت به شکاف قائم و پیچ قفل‌کننده تغییر کند. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی تمام سطوح μ باشد، وابستگی T به مختصهٔ y را تعیین کنید. که در آن T کشش لازم برای شروع بالا بردن استوانه به جرم m است. همهٔ میل‌گردان‌ها در برابر چرخش ثابت‌اند.



شکل م ۱۰۹.۶

۱۱۰.۶* مسئلهٔ ۱۰۹.۶ را با این تفاوت که ضریب اصطکاک استاتیکی در A و C برابر ۰٫۶۰، و در B برابر ۰٫۲۰ است، تکرار کنید. T/mg را برحسب تابعی از y برای $0 \leq y \leq 10r$ رسم کنید، که در آن r شعاع مشترک کل سه میل‌گردان است. مقادیر حدی T/mg برای $y = 0$ و مقادیر بزرگ y چقدر خواهند بود؟

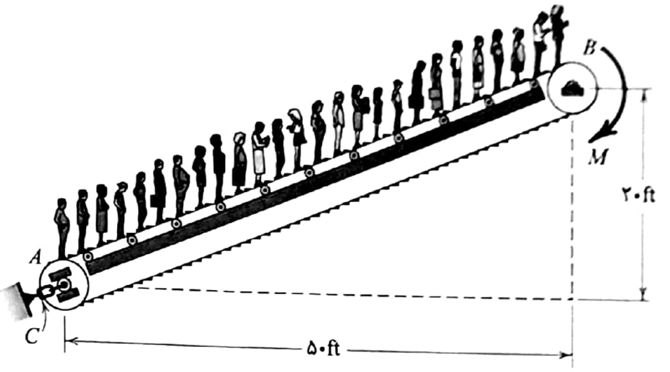
۱۱۱.۶ گشتاور پادساعتگرد $M = 1500\text{lb·in}$ بر چرخ طیاری وارد می‌شود. اگر ضریب اصطکاک بین تسمه و چرخ ۰٫۲۰ باشد، حداقل نیروی P لازم را برای جلوگیری از چرخش چرخ محاسبه کنید.



شکل م ۱۱۱.۶

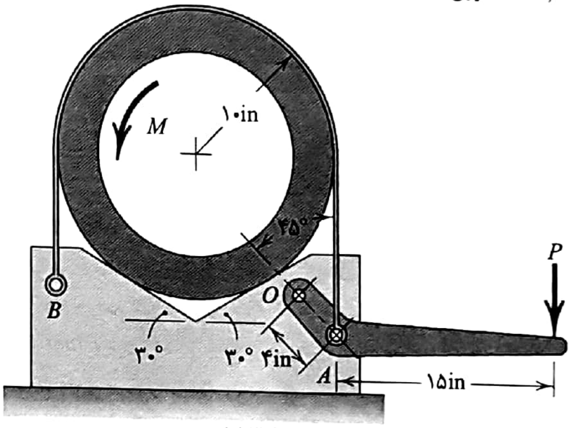
Scanned by CamScanner

۱۱۲.۶ تسمهٔ نقالهٔ پله‌برقی نشان‌داده‌شده از روی طبلک هرزگرد A عبور می‌کند و تحت تأثیر گشتاور M که بر طبلک B وارد می‌شود، به‌حرکت درمی‌آید. کشش تسمه توسط بست دو پیچهٔ واقع در C تنظیم می‌گردد. وقتی پله بدون بار است، کشش در هر طرف تسمه برابر $T =$ ۱۰۰۰lb است. با فرض اینکه ۳۰ نفر هریک به‌وزن میانگین ۱۵۰lb به‌طور یکنواخت روی پله قرارگیرند، حداقل ضریب اصطکاک μ بین طبلک B و تسمه را برای جلوگیری از لغزیدن تسمه تعیین کنید. (توجه: می‌توان نشان داد که افزایش کشش تسمه در سمت بالای طبلک B و کاهش کشش تسمه در طبلک پایین A، هریک برابر نصف مؤلفهٔ وزن کل مسافران، در امتداد سطح شیبدار است.)



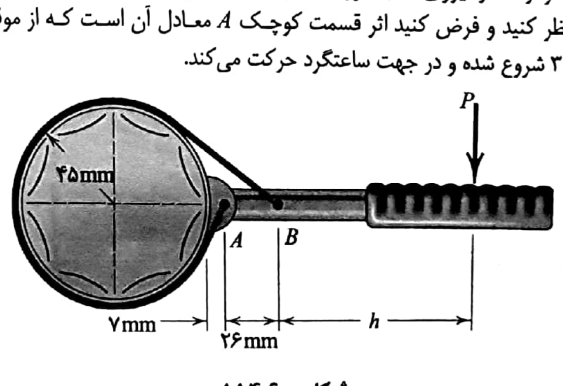
شکل م ۱۱۲.۶

۱۱۳.۶ در طراحی ترمز تسمه‌ای نشان‌داده‌شده، کوپل M لازم برای دوران لوله در شیار V-شکل قابل انعطاف را تعیین کنید. نیروی $P =$ ۲۵lb به اهرمی که حول O لولا شده است، وارد می‌شود. ضریب اصطکاک بین تسمه و لوله ۰٫۳۰ و بین لوله و قطعه ۰٫۴۰ است. وزن قطعات دیگر ناچیز است.



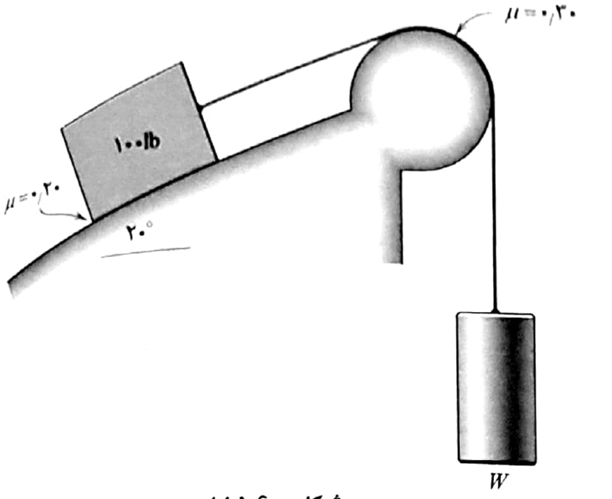
شکل م ۱۱۳.۶

۱۱۴.۶ شکل نشان‌داده‌شده، طرح یک آچار تسمه‌ای تعویض فیلتر روغن است. اگر ضریب اصطکاک بین تسمه و فیلتر ثابت روغن ۰٫۲۵ باشد، حداقل فاصلهٔ h را صرف‌نظر از مقدار نیروی P، به‌طوری‌که آچار روی فیلتر نلغزد، معین کنید. از جرم آچار صرف‌نظر کنید و فرض کنید اثر قسمت کوچک A معادل آن است که از موقعیت ساعت ۳ شروع شده و در جهت ساعتگرد حرکت می‌کند.



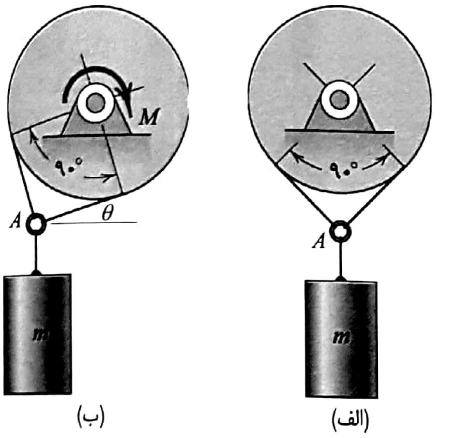
شکل م ۱۱۴.۶

۱۱۵.۶ حدود وزن استوانهٔ W را برای اینکه سیستم در تعادل باشد، معین کنید. ضریب اصطکاک بین قطعهٔ ۱۰۰lb و سطح شیبدار ۰٫۲۰ و بین طناب و سطح اتکای استوانه ۰٫۳۰ است.



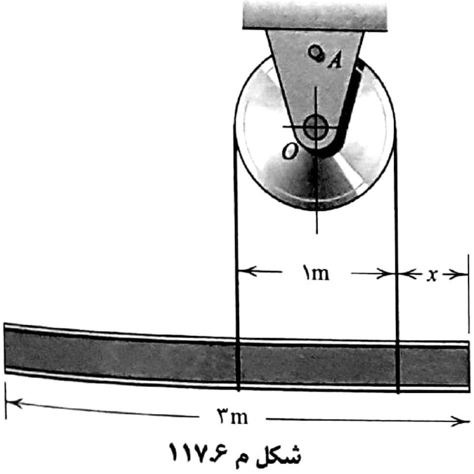
شکل م ۱۱۵.۶

۱۱۶.۶ استوانه‌ای به جرم m متصل به حلقهٔ A، مطابق قسمت (الف) شکل، توسط کابلی که از روی قرقره عبور می‌کند، آویزان است. مطابق قسمت (ب) شکل، کوپل M وارد بر قرقره آن را می‌چرخاند، تا وقتی‌که لغزش کابل روی قرقره در زاویهٔ $\theta =$ ۲۰° اتفاق افتد، ضریب اصطکاک μ بین کابل و قرقره را محاسبه کنید.



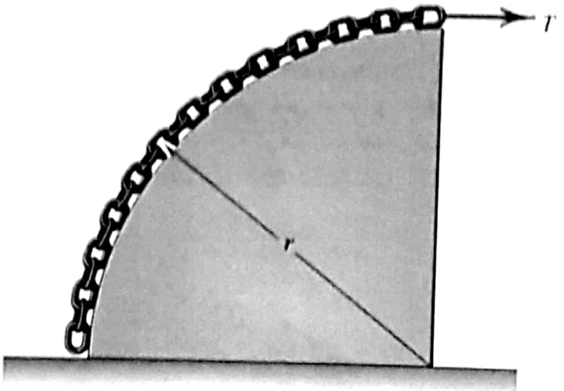
شکل م ۱۱۶.۶

۱۱۷.۶ تیر یکنواخت به‌طول ۳m توسط کابل گذرنده از قرقره‌ای بزرگ، آویزان شده است. پین قفل‌کنندهٔ نقطهٔ A از چرخش قرقره جلوگیری می‌کند. اگر ضریب اصطکاک بین کابل و قرقره ۰٫۲۵ باشد، حداقل مقدار x را برای اینکه کابل روی قرقره نلغزد تعیین کنید.



شکل م ۱۱۷.۶

Scanned by CamScanner



شکل م ۱۲۰.۶

۱۰.۶ مروری بر فصل

در این فصل مطالعهٔ خود را بر روی اصطکاک‌های خشک یا اصطکاک کولنی متمرکز کردیم و با استفاده از یک مدل سادهٔ مکانیکی برای ناصافی‌های سطح تماس، شکل ۱.۶، این پدیده را برای اغلب کاربردهای مهندسی بررسی کردیم. این مدل به ما کمک می‌کند تا سه نوع مسئلهٔ اصطکاک را که در تجربه با آن مواجه می‌شویم، در نظر مجسم کنیم. این مسائل عبارت‌اند از:

۱. جسم ساکن است. در این حالت نیروی اصطکاک استاتیکی کمتر از مقدار ماکزیمم است ($F < F_{\max}$) و مقدار آن توسط معادله‌های تعادل به‌دست می‌آید. (در این حالت معمولاً باید وارسی کرد که آیا $F < \mu_s N$ است.)

۲. جسم می‌لغزد. در این حالت اصطکاک استاتیکی حدی و حرکت در آستانهٔ وقوع است ($F = \mu_s N$).

۳. جسم در آستانهٔ حرکت است. اصطکاک جنبشی است که در آن حرکت لغزشی بین سطوح در تماس رخ می‌دهد. (در این حالت $F = \mu_k N$.)

در حل مسائل اصطکاک خشک باید نکات زیر را در نظر گرفت:

۱. ضریب اصطکاک برای یک جسم تنها معنا ندارد، بلکه برای سطح تماس دو جسم به‌کار می‌رود.

۲. ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s معمولاً کمی بزرگتر از ضریب اصطکاک جنبشی μ_k خواهد بود.

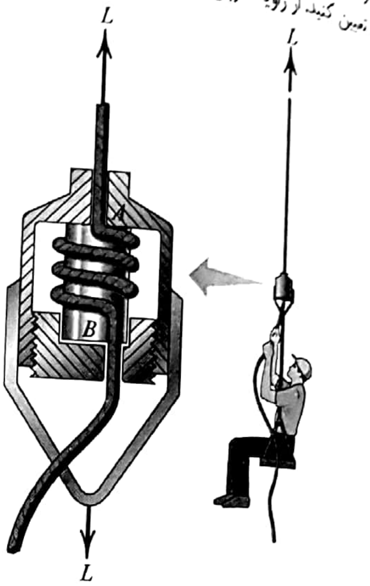
۳. نیروی اصطکاک وارد بر یک جسم همواره در خلاف جهت لغزش واقعی جسم یا لغزشی که در غیاب اصطکاک رخ می‌دهد، عمل می‌کند.

۴. اگر نیروهای اصطکاک روی یک سطح یا در امتداد یک خط توزیع شده باشند، جزئی از سطح یا خط را انتخاب کرده و نیرو و گشتاور وارد بر آن جزء را محاسبه می‌کنیم. سپس از رابطهٔ حاصل انتگرال می‌گیریم.

۵. ضرایب اصطکاک بسته به شرایط سطح تماس و به شدت متغیرند. محاسبهٔ ضرایب اصطکاک تا سه رقم معنادار، دقتی را نشان می‌دهد که نمی‌توان با آزمایش به آن دست یافت. از این‌رو هنگام درج چنین ضرایبی در هندبوک، هدف تنها وارسی محاسبات است. برای محاسبات طراحی در مهندسی، مقادیر ضریب اصطکاک استاتیکی و جنبشی موجود در هندبوک‌ها را تنها باید به‌عنوان مقادیر تقریبی در نظر گرفت.

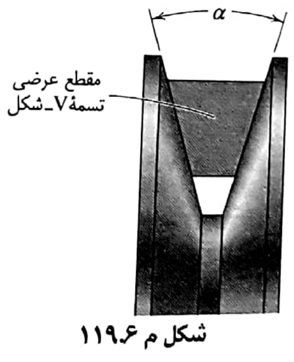
در رشتهٔ مهندسی علاوه بر اصطکاک خشک، سایر انواع اصطکاک که در قسمت مقدماتی فصل به آن اشاره شد، مانند اصطکاک اجسام سیال (شاره‌ها) اهمیت فراوان دارند.

۱۱۸.۶ در شکل نشان‌داده‌شده وسیله‌ای برای پایین آمدن یک شخص به‌وسیلهٔ طناب با سرعت کنترل‌شدهٔ ثابت پایین رود. در این وسیله، طناب به دور یک میل‌گردان مرکزی پیچیده شده و به یک قلاب متصل، و انتهای دیگر طناب از طوقهٔ پایین آزاد است. تعداد دورها توسط چرخش طوقهٔ پایین تنظیم می‌شود، که طناب را به دور میل‌گردان می‌پیچد یا آن را از دور میل‌گردان باز می‌کند. ورودی طناب به داخل میل‌گردان معادل $\frac{1}{4}$ دور، و عبور طناب از گوشهٔ B نیز معادل $\frac{1}{4}$ دور است. اصطکاک در تماس مستقیم طوقه‌ها، در هر طوقه ۱۰N است. اگر لازم باشد تا علاوه بر چرخش‌های ... به دور، دور میل‌گردان پیچیده شده باشد، تا شخص ۷۵ کیلوگرمی بدون اعمال نیرو از انتهای آزاد طناب با سرعت ثابت پایین رود، ضریب اصطکاک بین طناب و سطوح وسیله را تعیین کنید. از زاویهٔ مارپیچ طناب حول میل‌گردان‌ها صرف‌نظر کنید.



شکل م ۱۱۸.۶

۱۱۹.۶ تسمهٔ تخت و قرقرهٔ شکل ۱۱.۶ را با تسمهٔ V-شکل و قرقرهٔ شیاردار با مقطع عرضی نشان‌داده‌شده جایگزین کنید. برای این سیستم رابطهٔ بین کشش‌های تسمه، زاویهٔ تماس، و ضریب اصطکاک تسمهٔ V-شکل را در آستانهٔ لغزش تعیین کنید. تسمهٔ V-شکل با زاویهٔ $\alpha = 35°$، معادل n برابر کردن ضریب اصطکاک تسمهٔ تخت هم‌جنس است. مقدار n را تعیین کنید.



شکل م ۱۱۹.۶

۱۲۰.۶ جرم واحد طول زنجیری ρ، و طول کل آن $\pi r/2$ است. ضریب اصطکاک بین زنجیر و سطح ربع دایره‌ای برابر μ است. عبارتی برای کشش T مورد نیاز برای حرکت اولیه به‌سمت بالا روی سطح قائم به‌دست آورید. (*راهنمایی:* با نوشتن معادلات تعادل جزء بسیارکوچکی از زنجیر، با ساده کردن، آن را به‌صورت $\frac{dT}{d\theta} + KT = f(\theta)$ درآورید. این یک معادلهٔ غیرهمگن خطی مرتبهٔ اول است که حل آن به‌شکل استاندارد زیر است

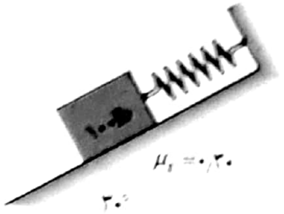
$$T = Ce^{-K\theta} + e^{-K\theta} \int e^{K\theta} f(\theta) d\theta$$

که در آن C و K مقدارشان ثابت است.)

Scanned by CamScanner

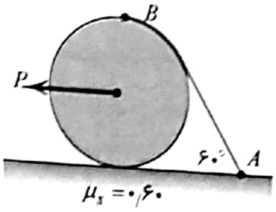
مسائل دوره‌ای

۱۲۱.۶ قطعه‌ای ۱۰۰ پوندی روی سطح شیبدار ۳۰° از حالت سکون رها می‌شود. ضریب اصطکاک استاتیکی بین قطعه و سطح شیبدار ۰٫۳۰ است. (الف) مقدار ماکزیمم و مینیمم کشش T در فنر را به‌گونه‌ای تعیین کنید که پس از رها کردن قطعه، لغزشی رخ ندهد. (ب) اگر $T = ۴۰\,lb$ باشد، نیروی اصطکاک F روی قطعه را بیابید.



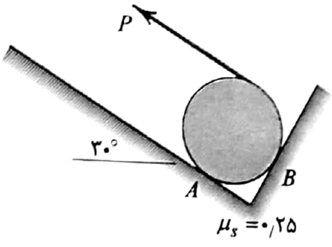
شکل م ۱۲۱.۶

۱۲۲.۶ استوانهٔ مدور به‌وزن ۵۰lb با طناب در نقطهٔ B و به زمین در نقطهٔ A ثابت نگه داشته شده است. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی ۰٫۶۰ باشد، نیروی P لازم برای لغزیدن استوانه را محاسبه کنید.



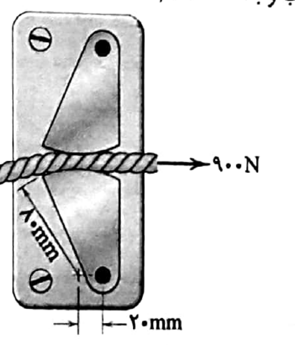
شکل م ۱۲۲.۶

۱۲۳.۶ دیسک همگنی به جرم m روی سطوح تکیه‌گاهی قائم‌الزاویه مطابق شکل قرار دارد. کشش طناب P به‌تدریج از صفر افزایش می‌یابد. اگر اصطکاک در هر دو نقطه A و B برابر $\mu_s = ۰٫۲۵$ باشد، نخست چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ آیا دیسک همگن سر جای خود می‌لغزد، یا شروع به غلتش به‌طرف بالا می‌کند؟ مقدار P را برای جایی‌که این اولین حرکت رخ می‌دهد محاسبه کنید.



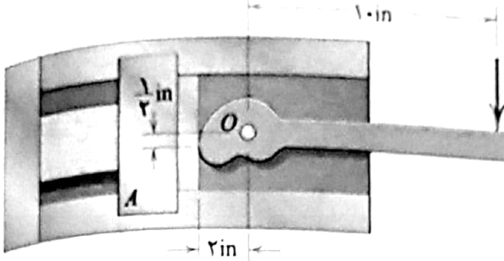
شکل م ۱۲۳.۶

۱۲۴.۶ شکل گوه‌ای را نشان می‌دهد که در آن نیروهای بزرگ اصطکاکی برای جلوگیری از لغزیدن طناب به‌واسطهٔ بادامک‌ها تولید می‌شود. نیروی R را که هر بادامک تحت نیروی کشش ۹۰۰N تحمل می‌کند معین کنید. ضریب اصطکاک استاتیکی بین طناب و بادامک‌ها ۰٫۸۰ است.



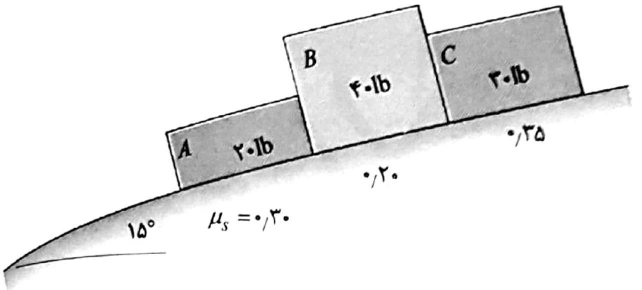
شکل م ۱۲۴.۶

۱۲۵.۶ گیره قفل بادامکی نشان‌داده‌شده به‌کمک ضریب اصطکاک ۰٫۳۰ بین بادامک و فک متحرک A عملکرد گیرنشی سریع مثبتی دارد. (الف) وقتی بادامک و اهرم در حال چرخیدن در جهت ساعتگرد هستند، دستیابی به وضعیت قفل کردن با اعمال نیروی $P = ۲۰\,lb$ آشکار می‌شود. نیروی در بر گیرندهٔ C را معین کنید. (ب) با حذف P، نیروی اصطکاک F در وضع قفل کردن را تعیین کنید. (ج) نیروی P' را محاسبه نیروی P لازم برای آزاد کردن بادامک محاسبه کنید.



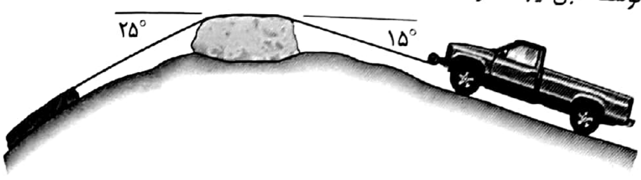
شکل م ۱۲۵.۶

۱۲۶.۶ سه جعبه که روی سطح شیبدار و در تماس با یکدیگرند از حالت سکون آزاد می‌شوند. ضریب اصطکاک استاتیکی زیر جعبه‌های A، B و C به‌ترتیب برابر ۰٫۳۰، ۰٫۲۰ و ۰٫۳۵ می‌باشد. شرح دهید چه اتفاقی رخ می‌دهد.



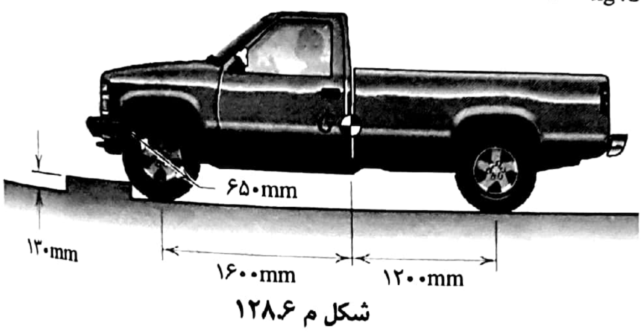
شکل م ۱۲۶.۶

۱۲۷.۶ الوار ۵۰۰ کیلوگرمی به‌طور پیوسته توسط کابل متصل به پیچ و در مسیر مستقیم به‌سمت بالای سطح شیبدار کشیده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین الوار و سطح شیبدار ۰٫۸۰، و بین کوپل و تخته‌سنگ ۰٫۵۰ باشد، کشش T را که باید توسط کابل ایجاد شود، تعیین کنید.



شکل م ۱۲۷.۶

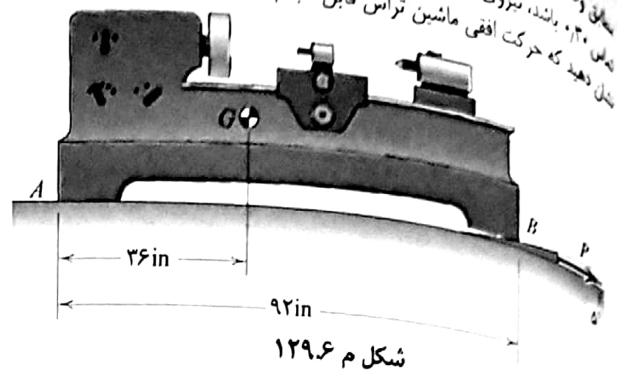
۱۲۸.۶ گشتاور پیچشی M انتقال‌یافته از موتور وانت نشان‌داده‌شده به محور عقب را طوری تعیین کنید که چرخ‌های جلو بدون لغزش چرخ‌های عقب از حالت سکون روی جدول بغلتند. اگر چرخ‌های عقب نلغزند، حداقل ضریب اصطکاک مؤثر در چرخ‌های عقب را که از لغزیدن آنها جلوگیری می‌کند، معین کنید. جرم بار کامیون با مرکز جرم G، ۱۹۰۰kg است.



شکل م ۱۲۸.۶

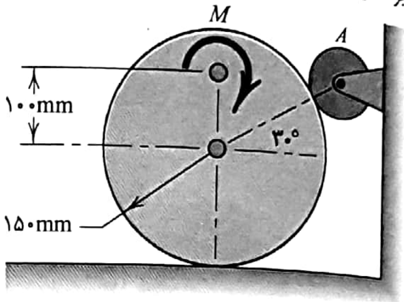
Scanned by CamScanner

۱۲۹.۶ ماشین تراش ۴۶۰۰ پوندی با مرکز جرم نقطهٔ G به‌کمک گوهٔ فولادی 5° ... وضعیت نشان‌داده‌شده قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک برای تمام سطوح اصطکاکی ۰٫۳۰ باشد، نیروی افقی P لازم برای بیرون کشیدن گوه را معین کنید. همچنین نشان دهید که حرکت افقی ماشین تراش قابل انجام است.



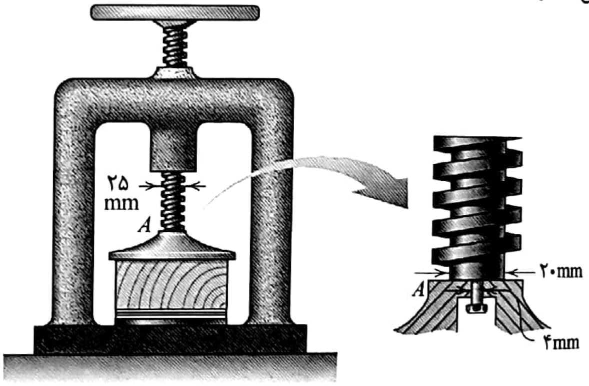
شکل م ۱۲۹.۶

۱۳۰.۶ استوانهٔ ۲۵ کیلوگرمی متکی به غلتک A که برای دوران آزاد است، تحت اثر کوپل M واردشده قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی و جنبشی به‌ترتیب ۰٫۵۰ و ۰٫۴۰ باشد درصورتی که (الف) $M = ۲۰N\cdot m$ و (ب) $M = ۴۰N\cdot m$ باشد، نیروی اصطکاک F وارد بر استوانه را محاسبه کنید.



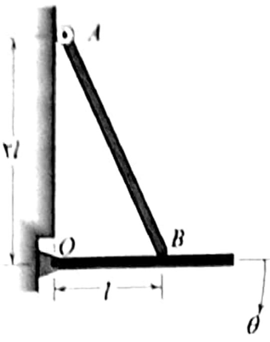
شکل م ۱۳۰.۶

۱۳۱.۶ پیچ یک پرس کوچک دارای قطر میانگین ۲۵mm و رزوهٔ مربعی با پیشروی ۸mm است. یاتاقان محوری تخت A در نمای بزرگ نشان داده شده است و سطوح آن به‌خوبی ساییده شده‌اند. اگر ضریب اصطکاک برای یاتاقان A و نیز برای رزوه‌ها ۰٫۲۵ باشد، گشتاور M طراحی شده را به‌گونه‌ای حساب کنید که (الف) نیروی فشاری ۴ کیلونیوتنی به‌وجود آورد و (ب) پرس را در فشار ۴kN باز کند.



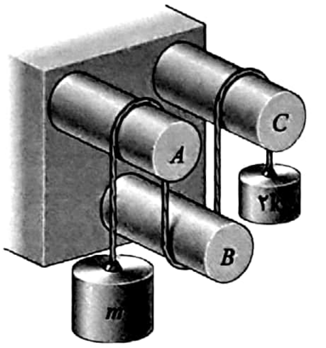
شکل م ۱۳۱.۶

۱۳۲.۶ غلتک کوچک انتهای بالایی میلهٔ یکنواخت و باریکی در نقطهٔ A روی سطح قائم ساکن است، درحالی‌که انتهای گرد B روی سطحی قرار دارد که از موقعیت افقی نشان‌داده‌شده به‌آرامی به‌طرف پایین خم می‌شود. اگر میله در $\theta = ۲۵^\circ$ شروع به لغزیدن کند، ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s را بین میله و سطح صاف پایین تعیین کنید. از اصطکاک غلتک‌ها و ضخامت کم صفحه صرف‌نظر کنید.



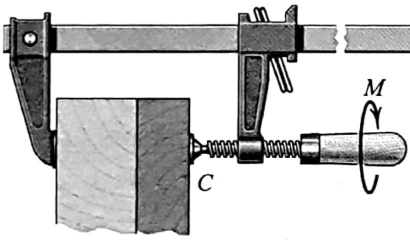
شکل م ۱۳۲.۶

۱۳۳.۶ بازهٔ جرم m روی سیستم را هنگامی‌که در تعادل است معین کنید؛ (الف) اگر ضریب اصطکاک در هر سه میل‌گردان ثابت ۰٫۲۰ باشد و (ب) اگر ضریب اصطکاک استاتیکی در میل‌گردان ثابت B تا ۰٫۵۰ افزایش یابد.



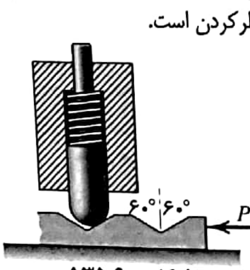
شکل م ۱۳۳.۶

۱۳۴.۶ برای چسباندن تخته‌ها از چسبی بین آنها استفاده کرده و آن را در گیره‌ای مطابق شکل قرار می‌دهند. کوپل M وارد بر دسته را برای ایجاد ۸۰lb فشار برای چسبندگی محاسبه کنید. قطر پیچ تک‌رزوه $\frac{۳}{۸}$in و دارای ۱۲ رزوه در هر اینچ است. ضریب اصطکاک مؤثر ۰٫۲۰است. از هرگونه اصطکاکی در محور تماس نقطهٔ C صرف‌نظر کنید. گشتاور M' لازم برای بازکردن دهانهٔ گیره چه اندازه است؟



شکل م ۱۳۴.۶

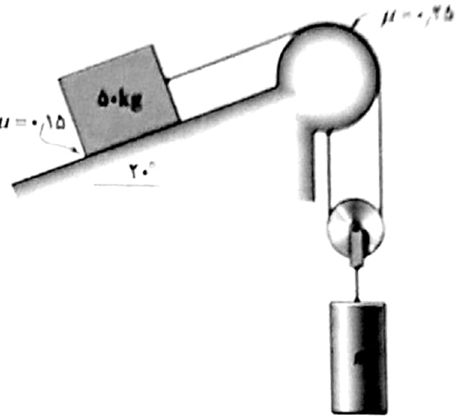
۱۳۵.۶ سازوکار نشان‌داده‌شده متشکل از پیستونی فنری با انتهای کروی است که برای تعیین مکان تسمهٔ افقی، با درگیرشدن در شیارهای فاصله‌دار، طراحی شده است. اگر فنر نیروی ۴۰N را در موقعیت نشان‌داده‌شده بر پیستون وارد کند و از طرف دیگر نیروی $P = ۶۰N$، برای حرکت تسمهٔ شیاردار در مقابل پیستون لازم باشد، ضریب اصطکاک بین پیستون و تسمهٔ شیاردار را محاسبه کنید. در آزمون قبلی معلوم شد که ضریب اصطکاک بین میلهٔ سبک و سطح افقی ۰٫۳۰ است. فرض کنید پیستون به‌خوبی روغن‌کاری شده و دقیقاً جفت شده است، بنابراین اصطکاک آن با سطح هدایت‌کننده قابل صرف‌نظرکردن است.



شکل م ۱۳۵.۶

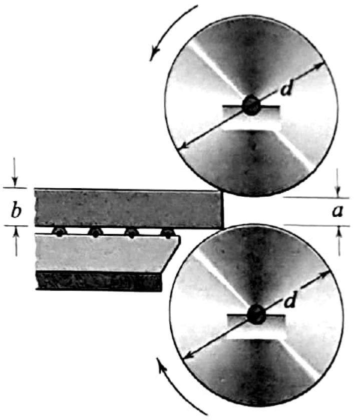
Scanned by CamScanner

۱۳۶.۶ بازهٔ جرم استوانهٔ m را برای اینکه سیستم در تعادل باشد معین کنید. ضریب اصطکاک بین قطعهٔ ۵۰ کیلوگرمی و سطح شیبدار ۰٫۱۵ و بین طناب و تکیه‌گاه استوانه‌ای نگهدارنده ۰٫۲۵ است.



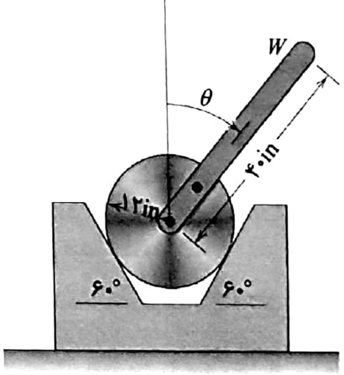
شکل م ۱۳۶.۶

۱۳۷.۶ در شکل، اجزای تشکیل‌دهندهٔ یک دستگاه نورد نشان داده شده است. برای طراحی فاصلهٔ بین غلتک‌ها، حداکثر ضخامت تختال‌ها را طوری تعیین کنید که با فرض ضریب اصطکاک جنبشی μ_k، تختال تنها به‌کمک اصطکاک در فضای بین غلتک‌ها قرار گیرد. فرض کنید $(b-a)$ نسبت به d کوچک باشد.



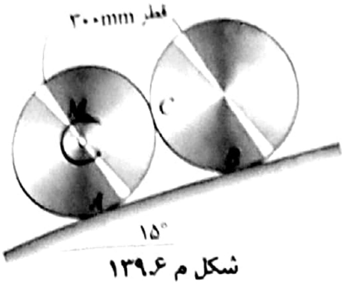
شکل م ۱۳۷.۶

۱۳۸.۶ استوانه‌ای به‌وزن ۸۰lb به میلهٔ بلندی با وزن نامعلوم W متصل شده است. این دستگاه برای مقادیر زاویهٔ θ تا ۴۵° در وضعیت تعادل قرار دارد، ولی اگر θ از ۴۵° افزایش یابد می‌لغزد. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی مقداری معلوم برابر ۰٫۳۰ باشد، وزن W را محاسبه کنید.



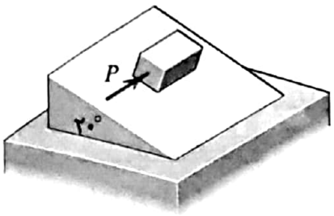
شکل م ۱۳۸.۶

۱۳۹.۶ کوپل M وارد بر استوانهٔ پایین را به‌گونه‌ای محاسبه کنید که موجب غلتش آرام استوانه‌های ۲۰ کیلوگرمی، به‌سمت پایین سطح شیبدار شود. اگر ضریب اصطکاک همهٔ سطوح تماس برابر $\mu_s = ۰٫۶۰$ و $\mu_k = ۰٫۵۰$ باشد، کوپل M را محاسبه کنید.



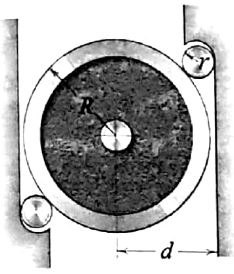
شکل م ۱۳۹.۶

۱۴۰.۶ قطعهٔ ۸ کیلوگرمی روی سطح شیبدار ۲۰° با ضریب اصطکاک استاتیکی $\mu_s = ۰٫۵۰$ در حال سکون قرار دارد. حداقل نیروی P را که باعث لغزیدن قطعه می‌شود معین کنید.



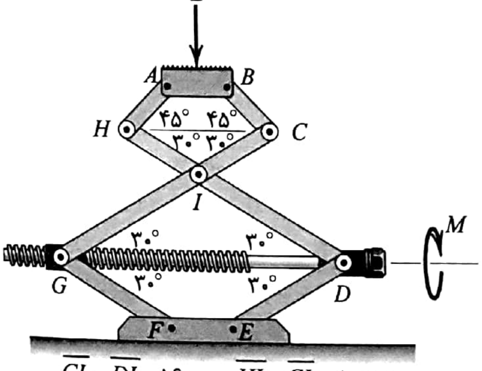
شکل م ۱۴۰.۶

۱۴۱.۶ وسیلهٔ نشان‌داده‌شده برای جلوگیری از چرخش ساعتگرد در صفحهٔ افقی چرخ مرکزی از طریق قفل‌شدن اصطکاکی دو غلتک کوچکتر طراحی شده است. برای مقادیر معلوم R و r ضریب اصطکاک مشترک μ را در همهٔ سطوح تماس تعیین کنید بازهٔ مقادیر d را برای اینکه به کار ادامه دهد بیابید.



شکل م ۱۴۱.۶

۱۴۲.۶ می‌خواهیم جک آکاردئونی نشان‌داده‌شده را با پیچ رزوهٔ مربعی منفرد درگیر در طوق رزوه‌شدهٔ G طراحی کنیم که در یاتاقان محوری ساچمه‌ای نقطهٔ D می‌چرخد. قطر میانگین پیچ ۱۰mm و پیشروی آن در یک دور کامل ۳mm است. با ضریب اصطکاک ۰٫۲۰ برای دنده‌های گریس‌خورده؛ (الف) گشتاور M لازم بر پیچ را برای بلندکردن بار ۱۰۰۰kg در وضعیت نشان‌داده‌شده محاسبه کنید و (ب) گشتاور M لازم را برای پایین‌آوردن بار از وضعیت مورد بحث معین کنید. فرض کنید که سطح اتکای AB و خط DG تحت تأثیر بار، افقی باقی می‌ماند. از اصطکاک یاتاقان D صرف‌نظر کنید.

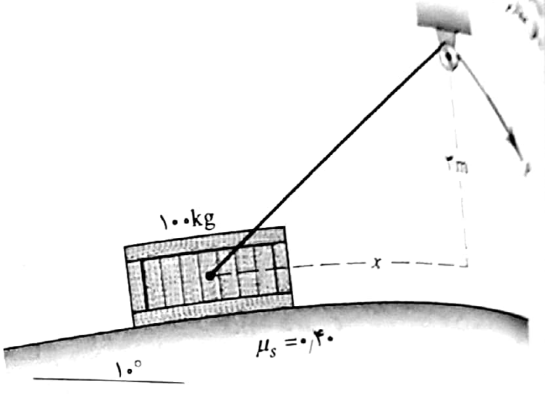


$\overline{GI} = \overline{DI} = ۱۶۰\text{mm}, \overline{HI} = \overline{CI} = ۸۰\text{mm}$

شکل م ۱۴۲.۶

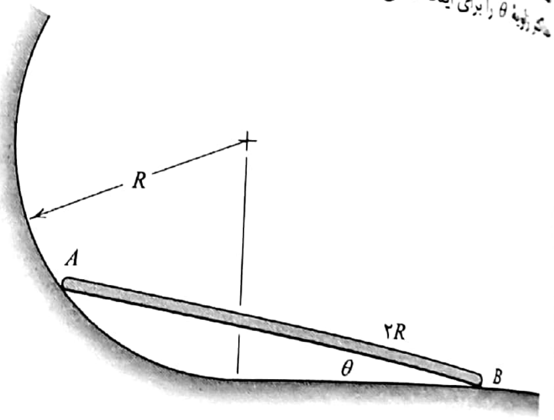
Scanned by CamScanner

... برای شروع حرکت صندوق ۱۰۰ کیلوگرمی به بالای سطح ... برای مقادیر مختلف x از صفر تا ۱۰m رسم کنید. ... و مقادیر متناظر آن x را معین کنید.



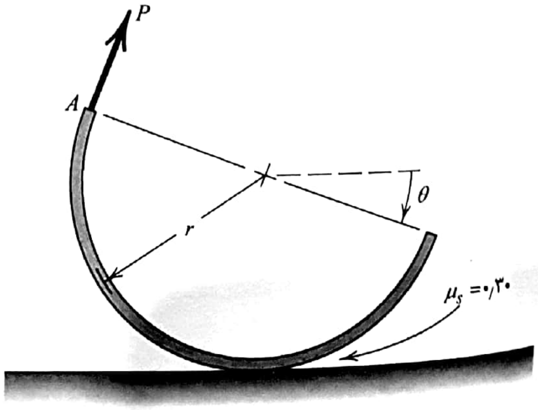
شکل م ۶.۱۴۳

۶.۱۴۴ میلهٔ یکنواخت مسئلهٔ ۶.۴۱ را، با این تفاوت که در اینجا غلتک B برداشته شده ... در نظر بگیرید. ضریب اصطکاک استاتیکی در A، ۰/۷۰ و در B برابر ۰/۵۰ است. مقدار ... زاویهٔ θ را برای اینکه تعادل امکان‌پذیر شود تعیین کنید.



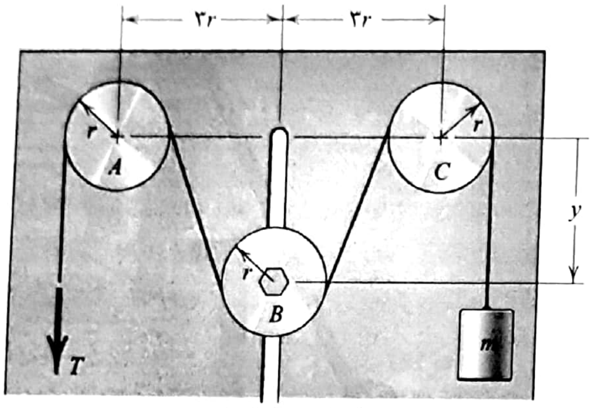
شکل م ۶.۱۴۴

۶.۱۴۵ پوستهٔ نیم‌استوانه‌ای به‌جرم m و شعاع r تحت تأثیر نیروی P مماس بر محیط آن در نقطهٔ A، مطابق شکل با زاویهٔ θ غلتش می‌کند. اگر P به‌تدریج افزایش یابد زاویهٔ شیب θ را برحسب تابعی از P تا رسیدن به نقطهٔ لغزش رسم کرده، θ_{max} و مقدار نظیر P_{max} را برای اینکه لغزیدن رخ دهد تعیین کنید. ضریب اصطکاک استاتیکی ۰/۳۰ است.



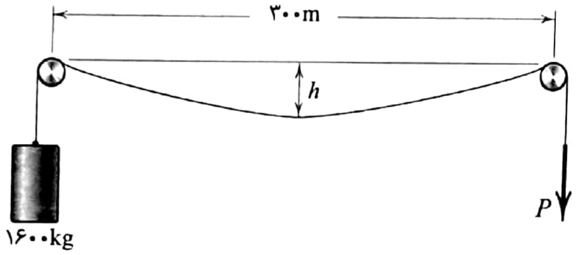
شکل م ۶.۱۴۵

۶.۱۴۶° دو میل‌گردان A و C ثابت‌اند، درحالی‌که میل‌گردان B می‌تواند نسبت به شکاف قائم تغییر کند و با میخ قفل شود. ضریب اصطکاک جنبشی در A و C برابر ۰/۶۰، و در B برابر ۰/۲۰ است. نسبت مقدار T/mg را برحسب تابعی از y برای $0 \leq y \leq 10r$ رسم کنید، که در آن T کشش لازم برای بالا بردن استوانه به جرم m به‌میزان منظم و r شعاع مشترک در همهٔ میل‌گردان‌هاست. همهٔ میل‌گردان‌ها در برابر چرخش ثابت‌اند. مقدار حدی T/mg را برای $y=0$ و برای مقادیر بزرگ y چه اندازه است؟



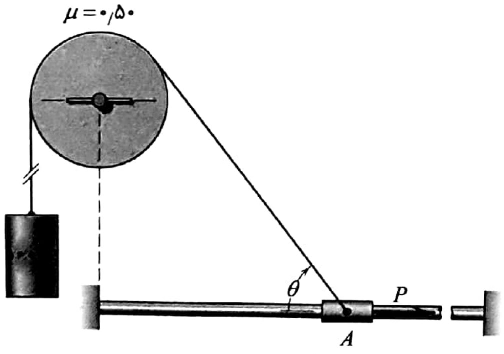
شکل م ۶.۱۴۶

۶.۱۴۷° کابل سنگینی که جرم هر متر آن ۱۲kg است، از روی دو لولهٔ ثابت هم‌سطح با فاصلهٔ ۳۰۰m از یکدیگر می‌گذرد. از یک انتهای تکیه‌گاه، استوانهٔ ۱۶۰۰ کیلوگرمی آویزان شده است. آزمون نشان داده که برای ایجاد لغزش کابل روی هر دو لوله با سرعت ثابت، نیروی رو به پایین $P = ۶۰kN$ لازم است. ضریب اصطکاک جنبشی μ_k بین کابل و لوله را تعیین کنید. ماکزیمم کشش T در کابل بین لوله‌ها و شکم‌دادگی h را در کابل تعیین کنید.



شکل م ۶.۱۴۷

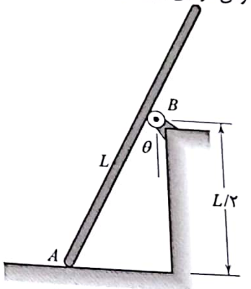
۶.۱۴۸° بار ۱۰۰kg توسط کابلی که روی استوانه‌ای ثابت با ضریب اصطکاک ۰/۵۰ می‌لغزد، بالا کشیده می‌شود. کابل که به لغزندهٔ A محکم شده است به‌طور آهسته روی میلهٔ راهنمای افقی صاف توسط نیروی P کشیده می‌شود. P را بر حسب تابعی از θ، از $\theta = ۹۰°$ تا $\theta = ۱۰°$ رسم کرده و ماکزیمم مقدار نظیر زاویهٔ θ را تعیین کنید. مقدار جواب ترسیمی P_{max} را به‌طور تحلیلی وارسی کنید.



شکل م ۶.۱۴۸

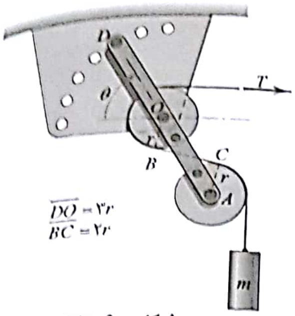
Scanned by CamScanner

۶.۱۴۹• دیرک باریک و یکنواختی روی غلتک کوچکی در B تکیه دارد. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s به‌قدر کافی بزرگ باشد، انتهای A روی سطح افقی نخواهد لغزید. (الف) حداقل مقدار لازم μ_s را برای پیشگیری از لغزش به‌ازای هر مقدار θ در بازهٔ $\theta=0$ تا $\theta=60^\circ$ تعیین کرده و نمودار μ_s برحسب θ را رسم نمایید. با توجه به نتایج حاصل و با فرض $\mu_s=0/40$، بازه‌ای از مقادیر θ را تعیین کنید که در آن بازه، دیرک ناپایدار است. (ب) در چه زاویهٔ θ دیرک در ناپایدارترین حالت قرار دارد، و کمترین ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s مورد نیاز برای جلوگیری از لغزش در این زاویه چقدر است؟



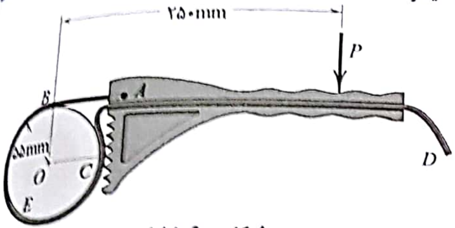
شکل م ۶.۱۴۹

۶.۱۵۰• وسیلهٔ نشان‌داده‌شده برای تنظیم نیروی کششی افقی T کابل طراحی شده است. کابل با عبور از دور چرخ ثابت، پایین آمدن جرم m را ممکن می‌سازد. اگر ضریب اصطکاک بین کابل و سطح چرخ‌ها ۰/۴۰ باشد، نسبت T/mg را به‌صورت تابعی از θ در بازهٔ $0<\theta<90^\circ$ به‌دست آورده و آن را رسم کنید. همچنین مقدار نیروی برشی V در پین تنظیم‌کنندهٔ D را برحسب mg برای زاویهٔ $\theta=60^\circ$ بیابید.



شکل م ۶.۱۵۰

۶.۱۵۱• ابزار تسمه‌ای نشان‌داده‌شده برای شُل و سفت‌کردن وسایل ... فیلتر آب خانگی، E، به‌کار می‌رود. فرض کنید که دندانه‌های این ابزار ... نقطهٔ C از تسمه نمی‌لغزد و تسمه از نقطهٔ C تا انتهای D آن بدون ... است. حداقل ضریب اصطکاک استاتیکی μ را طوری تعیین کنید که تسمه نسبت به فیلتر ثابت نلغزد.



شکل م ۶.۱۵۱

۷

...ر مجازی

۱.۷ مقدمه
۲.۷ کار
۳.۷ ...تعادل
۴.۷ انرژی پتانسیل و پایداری
۵.۷ مروری بر فصل

۱.۷ مقدمه

...در فصل‌های گذشته تعادل یک جسم را با جداکردن آن به‌وسیلهٔ نمودار جسم آزاد، و ... معادلاتی که بیانگر صفر بودن مجموع نیروها و جمع گشتاورهاست، ... کردیم. معمولاً زمانی از این روش استفاده می‌شود که وضعیت تعادل ... مشخص یا معلوم باشد، اما وقتی یک یا چند نیروی خارجی مجهول ... باید آنها را تعیین کرد.

... مسائل دیگری وجود دارند که در آنها جسم از اعضای متصل‌به‌هم تشکیل ... که این اعضا می‌توانند نسبت به یکدیگر حرکت کنند. بنابراین ... وضعیت‌های تعادل مختلفی امکان‌پذیر است که باید مورد آزمون قرارگیرد. برای ... نوع مسائل، اگرچه معادلات تعادل نیروها و گشتاورها معتبر و کافی‌اند، اما ... لزوماً بهترین روش برای حل مسئله باشند.

... روش مبتنی بر مفهوم کار انجام شده توسط یک نیرو، روش سرراست‌تری است. ... همچنین این روش دید فیزیکی عمیق‌تری را در مورد رفتار سیستم‌های مکانیکی در ... اختیار می‌گذارد و این امکان را به ما می‌دهد که مسئلهٔ سیستم‌های در حال تعادل را نیز ... بررسی کنیم. این روش، *روش کار مجازی* نامیده می‌شود.

۲.۷ کار

... باید کار را برحسب کمیت و جهت آن، در تقابل با کاربرد غیرفنی متداولش، ... تعریف کنیم.

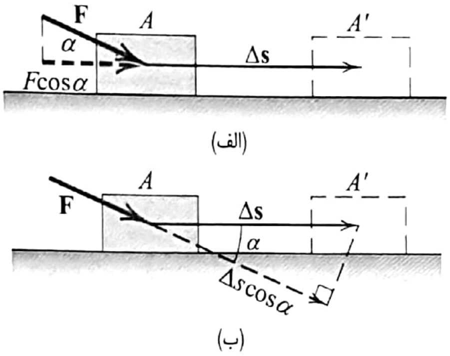
کار یک نیرو

... نیروی ثابت $\mathbf{F}$ نشان‌داده‌شده در شکل ۱.۷ (الف) را که بر یک جسم وارد می‌شود در ... می‌گیریم. حرکت این نیرو در صفحه از A تا A' با بردار $\Delta\mathbf{s}$ نشان داده شده و آن ... را جابه‌جایی می‌نامیم. کار U انجام‌شده توسط نیروی $\mathbf{F}$ ضمن این جابه‌جایی ... برابر است با حاصلضرب مؤلفهٔ نیرو در امتداد این جابه‌جایی، یا

$$U=(F\cos\alpha)\Delta s$$

... از شکل ۱.۷ (ب) می‌بینیم که اگر مقدار نیرو را در مؤلفهٔ جابه‌جایی و در امتداد ... نیرو ضرب کنیم، نتیجهٔ حاصل یکسان است، در نتیجه

$$U=F(\Delta s\cos\alpha)$$



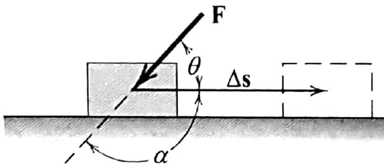
شکل ۱.۷

از آنجا که بدون توجه به جهت تجزیهٔ بردارها نتیجهٔ یکسانی به‌دست می‌آید، کار U یک *کمیت عددی* است.

وقتی جهت مؤلفهٔ نیرو با جهت جابه‌جایی یکسان باشد، کار مثبت است و وقتی جهت مؤلفهٔ نیروی کار با جهت جابه‌جایی مخالف باشد، مطابق شکل ۲.۷، کار انجام شده منفی است، پس

$$U=(F\cos\alpha)\Delta s=-(F\cos\theta)\Delta s$$

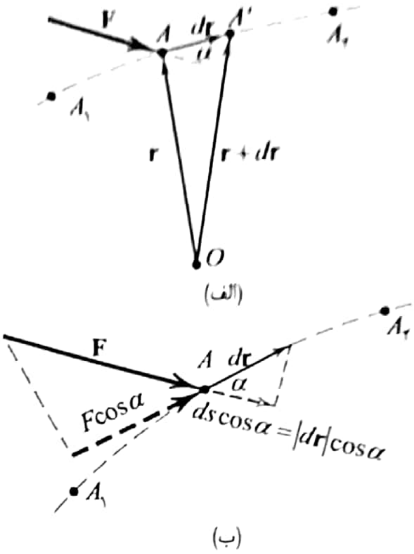
اکنون به‌طورکلی تعریف کار را در شرایطی که جهت جابه‌جایی و تعداد و جهت نیروی وارد بر جسم متغیر است، تعمیم می‌دهیم.



شکل ۲.۷

شکل ۳.۷ (الف) نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر یک جسم را در نقطهٔ A نشان می‌دهد که در مسیر نشان‌داده‌شده از A_1 به A_2 حرکت می‌کند. نقطهٔ A با بردار مکان $\mathbf{r}$، که از مبدأ دلخواه و مناسب O اندازه‌گیری می‌شود، مشخص شده است. همچنین جابه‌جایی بسیار کوچک از A تا A' با تغییر دیفرانسیلی بردار

Scanned by CamScanner



شکل ۳.۷

مکان $d\mathbf{r}$، بیان می‌شود. کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F}$ حین جابه‌جایی $d\mathbf{r}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{۱.۷}$$

اگر F نشان‌دهندهٔ مقدار نیروی $\mathbf{F}$ و ds نشان‌دهندهٔ مقدار اختلاف جابه‌جایی $d\mathbf{r}$ باشد، به‌کمک تعریف ضرب نقطه‌ای می‌توان نوشت

$$dU = F\, ds \cos\alpha$$

می‌توان دوباره این عبارت را به‌عنوان مؤلفهٔ نیروی $F\cos\alpha$ در جهت جابه‌جایی ضربدر جابه‌جایی تفسیر کرد، یا مطابق شکل ۳.۷ (ب)، به‌عنوان مؤلفهٔ جابه‌جایی $ds\cos\alpha$ در امتداد نیرو ضربدر نیرو بیان نمود. اگر $\mathbf{F}$ و $d\mathbf{r}$ را برحسب مؤلفه‌های متعامد بیان کنیم، داریم

$$\begin{aligned} dU &= (\mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z) \cdot (\mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz) \\ &= F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \end{aligned}$$

برای تعیین کار کل U انجام‌شده توسط $\mathbf{F}$ در طول یک حرکت معین نقطهٔ A از A_1 تا A_2 مطابق شکل ۳.۷ (الف)، از dU بین این دو نقطه انتگرال می‌گیریم. بنابراین

$$U = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz)$$

یا

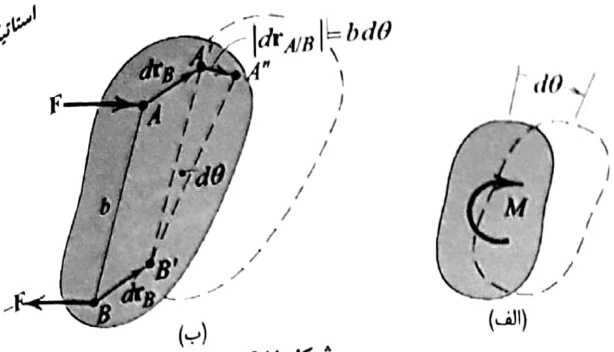
$$U = \int F \cos\alpha\, ds$$

برای به‌دست آوردن مقدار انتگرال باید رابطهٔ میان مؤلفه‌های نیرو و مختصات نظیر آنها و یا رابطهٔ بین F و s و بین $\cos\alpha$ و s را بدانیم.

در حالتی‌که چند نیروی همرس بر نقطهٔ دلخواهی از یک جسم اعمال می‌شوند، کار انجام‌شده توسط برایند این نیروها برابر با کل کار انجام‌شده توسط تک‌تک نیروهاست. منشأ این نتیجه‌گیری این است که مؤلفهٔ برایند نیروها در امتداد جابه‌جایی، مساوی با مجموع مؤلفه‌های تک‌تک نیروها در همان جهت است.

کار یک کوپل

علاوه بر کار انجام‌شده توسط نیرو، کوپل‌ها نیز می‌توانند کار انجام دهند. در شکل ۴.۷ (الف) کوپل M دیده می‌شود که بر جسمی وارد شده و موقعیت زاویه‌ای آن را به‌میزان $d\theta$ تغییر می‌دهد. با ترکیب کار انجام‌شده توسط دو نیروی



شکل ۴.۷

تشکیل‌دهندهٔ کوپل، به‌سادگی می‌توان کار انجام‌شده توسط کوپل را به‌دست آورد. در شکل ۴.۷ (ب) کوپل مورد نظر را با دو نیروی مساوی و در جهت‌های مخالف هم $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ وارد بر نقطهٔ دلخواه A و B نشان داده‌ایم، به‌طوری‌که $F = M/b$. طی یک حرکت بسیار کوچک در صفحه، شکل خط AB به $A''B'$ تغییر مکان می‌دهد. اکنون جابه‌جایی نقطهٔ A را در دو مرحله در نظر می‌گیریم. نخست، جابه‌جایی $d\mathbf{r}_B$ برابر با تغییر مکان B، و دوم جابه‌جایی $d\mathbf{r}_{A/B}$ (چنین خوانده می‌شود: جابه‌جایی A نسبت به B) حاصل از چرخش حول نقطهٔ B. پس کار انجام شده در طول جابه‌جایی از A تا A' توسط $\mathbf{F}$، برابر با کار انجام‌شده توسط $-\mathbf{F}$ طی جابه‌جایی یکسان از B به B' است ولی در جهت مخالف. بنابراین نتیجه می‌گیریم که، کاری توسط کوپل در حین حرکت انتقالی (حرکت بدون چرخش) انجام نگرفته است.

اما ضمن دوران، نیروی $\mathbf{F}$ کاری برابر با $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_{A/B} = Fb\, d\theta$ انجام می‌دهد که در آن $dr_{A/B} = b\, d\theta$ است و $d\theta$ زاویهٔ بی‌نهایت کوچک برحسب رادیان است. از آنجا که $M = Fb$ است، داریم

$$dU = M d\theta \tag{۲.۷}$$

کار انجام‌شده توسط کوپل مثبت است، اگر جهت M با جهت $d\theta$ یکسان باشد (جهت ساعتگرد شکل) و هرگاه M در جهت مخالف با آن چرخش باشد، منفی است. کار کل یک کوپل در طول چرخش معین در صفحه‌اش چنین می‌شود

$$U = \int M d\theta$$

ابعاد کار

بُعد کار (نیرو × فاصله) است. یکای کار در دستگاه SI ژول (J) است. یک ژول برابر است با کار یک نیوتن نیرو در فاصلهٔ یک متر که در جهت نیرو انجام می‌دهد ($\text{J} = \text{N} \cdot \text{m}$). در دستگاه U.S. یکای کار ($\text{ft} \cdot \text{lb}$) است، که کار انجام‌شده توسط یک پوند نیرو در حین حرکت به مسافت یک فوت و در جهت نیرو می‌باشد.

ابعاد کار و گشتاور یک نیرو نیز یکسان است اما کمیت‌های فیزیکی کاملاً متفاوتی دارند. توجه کنید که کار یک کمیت *عددی* است و آن را توسط حاصلضرب نقطه‌ای نشان می‌دهند و شامل حاصلضرب یک نیرو در یک فاصله است، که هر دو در امتداد یک خط اندازه‌گیری شده‌اند. از طرف دیگر گشتاور یک کمیت *برداری* است و از حاصلضرب خارجی به‌دست می‌آید و شامل حاصلضرب نیرو در مسافتی است که در امتداد عمود بر نیرو قرار دارد. وجه تمایز این دو کمیت وقتی یکاهای آنها را در دستگاه یکاهای SI می‌نویسیم، برای کار، ژول (J) و برای گشتاور نیوتن ـ متر ($\text{N} \cdot \text{m}$) را به‌کار می‌بریم. در دستگاه U.S. استفاده از فوت ـ پوند ($\text{ft} \cdot \text{lb}$) برای کار و پوند ـ فوت ($\text{lb} \cdot \text{ft}$) برای گشتاور معمول است.

Scanned by CamScanner

... مجازی را به وضعیت تعادل استاتیکی آن با نیروهای وارد بر آن مشخص ... در نظر می‌گیریم. هر جابه‌جایی فرضی و دلخواه کوچک $\delta\mathbf{r}$ را که در ... از وضعیت طبیعی و سازگار با قیدهای سیستم انجام شود، ... مجازی می‌نامند. واژهٔ مجازی بدین معنی است که ذره در واقع تغییر ... بلکه تغییر مکان آن خیالی و تصوری است، تا بتوان وضعیت‌های ... ممکن را با هم مقایسه و وضعیت واقعی را تعیین کرد.

... انجام‌شده توسط نیروی $\mathbf{F}$ بر روی یک ذره در تغییر مکان مجازی $\delta\mathbf{r}$ ... مجازی می‌نامند، که در رابطهٔ زیر بیان می‌شود

$$\delta U = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} \quad \text{یا} \quad \delta U = F\,\delta s\cos\alpha$$

... α زاویهٔ بین $\mathbf{F}$ و $\delta\mathbf{r}$، δs اندازهٔ $\delta\mathbf{r}$ است. تفاوت بین $d\mathbf{r}$ و $\delta\mathbf{r}$ این ... $d\mathbf{r}$ تغییر مکان بی‌نهایت کوچک واقعی است و از آن می‌توان انتگرال ... $\delta\mathbf{r}$ تغییر مکان بی‌نهایت کوچک مجازی است که قابل انتگرال‌گیری ... توجه کنید که $d\mathbf{r}$ و $\delta\mathbf{r}$ هر دو کمیت‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ اول‌اند.

... تغییر مکان مجازی می‌تواند دوران $\delta\theta$ یک جسم باشد. بر طبق معادلهٔ ... کار مجازی انجام‌شده توسط کوپل M در طول تغییر مکان زاویه‌ای ... $\delta\theta$ برابر است با $\delta U = M\,\delta\theta$.

... نیروی $\mathbf{F}$ یا تغییر مکان مجازی بی‌نهایت کوچک را می‌توان ثابت در ... نظر گرفت. اگر ضمن حرکت بی‌نهایت کوچک، $\mathbf{F}$ و M تغییری داشته باشند، ... جملات مرتبهٔ بالاتری ظاهر می‌شوند که در حد از بین می‌روند. این مطلب از ... نظر ریاضی مثل آن است که از ضرب $dx\,dy$ در حین نوشتن $dA = y\,dx$ برای جزء مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ صرف‌نظر کنیم.

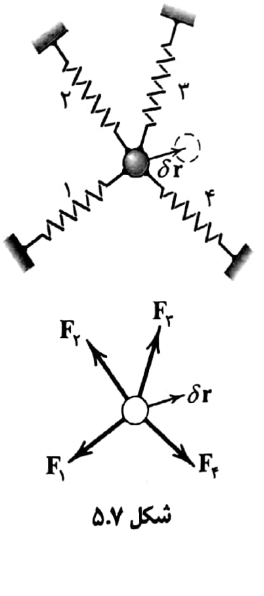
۲.۷ تعادل

... شرایط تعادل را برای کار مجازی بیان می‌کنیم؛ ابتدا برای یک ذره، سپس برای یک جسم منفرد و بعد برای یک سیستم اجسام صلب متصل‌به‌هم.

تعادل یک ذره

ذره یا جسم کوچکی را مطابق شکل ۵.۷ که تحت اثر نیروهای واردشده از فنرها بر آن، در تعادل است در نظر می‌گیریم. اگر جرم ذره قابل ملاحظه باشد، وزن mg آن نیز مانند یک نیرو خواهد بود. به‌ازای جابه‌جایی مجازی $\delta\mathbf{r}$ ذره از وضع تعادل، کار کل مجازی یک ذره چنین خواهد بود

$$\delta U = \mathbf{F}_1\cdot\delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2\cdot\delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_3\cdot\delta\mathbf{r} + \ldots = \Sigma\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}$$



شکل ۵.۷

اکنون $\Sigma\mathbf{F}$ را برحسب مؤلفه‌های عددی و $\delta\mathbf{r}$ را نیز برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی مجازی در جهت‌های مختصات به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\delta U = \Sigma\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} = (\mathbf{i}\Sigma F_x + \mathbf{j}\Sigma F_y + \mathbf{k}\Sigma F_z)\cdot(\mathbf{i}\,\delta x + \mathbf{j}\,\delta y + \mathbf{k}\,\delta z)$$
$$= \Sigma F_x\,\delta x + \Sigma F_y\,\delta y + \Sigma F_z\,\delta z = 0$$

چون $\Sigma\mathbf{F} = 0$ است، پس مجموع رابطهٔ بالا صفر است که نتیجه می‌دهد $\Sigma F_x = 0$، $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma F_z = 0$. بنابراین $\delta U = 0$، بیان دیگری از شرایط تعادل برای یک ذره است. شرط صفر بودن کار مجازی برای تعادل هم لازم است و هم کافی، زیرا کاربرد مجزای آن در هر یک از سه جهت عمود برهم، معادل همان سه شرط عددی شناخته شدهٔ تعادل است.

اصل صفر بودن کار مجازی برای تعادل یک ذره معمولاً این مسئلهٔ ساده را آسان نمی‌کند، زیرا $\delta U = 0$ و $\Sigma\mathbf{F} = 0$ اطلاع یکسانی به ما می‌دهند. مفهوم کار مجازی برای یک ذره به این دلیل بیان شد که می‌توان آن را در مورد سیستم‌های ذراتی که پس از این بحث خواهد شد، استفاده کرد.

تعادل یک جسم صلب

می‌توان به‌سهولت اصل کار مجازی برای یک ذره را برای تعادل یک جسم صلب نیز تعمیم داد، زیرا یک جسم صلب را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از اجزای کوچک یا ذراتی که به‌صورت صلب به‌هم متصل هستند در نظرگرفت. از آنجا که کار مجازی انجام‌شده روی هریک از ذرات جسم در حال تعادل صفر است، نتیجه می‌شود که کار مجازی انجام‌شده روی تمام جسم صلب برابر صفر است. در محاسبهٔ $\delta U = 0$ برای کل جسم، تنها کار انجام‌شده توسط *نیروهای خارجی* را در نظر می‌گیریم، زیرا نیروهای داخلی به‌صورت زوج‌نیروهای هم‌اندازه و هم‌امتداد، و در خلاف جهت ظاهر می‌شوند و کار خالص انجام‌شده توسط آنها در حین هرگونه جابه‌جایی، برابر صفر است.

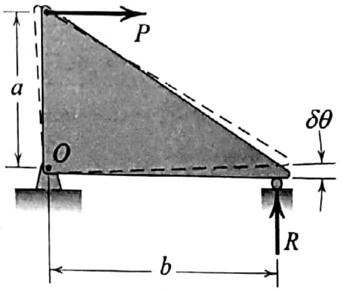
لازم به یادآوری است که کاربرد اصل مجازی برای یک ذره و یا برای یک جسم صلب مزیت خاصی نسبت به راه‌حل یک جسم صلب در حال تعادل ندارد. هرگونه تغییر مکان مجازی خطی یا زاویه‌ای در جملهٔ $\delta U = 0$ نیز وارد می‌شود و پس از حذف آنها همان عبارت‌هایی باقی می‌مانند که در صورت استفادهٔ مستقیم از یکی از معادله‌های نیرو و گشتاور به‌دست می‌آید.

به‌عنوان مثال، فرض کنید که می‌خواهید واکنش R در زیر غلتک را برای **ورق مفصل‌شده با وزن ناچیز تحت اثر نیروی معلوم P نشان داده شده در شکل ۶.۷، را تعیین کنیم. برای این منظور چرخش مجازی $\delta\theta$ حول مفصل O و سازگار با لولای مقیدشده در مفصل O را به‌عنوان جابه‌جایی مجازی در نظر بگیرید. کار انجام‌شده توسط نیروهای P و R در این چرخش مجازی** به‌ترتیب $-Pa\,\delta\theta$ و $+Rb\,\delta\theta$ است. بنابراین اصل $\delta U = 0$ نتیجه می‌دهد

$$-Pa\,\delta\theta + Rb\,\delta\theta = 0$$

با حذف $\delta\theta$ داریم

$$Pa - Rb = 0$$



شکل ۶.۷

Scanned by CamScanner

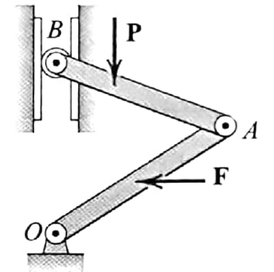
در این چرخش مجازی با صرف‌نظرکردن از وزن صفحه متوجه می‌شویم که معادلهٔ تعادل گشتاور نسبت به نقطهٔ O یک جسم صلب، همان معادلهٔ تعادل گشتاورها حول O است. بنابراین استفاده از اصل کار مجازی برای یک جسم صلب نتیجه‌ای به‌دست نمی‌دهد. اما چنانکه در همین فصل خواهیم دید استفاده از این اصل برای اجسام متصل به‌هم، مزایای غیرقابل انکاری دارد.

تعادل سیستم‌های ایده‌آل اجسام صلب

اکنون اصل کار مجازی را به تعادل مجموعه‌ای از اجسام صلب متصل‌به‌هم تعمیم می‌دهیم. در اینجا بحث ما محدود به *سیستم‌های ایده‌آل* خواهد بود. سیستم‌های ایده‌آل، سیستم‌هایی هستند که از دو یا چند عضو صلب، که توسط اتصالات مکانیکی به‌هم متصل شده‌اند، تشکیل شده است. این اتصالات نمی‌توانند از طریق کشیدگی یا فشردگی انرژی جذب کنند و اصطکاک در آنها آنقدر ناچیز است که می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

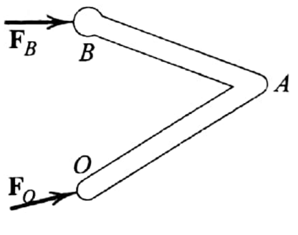
شکل ۷.۷ (الف) نمونهٔ ساده‌ای از یک سیستم ایده‌آل را نشان می‌دهد که در آن حرکت نسبی بین دو عضو امکان‌پذیر است و در حالت تعادل با نیروهای خارجی اعمال‌شدهٔ $\mathbf{P}$ و $\mathbf{F}$ مشخص می‌شود. برای چنین سیستم مکانیکی پیوسته‌ای سه نوع نیروی واردشده را شناسایی می‌کنیم، این نیروها عبارت‌اند از:

(۱) *نیروهای فعال*. نیروهای خارجی‌اند که می‌توانند در جابه‌جایی مجازی، کار مجازی انجام دهند. در شکل ۷.۷ (الف) نیروهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{F}$ نیروهای فعال هستند، زیرا وقتی اتصالات حرکت می‌کنند، این نیروها کار انجام می‌دهند.



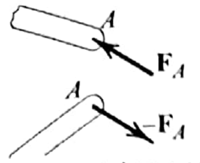
شکل ۷.۷ (الف) نیروهای فعال

(۲) *نیروهای واکنشی*. نیروهای خارجی‌اند که بر تکیه‌گاه‌های ثابت اثر می‌کنند و در این تکیه‌گاه‌ها در جهت نیروهای وارده، تغییر مکان مجازی رخ نمی‌دهد، پس نیروهای واکنش‌پذیر طی جابه‌جایی مجازی کاری انجام نمی‌دهند. در شکل ۷.۷ (ب) نیروی افقی $\mathbf{F}_B$ که به‌واسطهٔ شیار قائم راهنما بر غلتک انتهایی عضو وارد می‌شود نمی‌تواند کاری انجام دهد، زیرا غلتک نمی‌تواند جابه‌جایی افقی داشته باشد. نیروی واکنشی $\mathbf{F}_O$ که از تکیه‌گاه ثابت O بر سیستم وارد می‌شود، نیز کاری انجام نمی‌دهد زیرا این تکیه‌گاه نمی‌تواند حرکت کند.



شکل ۷.۷ (ب) نیروهای واکنشی

(۳) *نیروهای داخلی*. نیروهای موجود در محل اتصال عضوها را *نیروهای داخلی* می‌نامند. در حرکت‌های ممکن یک سیستم یا اجزای آن، *کار خالص انجام‌شده توسط نیروهای داخلی برابر با صفر است*، زیرا نیروهای داخلی به‌شکل زوج‌نیروهای برابر و مخالف ظاهر می‌شوند، مانند نیروهای داخلی $\mathbf{F}_A$ و $-\mathbf{F}_A$ در مفصل A که در شکل ۷.۷ (ج) نشان داده شده‌اند و در یک تغییر مکان همسان، کار یکی از نیروها کار نیروی دیگر را خنثی می‌کند.



شکل ۷.۷ (ج) نیروهای داخلی

اصل کار مجازی

با توجه به اینکه فقط نیروهای فعال خارجی در طی هر جابه‌جایی احتمالی سیستم کار انجام می‌دهند، می‌توانیم اصل کار مجازی را به‌صورت زیر بیان کنیم:

در یک سیستم ایده‌آل مکانیکی در حال تعادل، کار مجازی انجام‌شده توسط نیروهای فعال خارجی، در تمام تغییر مکان‌های مجازی سازگار با قیدهای سیستم، برابر صفر است.

منظور از قید، محدودیت‌هایی است که به‌وسیلهٔ تکیه‌گاه‌ها در مقابل حرکت اعضا تحمیل می‌شود. این اصل را به‌صورت ریاضی با معادلهٔ زیر بیان می‌کنیم

$$\delta U = 0 \qquad (۳.۷)$$

که در آن δU، کل کار مجازی را که تمام نیروهای فعال در حین یک تغییر مکان مجازی روی سیستم انجام می‌دهند نشان می‌دهد.

اکنون می‌توانیم مزیت‌های واقعی روش کار مجازی را ببینیم. این روش دو مزیت اساسی دارد. اول اینکه برای تعیین روابط بین نیروهای فعال لازم نیست اعضای سیستم‌های ایده‌آل را از یکدیگر جداکنیم و این درحالی است که در روش تعادل مبتنی بر جمع‌بندی نیروها و گشتاورها، این عمل را انجام می‌دهیم. دوم اینکه می‌توانیم روابط میان نیروهای فعال را به‌طور مستقیم و بدون مراجعه به نیروهای واکنش‌پذیر تعیین کنیم. این مزیت‌ها روش کار مجازی را به‌ویژه در تعیین موقعیت تعادل یک سیستم مکانیکی تحت بارهای معلوم، کارآمد می‌سازد. این نوع مسئله نقطهٔ مقابل مسئلهٔ تعیین نیروهای وارد بر جسمی است که حالت تعادل آن معلوم است.

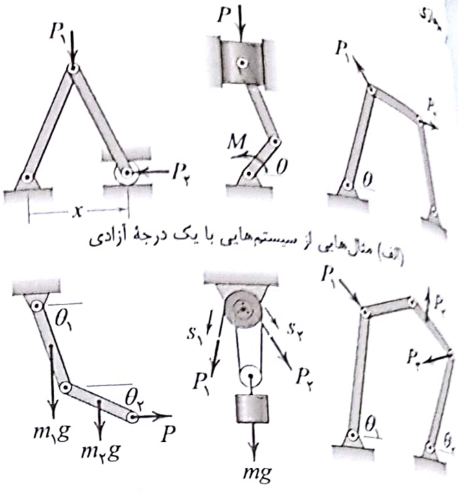
روش کار مجازی به‌خصوص برای اهداف بیان‌شده مفید می‌باشد اما لازم است که ضمن هرگونه تغییر مکان مجازی، نیروهای اصطکاک داخلی ناچیز باشد. در نتیجه اگر اصطکاک داخلی در یک سیستم مکانیکی قابل ملاحظه باشد، روش کار مجازی را برای کل سیستم نمی‌توان به‌کار برد، مگر آنکه کار انجام‌شده به‌وسیلهٔ اصطکاک داخلی در نظرگرفته شود.

در حین استفاده از روش کار مجازی، لازم است برای جداکردن سیستم مورد نظر نموداری رسم شود. برخلاف نمودار جسم آزاد که در آن تمام نیروهای واردشده نشان داده می‌شود، در نمودار مربوط به روش کار مجازی تنها *نیروهای فعال* نشان داده می‌شوند، زیرا نیروهای واکنش‌پذیر در رابطهٔ $\delta U = 0$ وارد نمی‌شوند. این نمودار را *نمودار نیروی فعال* می‌نامند. در شکل ۷.۷ (الف) نمودار نیروهای فعال سیستم نشان داده شده است.

درجات آزادی

تعداد مختصات مستقل مورد نیاز برای تعیین کامل پیکربندی یک سیستم مکانیکی را تعداد *درجهٔ آزادی* آن سیستم می‌گویند. در شکل ۸.۷ (الف) سه نمونه از سیستم‌های با یک درجهٔ آزادی نشان داده شده‌اند. در این سیستم‌ها، برای تعیین وضعیت تمام اجزای سیستم به‌طور کامل، فقط یک مختصه نیاز است که این مختصه می‌تواند طولی یا زاویه‌ای باشد. شکل ۸.۷ (ب) سه نمونه از سیستم‌هایی با دو درجهٔ آزادی را نشان می‌دهد که در آنها برای تعیین وضعیت سیستم به دو مختصهٔ مستقل مورد نیاز است. با افزودن اتصالات بیشتر به ساختار داده شده در سمت راست شکل ۸.۷ (ب)، درجات آزادی آن را به‌طور نامحدود می‌توان افزایش داد.

Scanned by CamScanner



(الف) مثال‌هایی از سیستم‌هایی با یک درجهٔ آزادی

(ب) مثال‌هایی از سیستم‌هایی با دو درجهٔ آزادی

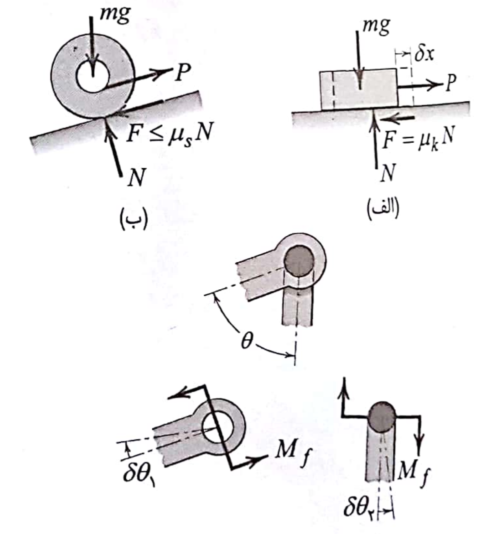
شکل ۸.۷

برای یک سیستم با n درجهٔ آزادی اصل کار مجازی $\delta U=0$ را n بار می‌توان به‌کار برد. برای این منظور هر بار یکی از مختصات مستقل را تغییر داده و سایر مختصات را ثابت نگه می‌داریم. در این فصل تنها سیستم‌های با یک درجهٔ آزادی را بررسی می‌کنیم.[1]

سیستم‌های دارای اصطکاک

هنگامی که در یک سیستم مکانیکی اصطکاک لغزشی در حد قابل ملاحظه‌ای وجود داشته باشد، آن را سیستم "واقعی" می‌گویند. در این سیستم‌ها مقداری از کار مثبت انجام‌شده توسط نیروهای فعال خارجی (کار ورودی) توسط نیروی اصطکاک جنبشی در حین حرکت سیستم به‌صورت گرما هدر می‌رود. چنانچه بین سطوح تماس لغزش وجود داشته باشد، کار نیروی اصطکاک منفی خواهد بود زیرا جهتش همواره مخالف جهت حرکت جسمی است که بر آن عمل می‌کند.

بنابراین نیروی اصطکاک جنبشی $\mu_k N$ وارد بر قطعهٔ لغزنده در شکل ۹.۷ (الف) ضمن جابه‌جایی به‌اندازهٔ x کاری برابر $-\mu_k N_x$ بر قطعه انجام می‌دهد. در حین تغییر مکان مجازی δx، کار نیروی اصطکاک مساوی $-\mu_k N \delta_x$ است. از سوی دیگر، نیروی اصطکاک استاتیکی وارد بر چرخ غلتان شکل ۹.۷ (ب)، در صورت عدم لغزش چرخ، کاری انجام نمی‌دهد.



(ب) (الف)

(ج)

شکل ۹.۷

در شکل ۹.۷ (ج) گشتاور M_f حول مرکز اتصال مفصلی که از نیروهای اصطکاکی وارد بر سطوح تماس حاصل می‌شود، ضمن هرگونه حرکت زاویه‌ای نسبی بین دو قطعه، کار منفی انجام می‌دهد. بنابراین، برای یک جابه‌جایی مجازی $\delta\theta$ بین دو قطعه با جابه‌جایی‌های مجازی جداگانهٔ $\delta\theta_1$ و $\delta\theta_2$ مطابق شکل، کار مجازی انجام‌شده مساوی $-M_f\,\delta\theta_1 - M_f\,\delta\theta_2 = -M_f\,(\delta\theta_1+\delta\theta_2)$ یا $-M_f\,\delta\theta$ است. برای هر قطعه، جهت M_f به‌گونه‌ای است که با حرکت نسبی دورانی مخالفت می‌کند.

قبلاً در این بخش گفته شد که مزیت اصلی کار مجازی این است که در تحلیل کل سیستم متشکل از اعضای متصل به هم، نیازی به جداکردن اعضا نیست. اگر نیروهای اصطکاک جنبشی داخلی سیستم زیاد باشد، لازم است اجزای دستگاه جدا شوند تا نیروهای اصطکاک تعیین شوند. در چنین مواردی، روش کار مجازی کاربرد محدودی خواهد داشت.

بازده مکانیکی

به‌دلیل اتلاف انرژی توسط اصطکاک، کار خروجی از یک ماشین همواره کمتر از کار ورودی به آن است. نسبت این دو کار را *بازده مکانیکی* می‌گویند. بنابراین

$$e=\frac{\text{کار خروجی}}{\text{کار ورودی}}$$

بازده مکانیکی ماشین‌های ساده را که یک درجهٔ آزادی دارند و به‌طور یکنواخت کار می‌کنند، با محاسبهٔ صورت و مخرج e ضمن یک تغییر مکان مجازی می‌توان به‌کمک روش کار مجازی تعیین کرد.

به‌عنوان مثال، مطابق شکل ۱۰.۷ قطعه‌ای را در نظر بگیرید که به‌سمت بالای سطح شیبدار حرکت می‌کند. در طی تغییر مکان مجازی δs، کار خروجی عبارت است از کار مورد نیاز برای بالا بردن قطعه، یعنی

$$\text{کار خروجی}=mg\,\delta s\sin\theta$$
$$\text{کار ورودی}=T\,\delta s=(mg\sin\theta+\mu_k\,mg\cos\theta)\delta s$$

بنابراین بازده مکانیکی در این سطح شیبدار عبارت است از

$$e=\frac{mg\,\delta s\sin\theta}{mg(\sin\theta+\mu_k\cos\theta)\delta s}=\frac{1}{1+\mu_k\cot\theta}$$

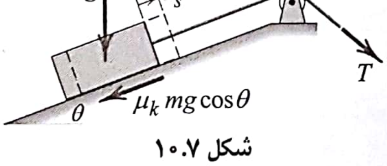
به‌عنوان مثال دوم، جک پیچشی شکل ۶۶ توصیف‌شده در بخش ۵۶ را در نظر می‌گیریم. معادلهٔ (۳.۶)، گشتاور M لازم برای بالابردن بار W را تعیین می‌کند که در آن پیچ دارای شعاع میانگین r و زاویهٔ مارپیچی α بوده و زاویهٔ اصطکاک مساوی $\phi=\tan^{-1}\mu_k$ است. در طی دوران کوچک $\delta\theta$ پیچ داریم

$$\text{کار ورودی}=M\,\delta\theta=Wr\,\delta\theta\tan(\alpha+\phi)$$
$$\text{کار مورد نیاز برای بالا بردن بار}=\text{کار خروجی}=Wr\,\delta\theta\tan\alpha$$

بنابراین بازده جک عبارت است از

$$e=\frac{Wr\,\delta\theta\tan\alpha}{Wr\,\delta\theta\tan(\alpha+\phi)}=\frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\phi)}$$

که با کاهش اصطکاک، زاویهٔ اصطکاک ϕ نیز کاهش یافته و بازده به عدد یک نزدیک می‌شود.

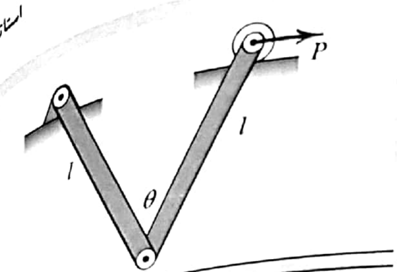


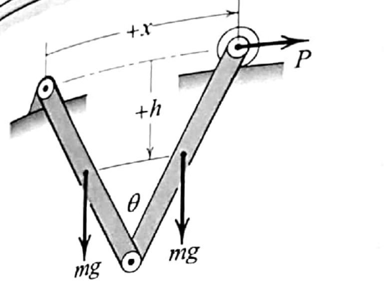
شکل ۱۰.۷

[1] برای ملاحظهٔ چند نمونه حل مسائل با دو درجهٔ آزادی یا بیشتر مراجعه کنید به
Chapter 7 first author's *Statistics, 2nd Edition*, 1971, or *SI Version*, 1975.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۷

هریک از دو میلهٔ یکنواخت نشان‌داده‌شده دارای جرم m و طول l است و بر دو تکیه‌گاه، متکی است و بارگذاری شده است. برای نیروی معلوم P، زاویهٔ θ را طوری تعیین کنید که تعادل برقرار باشد.





حل: نمودار نیروی فعال سیستم را رسم کرده و در آن نیروی وزن هریک از میله‌ها و نیروی P را نشان داده‌ایم. سایر نیروهای خارجی که بر سیستم وارد می‌شوند از نوع نیروهای واکنشی هستند و در حین حرکت مجازی δx کار انجام نمی‌دهند. بنابراین آنها را نشان نمی‌دهیم.

طبق اصل کار مجازی کل کار انجام‌شده توسط همهٔ نیروهای فعال خارجی، در حین هرگونه تغییر مکان مجازی سازگار با قیدها برابر با صفر است. بنابراین برای تغییر مکان δx، کار مجازی برابر است با

$$[\delta U = ۰] \qquad P\delta x + ۲mg\delta h = ۰$$ ❶

اکنون هریک از تغییر مکان‌های مجازی را برحسب متغیرهای θ، یعنی کمیت مورد نظر، بیان می‌کنیم

$$x = ۲l\sin\frac{\theta}{۲} \quad \text{و} \quad \delta x = l\cos\frac{\theta}{۲}\delta\theta$$

❷ به‌طور مشابه

$$h = \frac{l}{۲}\cos\frac{\theta}{۲} \quad \text{و} \quad \delta h = -\frac{l}{۴}\sin\frac{\theta}{۲}\delta\theta$$

با جایگذاری روابط بالا در معادلهٔ کار مجازی داریم

$$Pl\cos\frac{\theta}{۲}\delta\theta - ۲mg\frac{l}{۴}\sin\frac{\theta}{۲}\delta\theta = ۰$$

که از آن نتیجه می‌شود

ج. $$\tan\frac{\theta}{۲} = \frac{۲P}{mg} \quad \text{یا} \quad \theta = ۲\tan^{-۱}\frac{۲P}{mg}$$

برای به‌دست آوردن این نتیجه با استفاده از معادلات تعادل نیرو و گشتاور، سیستم را باید تجزیه کرده و تمام نیروهای وارد بر هریک از عضوهای آن را نشان می‌دادیم. به این ترتیب ملاحظه می‌شود که روش کار مجازی چه اندازه محاسبهٔ θ را ساده کرده است.

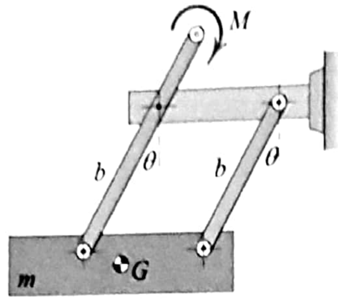
راهنمایی‌های مفید

❶ توجه کنید که اگر x به‌طرف راست باشد، δx در جهت P و به‌سمت راست مثبت است، بنابراین کار مجازی برابر با $P(+\delta x)$ می‌باشد. با انتخاب جهت مثبت h به‌سمت پایین، δh نیز در جهت mg یعنی روبه‌پایین مثبت است، بنابراین عبارت درست ریاضی کار برابر با $mg(+\delta h)$ است. در مرحلهٔ بعدی زمانی‌که δh را برحسب $\delta\theta$ بیان می‌کنیم، علامت جبری δh منفی شده و در نتیجه رابطهٔ ریاضی کار مجازی با مشاهدهٔ فیزیکی سازگار است و بر این اساس با افزایش x و θ، مرکز جرم به‌طرف پایین حرکت می‌کند و وزن mg کار منفی انجام می‌دهد.

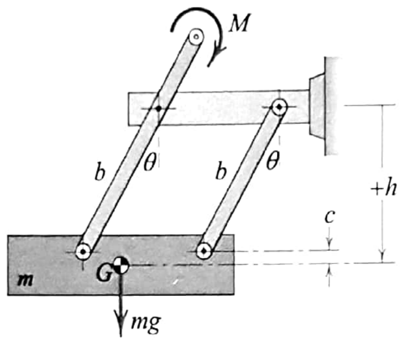
❷ δh و δx را با همان قواعد ریاضی دیفرانسیل‌گیری که می‌توان با آن dh و dx را به‌دست آورد، تعیین می‌کنیم.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۷ کوپل M به انتهای یکی از دو عضو موازی که مطابق شکل آویخته شده‌اند، جرم m اعمال می‌شود. جرم اعضا قابل صرف‌نظر کردن است و فرض می‌شود اصطکاکی وجود ندارد. برای مقدار معلوم M، معادله‌ای تعیین کنید که زاویهٔ تعادل θی اعضا با خط عمودی را بیان کند. در مورد حل مسئله به روش نیرو و گشتاور بحث کنید.



حل: نمودار نیروهای فعال نشان می‌دهد که وزن mg بر مرکز جرم G و کوپل M بر انتهای عضو وارد می‌شود. در حین تغییر زاویهٔ θ هیچ نیرو یا گشتاوری وجود ندارد که روی سیستم کار انجام دهد.



موقعیت قائم مرکز جرم G توسط فاصلهٔ h در زیر خط مبنای ثابت افقی بیان شده و برابر است با $h = b\cos\theta + c$. کار انجام‌شده توسط mg طی تغییر مکان δh در امتداد mg برابر است با

$$+mg\,\delta h = mg\,\delta(b\cos\theta + c)$$
$$= mg(-b\sin\theta\,\delta\theta + ۰) = -mgb\sin\theta\,\delta\theta$$

❶ علامت منفی نشان می‌دهد که کار انجام‌شده در تغییر مکان زاویهٔ مثبت $\delta\theta$ منفی است. مقدار ثابت c نیز حذف شده، زیرا تغییرات آن صفر است.

اگر علامت θ را در جهت ساعتگرد مثبت در نظر بگیریم، علامت $\delta\theta$ نیز در جهت ساعتگرد مثبت خواهد بود. بنابراین کار انجام‌شده توسط کوپل ساعتگرد M را به‌صورت $+M\,\delta\theta$ می‌نویسیم. طبق اصل کار مجازی داریم

$$[\delta U = ۰] \qquad M\,\delta\theta + mg\,\delta h = ۰$$

که نتیجه می‌دهد

$$M\,\delta\theta = mgb\sin\theta\,\delta\theta$$
$$\theta = \sin^{-۱}\frac{M}{mgb}$$

ج.

چون $\sin\theta < ۱$، در حالت تعادل سیستم، M نمی‌تواند بزرگتر از mgb باشد.

برتری روش حل کار مجازی برای این مسئله زمانی کاملاً مشخص می‌شود که ببینیم در راه‌حل تعادل نیرو و گشتاور، لازم است که نمودار جسم آزاد هریک از سه عضو متحرک را به‌طور جداگانه رسم کرده و همهٔ نیروهای واکنش‌پذیر داخلی را در اتصالات مفصلی به‌حساب آوریم. برای انجام این مراحل لازم است موقعیت افقی G نسبت به نقاط اتصال اعضا در تحلیل مسئله را تعیین کنیم، هرچند که در پایان کار این متغیر از معادلات حذف می‌شود. بنابراین نتیجه می‌گیریم که با روش کار مجازی در این مسئله به‌طور مستقیم با علت و اثر سروکار داشته و نیازی به استفاده از کمیت‌های غیرضروری نیست.

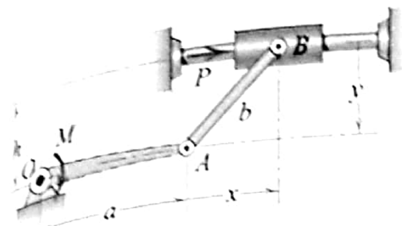
راهنمایی مفید

❶ دوباره همچون مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۷، از لحاظ ریاضی با تعریف کار سازگار شده‌ایم و می‌بینیم که علامت جبری عبارت به‌دست‌آمده با تغییر فیزیکی مطابقت دارد.

Scanned by CamScanner

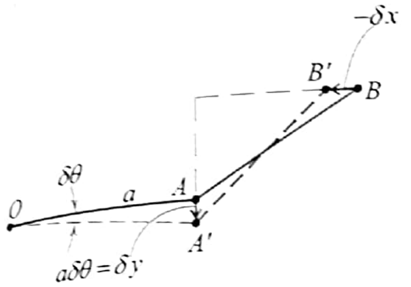
مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۷

در حالتی که عضو OA مطابق شکل در موقعیت افقی است، نیروی P وارد بـر غـلاف لغزنـده را به‌گونه‌ای تعیین کنید که میلهٔ OA در اثر اعمال کوپل M در تعادل بوده و نتوانـد دوران کنـد. از جرم قطعه‌های متحرک صرف‌نظر کنید.



حل: از شکل مسئله به‌عنوان نمودار جسم آزاد نیروی فعال استفاده مـی‌کنـیم. سـایر نیروهـا به‌صورت نیروهای داخلی واکنشی هستند و کار انجام نمی‌دهند.

میلهٔ OA را در جهت پادساعتگرد به‌اندازهٔ $\delta\theta$ به‌عنوان تغییر مکان زاویه‌ای حرکت می‌دهیم و کار مجازی انجام‌شده توسط M و P را محاسبه می‌کنیم. جابه‌جایی روبـه‌پـایین A نسـبت بـه وضعیت افقی که از تغییر مکان زاویه‌ای ایجاد می‌شود برابر است با



❶ $$\delta y = a\delta\theta$$

که البته در آن $\delta\theta$ برحسب رادیان بیان می‌شود.

از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در آن عضو AB وتر ثابت مثلث است، می‌توان نوشت

$$b^2 = x^2 + y^2$$

اکنون از معادلهٔ بالا دیفرانسیل می‌گیریم و داریم

❷ $$0 = 2x\,\delta x + 2y\,\delta y \quad \text{یا} \quad \delta x = -\frac{y}{x}\delta y$$

بنابراین

$$\delta x = -\frac{y}{x}a\delta\theta$$

و معادلهٔ کار مجازی به‌صورت زیر درمی‌آید

❸ $$[\delta U = 0] \qquad M\,\delta\theta + P\,\delta x = 0 \qquad M\,\delta\theta + P\left(-\frac{y}{x}a\,\delta\theta\right) = 0$$

ج. $$P = \frac{Mx}{ya} = \frac{Mx}{ha}$$

ملاحظه می‌شود کـه بـا اسـتفاده از روش کـار مجـازی، رابطـهٔ مسـتقیمی را بـین P و M بـدون واردکردن نیروهای دیگر به‌دست می‌آوریم. حل این مسـئله بـه روش تعـادل نیـرو و گشـتاور راه‌حـل ساده‌ای است که در آن باید ابتدا تمام نیروها را در نظرگرفت و سپس نیروهای نامرتبط را حذف کرد.

راهنمایی‌های مفید

❶ اگـر میلـهٔ OA در وضـعیت افقـی نباشـد تغییر مکان $a\delta\theta$ برای نقطهٔ A برابـر بـا δy نخواهـد بود.

❷ چون طول b ثابت است پـس $\delta b = 0$ و علامت منفی در رابطه نشان می‌دهد که چنانچه علامت یکی از متغیرها منفی باشد، تغییـر متغیـر دیگر مثبت است.

❸ می‌توانستیم تغییر مکان مجازی عضو را در جهت پادساعتگرد در نظر بگیـریم کـه در ایـن صـورت فقط علامت تمام جمله‌ها تغییر می‌کرد.

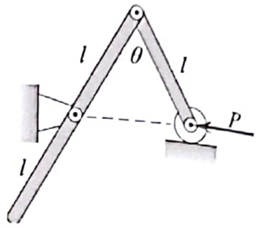
Scanned by CamScanner

... مجازی

... فرض می‌شود که کار مجازی نیروی اصطکاک ناچیز است؛ مگر ... ل گفته شده باشد.

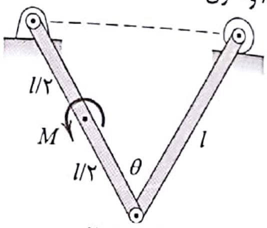
... مقدماتی

... جرم میلهٔ یکنواخت l برابر m است، به این معنی که جرم میلهٔ یکنواخت ... برابر $2m$ می‌باشد. برای نیروی معین P، زاویهٔ θ را برای اینکه تعادل برقرار ... تعیین کنید.



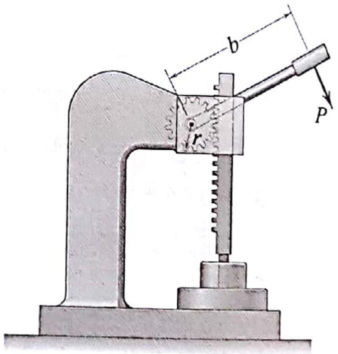
شکل م ۱.۷

۲.۷ کوپل M لازم را برای حفظ تعادل با زاویهٔ θ معین کنید. هریک از دو میلهٔ یکنواخت به‌جرم m و طول l هستند.



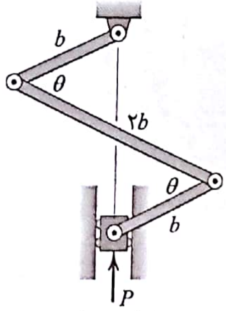
شکل م ۲.۷

۳.۷ منگنهٔ فشاری به‌وسیلهٔ یک دستگاه چرخ و میله‌ای دنده‌ای برای ایجاد نیروی زیاد به‌کار می‌رود. اگر شعاع دنده r باشد، نیروی R وارد بر دسته را که ... برای ایجاد نیروی P فراهم کرد تعیین کنید.



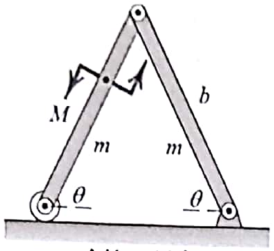
شکل م ۳.۷

۴.۷ نیروی عمودی P لازم برای نگهداری تعادل اهرم‌بندی در حالت قائم با زاویهٔ θ را تعیین کنید. جرم هر واحد طول میلهٔ اهرم یکنواخت برابر ρ است. نشان دهید که P مستقل از زاویهٔ θ است.



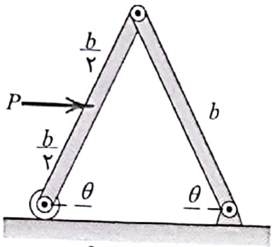
شکل م ۴.۷

۵.۷ هریک از میله‌های قاب به‌جرم m و طول l اند. وضعیت تعادل قاب در وضعیت صفحهٔ قائم با واردکردن کوپل M به‌سمت چپ میله معین می‌شود. زاویهٔ θ را برحسب M به‌دست آورید.



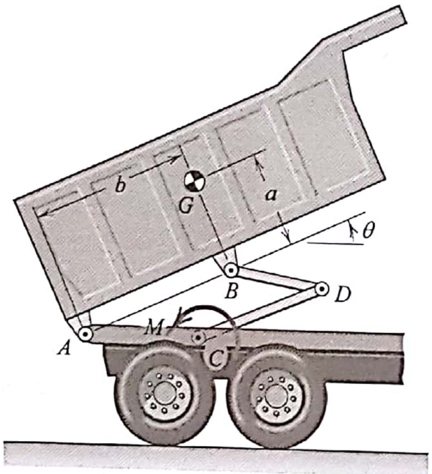
شکل م ۵.۷

۶.۷ کوپل M در مسئلهٔ ۵.۷ را با نیروی افقی P مطابق شکل جایگزین کرده و زاویهٔ θ را برای تعادل معین کنید.



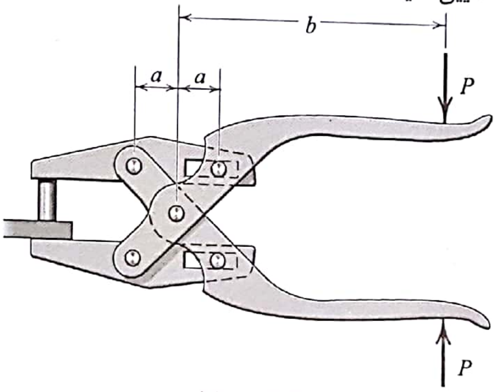
شکل م ۶.۷

۷.۷ گشتاور پیچشی M لازم وارد بر اهرم محرک کامیون کمپرسی چقدر باید باشد تا باری به‌جرم m و مرکز جرم G در زاویهٔ θ در تعادل باشد؟ چندضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.



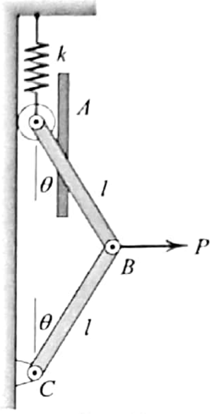
شکل م ۷.۷

۸.۷ نیروی Q وارد بر کاغذ توسط کاغذ سوراخ‌کن مسئلهٔ ۸۹.۴ را که در اینجا تکرار شده، تعیین کنید.



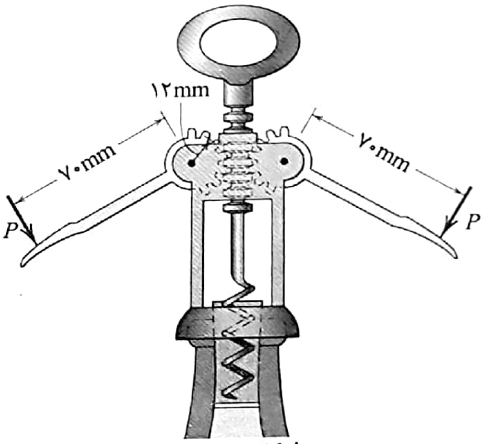
شکل م ۸.۷

۹.۷ فنری با ضریب k وقتی $\theta = 0$ است، به‌حالت آزاد می‌باشد. عبارتی برای نیروی P مورد نیاز را برای اینکه زاویهٔ سیستم برابر θ شود به‌دست آورید. جرم میله‌ها ناچیزند.



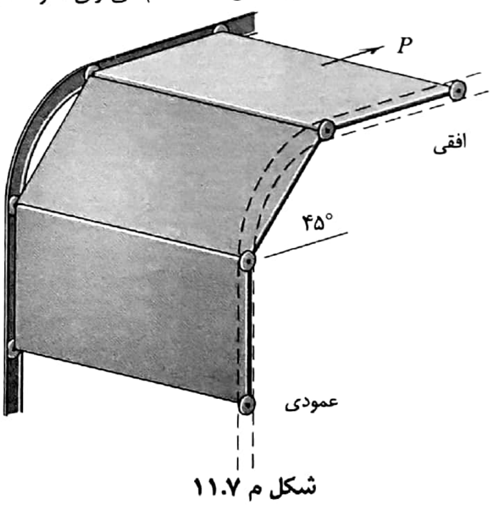
شکل م ۹.۷

۱۰.۷ با استفاده از سازوکار پینیون و میل‌دنده، نیروهای بزرگی را به‌کمک چوب‌پنبه‌کش نشان‌داده‌شده می‌توان ایجاد کرد. اگر میانگین شعاع پینیون‌ها 12mm باشد، نیروی R وارد بر چوب‌پنبه برای ایجاد نیروی P بر دسته را به‌دست آورید.



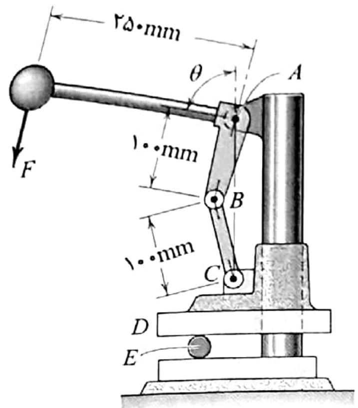
شکل م ۱۰.۷

۱۱.۷ برای نگه‌داشتن یک در سه‌تکه در وضعیتی که در آن صفحهٔ میانی با زاویهٔ 45° قرار دارد، به چه نیروی P نیاز است؟ هر صفحه دارای جرم m است و از اصطکاک در غلتک راهنما (با نقطه‌چین نشان داده شده) می‌توان صرف‌نظر کرد.



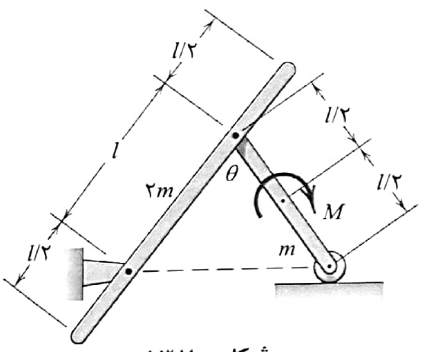
شکل م ۱۱.۷

۱۲.۷ در پرس مفصلی نشان‌داده‌شده، فک بالایی D با مقاومت اصطکاکی ناچیز در راستای ستون ثابت عمودی می‌لغزد. نیروی F لازم را که باید بر دسته اعمال کرد تا برای مقدار معلوم دلخواه θ، نیروی فشاری R بر غلتک E ایجاد شود، به‌دست آورید.



شکل م ۱۲.۷

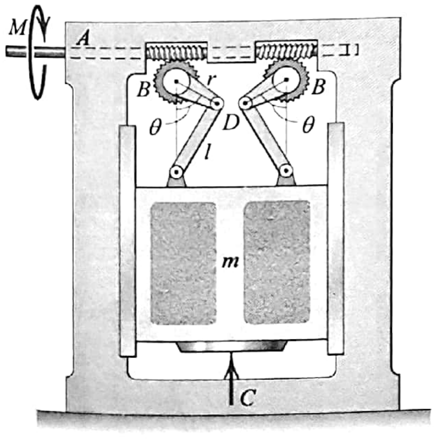
۱۳.۷ کوپل M لازم را برای نگهداری تعادل زاویهٔ θ، معین کنید. جرم یکنواخت میله به‌طول $2l$ برابر است با $2m$، همان‌طورکه جرم میلهٔ یکنواخت به‌طول l برابر با m است.



شکل م ۱۳.۷

مسائل برگزیده

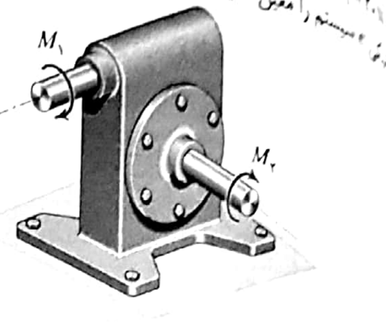
۱۴.۷ در طراحی پرس نشان‌داده‌شده، برای یک دور چرخش چرخ‌دنده‌های B که میل‌لنگ‌های BD را به‌کار می‌اندازند، به n دور چرخش میل‌گردان A با دنده‌های حلزونی نیاز است. کوبهٔ متحرک دارای جرم m است. از هرگونه اصطکاک صرف‌نظر کرده و گشتاور پیچشی M وارد بر میل‌گردان دندهٔ حلزونی را برای ایجاد نیروی فشاری C در پرس در وضعیت $\theta = 90^\circ$ تعیین کنید. (یادآور می‌شود که کار مجازی جابه‌جایی کوبه و نقطهٔ D در وضعیت $\theta = 90^\circ$ برابرند.)



شکل م ۱۴.۷

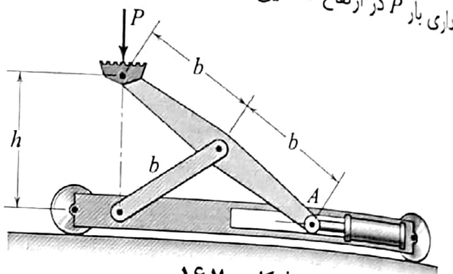
Scanned by CamScanner

... بجای ... چرخدندهٔ کاهندهٔ زیر، نسبت دنده‌ای ۱:۴۰ است. گشتاور ورودی M_1 و اندازهٔ گشتاور خروجی $M_۲ =$ ۱۱۸۰N·m می‌باشد. بازده ... سیستم را معین کنید.



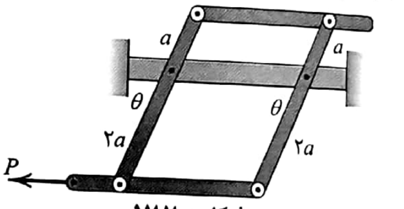
شکل م ۱۵.۷

۱۶.۷ جک سوسماری اتومبیلی توسط سیلندر هیدرولیکی کار می‌کند، و حرکت انتهای A را در شکاف افقی کنترل می‌کند. فشار C در میلهٔ سیلندر را برای نگهداری بار P در ارتفاع h معین کنید.



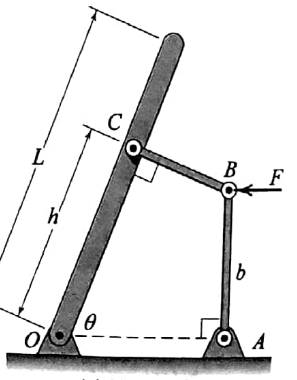
شکل م ۱۶.۷

۱۷.۷ هریک از چهار میلهٔ حرکت‌پذیر یکنواخت دارای جرم m هستند و وضعیت تعادل‌شان توسط نیروی معین P وارد بر انتهای پایین میله، کنترل می‌شود. برای نیروی معین F زاویهٔ تعادل θ را معین کنید. آیا برای حفظ تعادل، در وضعیت تعادل نشان‌داده‌شده، جابه‌جایی نیروی P توسط کوپل M وارد بر انتهای پایینی میلهٔ افقی امکان‌پذیر است؟



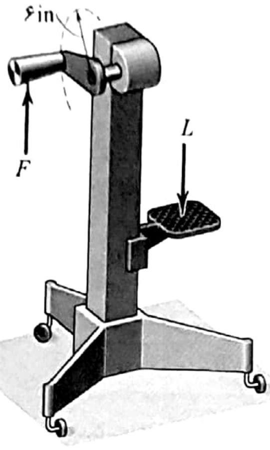
شکل م ۱۷.۷

۱۸.۷ میلهٔ یکنواخت به‌جرم m روی سطح شیبدار با زاویهٔ θ، توسط نیروی افقی F وارد بر اتصال AB و BC که جرم‌های آنها ناچیز است نگهداری می‌شود. برای وضعیت نشان‌داده‌شده که AB عمود بر AO و BC عمود بر میله باشند، نیروی F را معین کنید.



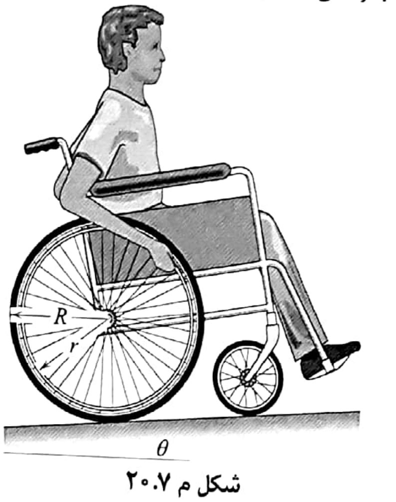
شکل م ۱۸.۷

۱۹.۷ در جک بالابر پیچی، پس از ۱۲ دور چرخش دسته، پایهٔ بالابر 1in بالا می‌رود. اگر برای بالابردن بار $L =$ ۲۷۰۰lb، نیروی $F =$ ۱۰lb باید عمود بر دسته وارد شود، بازده این جک را تعیین کنید.



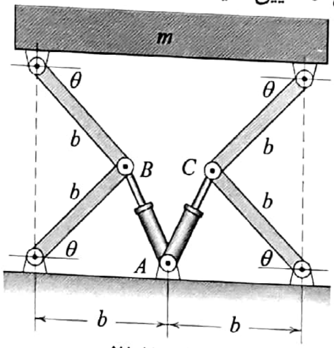
شکل م ۱۹.۷

۲۰.۷ در صندلی چرخ‌دار نشان‌داده‌شده، نیروی F که شخص باید در امتداد مماس بر لبهٔ چرخ وارد کند چقدر باشد تا صندلی از شیب با زاویهٔ θ بالا رود؟ جرم کل صندلی و شخص برابر m است. (*راهنمایی*: اگر تغییر مکان مرکز چرخ را در امتداد سطح شیبدار با s و زاویهٔ دوران چرخش را با β نشان دهیم، در صورت عدم لغزش چرخ، به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که $s = R\beta$. در این رابطه β برحسب رادیان است.)



شکل م ۲۰.۷

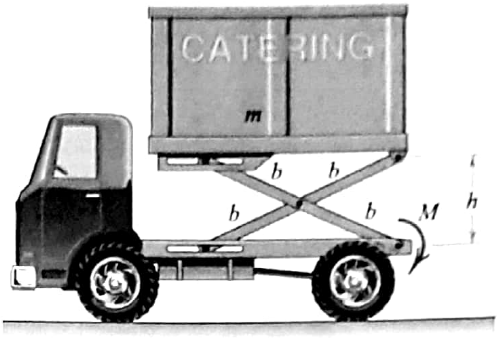
۲۱.۷ بالابر سکویی به‌جرم m به چهار اتصال مشابه متکی است و توسط سیلندر هیدرولیک AB و AC که روی نقطهٔ اتکای A دوران می‌کند، کنترل می‌شود. فشار P در هریک از سیلندرهای مورد نیاز را برای نگهداری سکو تحت زاویهٔ مشخص θ تعیین کنید.



شکل م ۲۱.۷

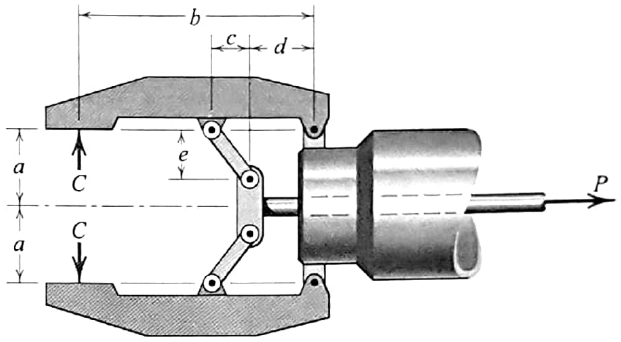
Scanned by CamScanner

۲۲.۷ صندوق بار کامیون حمل مواد غذایی به داخل هواپیما، دارای محموله‌ای به‌جرم m است. این صندوق با اعمال گشتاور M وارد شده بر انتهای پایینی میلهٔ رابط مفصل شده به شاسی کامیون، بلند می‌شود. شیارهای افقی موجب بازشدن اهرم‌بندی در حین بالابردن بار می‌شود. M را به‌صورت تابعی از h بیان کنید.



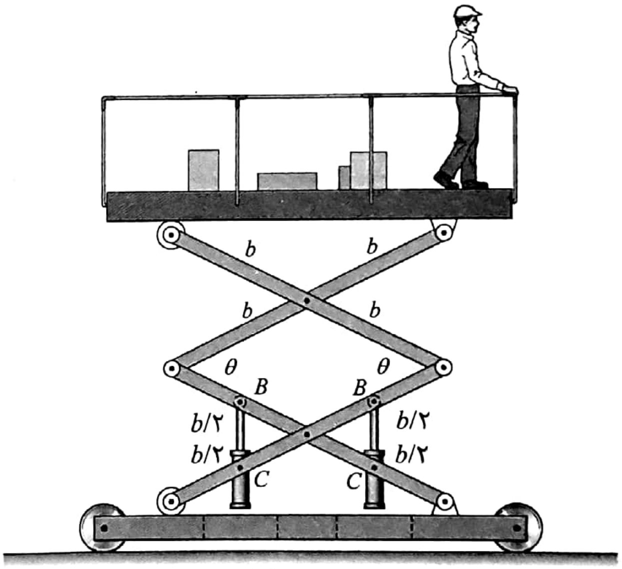
شکل م ۲۲.۷

۲۳.۷ در طراحی چنگک‌های سازوکار دور ـ کنش، در نتیجهٔ کشش P میلهٔ کنترل، نیروی گیرشی C ایجاد می‌شود. در پیکربندی نشان‌داده‌شده، هنگامی‌که فک‌ها به‌صورت موازی قراردارند، C را برحسب P تعریف کنید.



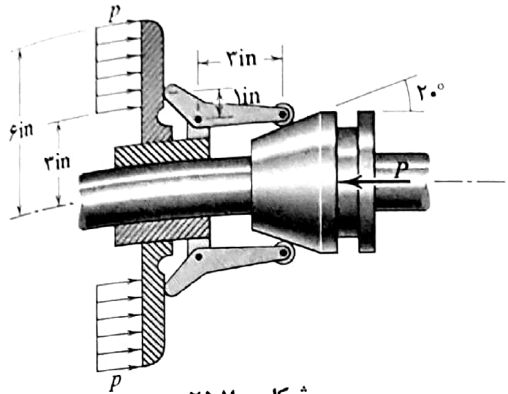
شکل م ۲۳.۷

۲۴.۷ سکوی تخت سیاری توسط دو سیلندر هیدرولیکی که در نقطهٔ C به‌هم لولا شده‌اند بالا می‌رود. فشار هیدرولیکی و مساحت پیستون هر سیلندر به‌ترتیب p و A است. فشار p را در حالت تعادل این سیستم به‌دست آورید و ثابت کنید که مستقل از زاویهٔ θ است. جرم مجموعهٔ سکو، کارگر و متعلقات بر روی هم برابر m است و از جرم بازوها می‌توان صرف‌نظر کرد.



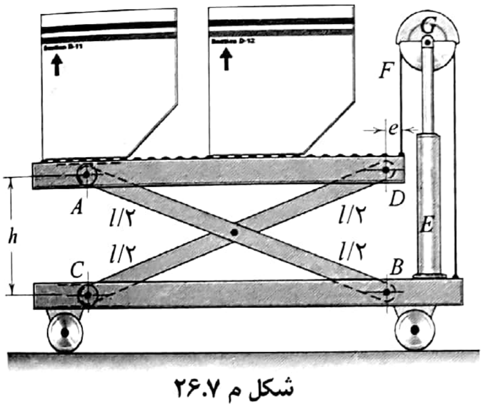
شکل م ۲۴.۷

۲۵.۷ شکل زیر مقطعی از یک طرح مکانیکی درگیری کلاچ کشتی را نشان می‌دهد. وضعیت طوقهٔ مخروطی روی میل‌گردان؛ با درگیری نیروی P روی سطح تماس صفحه کنترل شده و با حرکت کوچکی به‌سمت چپ باعث بالا رفتن دو اهرم برای تحمل سطح پشت کلاچ می‌شود. سطح کلاچ، که فشار یکنواخت p را بر سطح تماس صفحه تولید می‌کند، حلقه‌ای به‌شعاع خارجی ۶in و شعاع داخلی ۳in است. با روش کار مجازی نیروی P لازم را برای فشار وارد بر صفحه‌کلاچ برابر ۳۰lb/in²، تعیین کنید. صفحه‌کلاچ در لغزش در طول غلاف که اهرم‌ها حول آن می‌چرخند آزاد است.



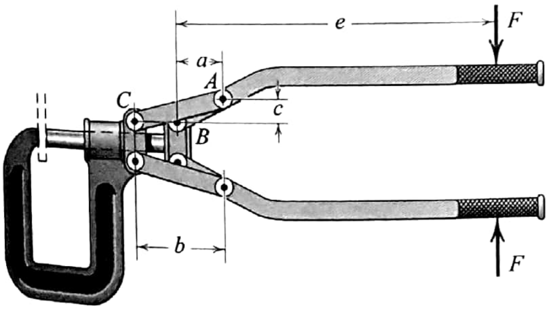
شکل م ۲۵.۷

۲۶.۷ طرح موجود یک سیستم تغذیهٔ بار به درون هواپیماست که مجدداً تحت بررسی است. سکوی AD بالابر توسط سازوکار نشان‌داده‌شده به ارتفاع مورد نظر می‌رسد. در هر طرف دستگاه، یک دستهٔ میله و بالابر هیدرولیکی وجود دارد. کابل‌های F که سکو را بالا می‌برند توسط سیلندرهای هیدرولیکی E کنترل می‌شوند و دستهٔ پیستون آنها، قرقره‌های G را به‌طرف بالا می‌رانند اگر وزن سکو و محتوای آن برابر W باشد، نیروی فشار P را در هریک از دو دستهٔ پیستون معین کنید. آیا P بستگی به ارتفاع h دارد؟ هنگامی که W در وسط A و D قرار دارد، نیروی Q را که توسط هریک از اتصال‌ها در مرکز مفصل وارد می‌شود محاسبه کنید.



شکل م ۲۶.۷

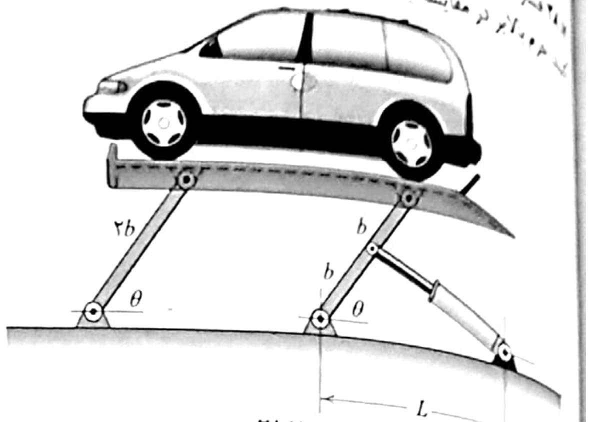
۲۷.۷ نیروی P ظاهرشده را در فک‌های دستگاه میخ‌پرچ‌کن معین کنید.



شکل م ۲۷.۷

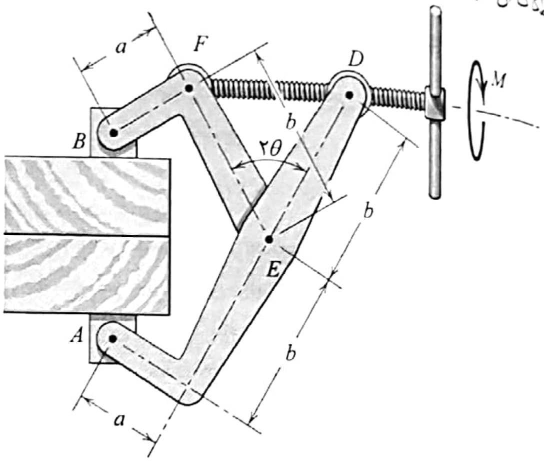
Scanned by CamScanner

... بحاری ... R ... بالابر اتومبیل برحسب زاویهٔ θ بیان ... (... فشار C) را در سیلندر هیدرولیکی ... ۲۸.۷ ... بالابر در مقایسه با جرم اتومبیل قابل صرف‌نظرکردن است.



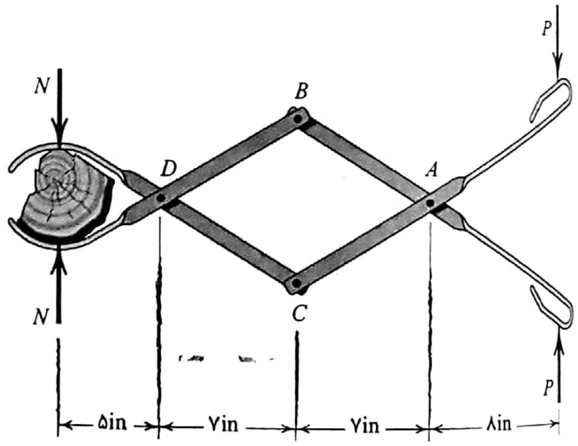
شکل م ۲۸.۷

۲۹.۷ نیروی F بین فک‌های گیرنده برحسب گشتاور M وارد بر دستهٔ تنظیم ... را تعیین کنید. پیچ دارای رزوهٔ پیش‌رونده در یک دور برابر L بوده و ... اصطکاک آن ناچیز است.



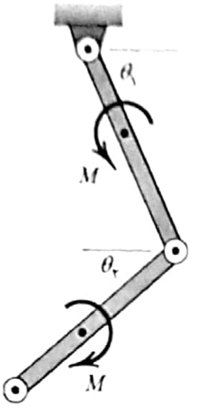
شکل م ۲۹.۷

۳۰.۷ نیروی N وارد بر هیزم را از طرف هریک از فک‌های انبر شومینه تعیین کنید.



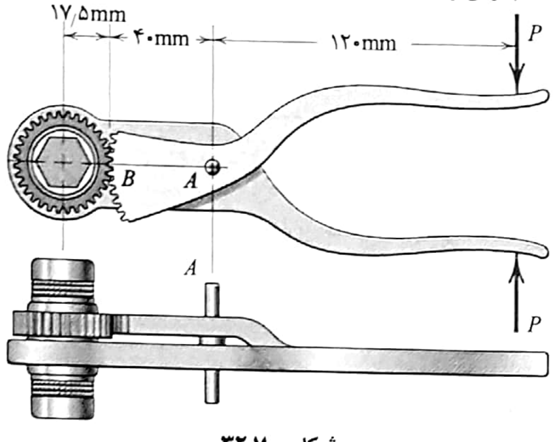
شکل م ۳۰.۷

۳۱.۷ هریک از اتصال‌های یکنواخت دارای طول l و جرم m تحت تأثیر کوپل M قرار می‌گیرند. همان‌طورکه در شکل نشان داده شده، یکی در جهت ساعتگرد و دیگری در جهت پادساعتگرد است. هنگامی‌که سیستم در وضعیت تعادل است، زاویه‌ای را که هر اتصال با افق می‌سازد تعیین کنید.



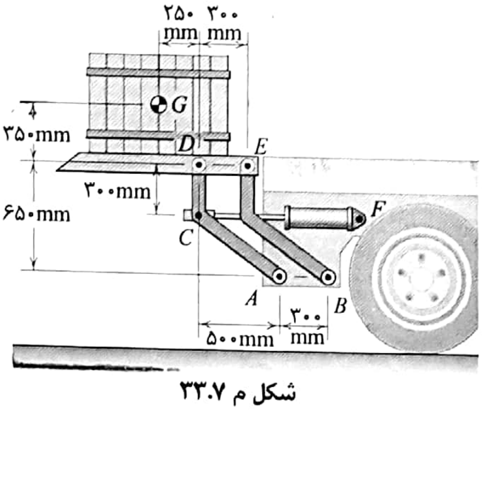
شکل م ۳۱.۷

۳۲.۷ آچار ضدگشتاور برای خدمهٔ یک فضاپیما، برای محکم‌کردن پیچ و مهره‌ها، در مواردی که تکیه‌گاه مناسبی برای پیچ وجود ندارد، طراحی شده است. پین A در سوراخ سازه‌ای قرار می‌گیرد که پیچی که باید سفت شود روی آن قرار می‌گیرد. نوسان‌های بعدی دستهٔ آچار و چرخدنده باعث چرخش سریع توسط سازوکار "جغجغه‌ای" در یک صفحه می‌شود. برای نیروی گیرشی $P = ۱۵۰\text{N}$، گشتاور M منتقل‌شده به پیچ را تعیین کنید. (توضیح آنکه یک طرف این آچار برای محکم‌کردن و طرف دیگر برای شل‌کردن پیچ به‌کار می‌رود.)



شکل م ۳۲.۷

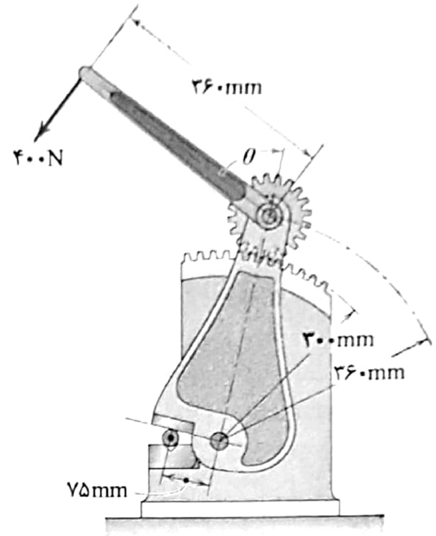
۳۳.۷ در شکل یک سکوی هیدرولیکی بارگیری که برای پشت کامیون طراحی شده، نشان داده شده است. وضعیت سکو توسط یک سیلندر هیدرولیکی با واردکردن نیرو در C کنترل می‌شود. میله‌ها در نقاط A، B و F به بدنهٔ کامیون لولا شده است. جعبه روی سکو به‌جرم ۲۵۰kg با مرکز جرم نقطهٔ G قراردارد. با صرف‌نظر کردن از وزن سکو و سایر افراد در این بالابر، نیروی P تولیدشده توسط سیلندر هیدرولیکی را برای نگه‌داشتن سکو در موقعیت نشان‌داده‌شده تعیین کنید.



شکل م ۳۳.۷

Scanned by CamScanner

۷.۳۴ • نیروی Q در فک برشی را با واردکردن $F = ۴۰۰N$ را در امتداد $\theta = ۳۰°$ تعیین کنید. (راهنمایی: نیروی ۴۰۰N را با یک نیرو و یک کوپل در مرکز چرخ‌دهندهٔ کوچک جایگزین کنید. جابه‌جایی مطلق زاویه‌ای چرخ‌دنده باید به‌طور دقیق تعیین شود.)



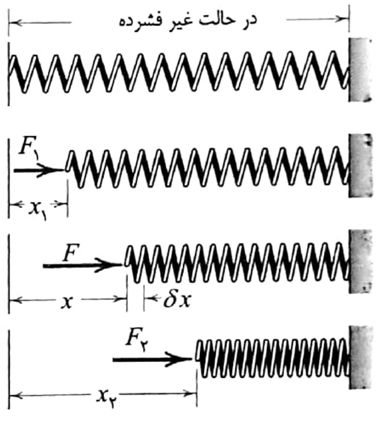
شکل م ۷.۳۴

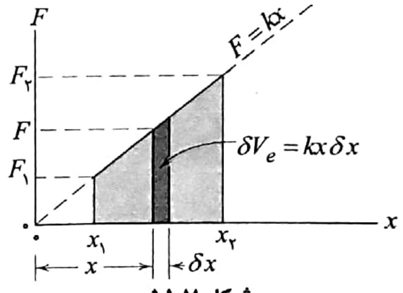
۴.۷ انرژی پتانسیل و پایداری

در بخش گذشته، وضعیت تعادل سیستم‌های تشکیل‌یافته از عضوهای صلب را مورد بررسی قرار دادیم. اکنون می‌خواهیم تعادل سیستم‌های مکانیکی را که شامل اجزای کشسان، مانند فنرها می‌باشند بررسی کنیم. بنابراین ابتدا به مفهوم انرژی پتانسیل، که در تعیین پایداری حالت تعادل مفید است، می‌پردازیم.

انرژی پتانسیل کشسان

وقتی روی یک عضو کشسان کار انجام می‌دهیم، انرژی به‌صورت *انرژی پتانسیل کشسان* V_e در آن عضو ذخیره می‌شود. این انرژی می‌تواند با رهایی عضو از حالت فشردگی یا کشیدگی، روی جسم دیگر کار انجام دهد.





شکل ۱۱.۷

فنر شکل ۱۱.۷ را در نظر بگیرید، که توسط نیروی F فشرده شده است. فرض می‌کنیم این فنر کشسان و خطی است. بدین‌معنی که نیروی F با تغییر طول x متناسب است. این رابطه را به‌صورت $F = kx$ می‌نویسیم که در آن k ثابت یا *سختی فنر* است. کار انجام‌شده روی فنر توسط نیروی F طی جابه‌جایی dx برابر است با $dU = F\,dx$، بنابراین انرژی پتانسیل کشسان فنر برای جابه‌جایی x برابر کل کار انجام‌شده روی فنر است

$$V_e = \int_۰^x F\,dx = \int_۰^x kx\,dx$$

$$V_e = \frac{۱}{۲}kx^۲ \qquad (۴.۷)$$

پس انرژی پتانسیل یک فنر برابر است با مساحت مثلث در نمودار F نسبت به x از ۰ تا x.

در حین افزایش فشردگی فنر از $x_۱$ تا $x_۲$، کار انجام‌شده روی فنر برابر است با *تغییر* انرژی پتانسیل کشسانی آن یا

$$\Delta V_e = \int_{x_۱}^{x_۲} kx\,dx = \frac{۱}{۲}k\,(x_۲^۲ - x_۱^۲)$$

که برابر است با سطح ذوزنقه از $x_۱$ تا $x_۲$.

در طول یک جابه‌جایی δx فنر، کار مجازی انجام‌شده روی فنر برابر است با تغییر مجازی در انرژی پتانسیل کشسان

$$\delta V_e = F\,\delta x = kx\,\delta x$$

در طی کاهش فشردگی فنر هنگام رهایی آن از $x = x_۲$ به $x = x_۱$، تغییر انرژی پتانسیل فنر یعنی انرژی نهایی آن منهای انرژی پتانسیل اولیه کمیتی است منفی. بنابراین اگر δx منفی باشد δV_e نیز منفی خواهد بود.

هنگامی‌که فنر در حالت کشیدگی باشد (برعکس فشردگی)، روابط کار ـ انرژی مشابه با روابط مربوط به فشردگی است. با این تفاوت که در اینجا x کش‌آمدگی فنر را نشان می‌دهد. وقتی فنر کشیده می‌شود، نیرو دوباره در جهت تغییر مکان عمل می‌کند، روی فنر کار مثبت انجام می‌دهد و انرژی پتانسیل آن را افزایش می‌دهد.

از آنجا که نیروی وارد بر سر متحرک یک فنر، منفی نیروی وارد از سوی فنر بر روی جسم متصل به سر متحرک فنر است، پس *کار انجام‌شده روی جسم برابر است با منفی تغییر انرژی پتانسیل فنر.*

یک *فنر پیچشی* که در برابر چرخش یک میل‌گردان یا عضو دیگری مقاومت می‌کند، همچنین می‌تواند انرژی پتانسیل را ذخیره و رها کند. اگر *سختی پیچشی* را برحسب گشتاور به‌ازای هر رادیان پیچش، با ثابت K نشان دهیم، و اگر θ زاویهٔ پیچش برحسب رادیان باشد، گشتاور مقاوم $M = K\theta$ خواهد بود. به‌این‌ترتیب انرژی پتانسیل به‌صورت $V_e = \int_۰^\theta K\theta\,d\theta$ درمی‌آید یا

$$V_e = \frac{۱}{۲}K\theta^۲ \qquad (\text{الف } ۴.۷)$$

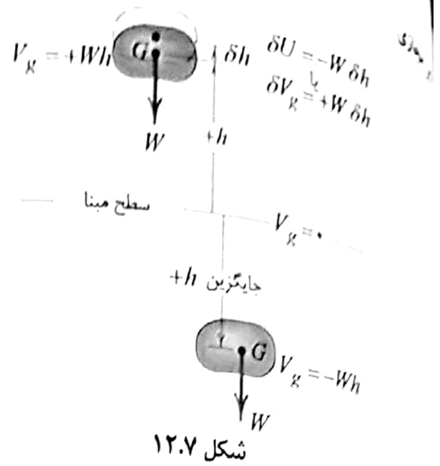
که مشابه توصیف کشیدگی خطی فنر است.

یکاهای انرژی پتانسیل کشسانی مانند یکاهای کار است. یعنی در سیستم SI برابر ژول (J) و در سیستم U.S. برحسب فوت ـ پوند (ft·lb) است.

انرژی پتانسیل گرانشی

در بخش قبل، کار انجام‌شده توسط نیروی گرانشی یا وزن یک جسم را مانند کار و نیروی فعال دیگر در نظرگرفتیم. پس، به‌ازای تغییرمکان δh جسم به‌طرف بالا،

Scanned by CamScanner



شکل ۱۲.۷

...شکل ۱۲.۷، وزن $W = mg$ کـار منفـی برابـر $\delta U = -mg\delta h$ انجـام ...با اگر جسم دارای جابه‌جایی δh به‌سوی پایین باشد و h به‌سمت پایین ...در نظرگرفته شود، وزن کار مثبت $\delta U = +mg\delta h$ را انجام می‌دهد.

...به‌عنوان یک روش دیگر، کار انجام‌شده توسـط گـرانش را برحسـب تغییـر ...پتانسیل جسم بیان می‌کنیم. این روش زمانی مفید است که مـی‌خـواهیم ...سیستم مکانیکی را برحسب انرژی کل آن توصیف کنیم. *انـرژی پتانسـیل* ...V_g یک جسم بنا به تعریف عبارت است از کاری که نیروی برابـر و در ...جهت مخالف با وزن جسم روی آن انجام می‌دهد، و جسم را نسـبت بـه سـطح ...اختیاری که در آن انرژی پتانسیل برابر صفر است تغییر مکان مـی‌دهـد. ...براین انرژی پتانسیل عبارت است از منفی کـاری کـه وزن انجـام مـی‌دهـد. ...عنوان مثال، هنگامی که جسم به‌سوی بالا کشانده می‌شود، کار انجام‌شده بـه ...انرژی تبدیل می‌شود که بالقوه در دسترس است، زیرا جسم به‌هنگـام بازگشـت ...موقعیت پایین‌تر قبلی خود، قادر به انجام کار بر روی جسمی دیگر است. اگر ...$h = 0$، V_g را صفر در نظر بگیریم، شکل ۱۲.۷، آنگاه بـرای جسـمی کـه در ...ارتفاع h بالای سطح مبناست، انرژی پتانسیل گرانشی جسم برابر است با

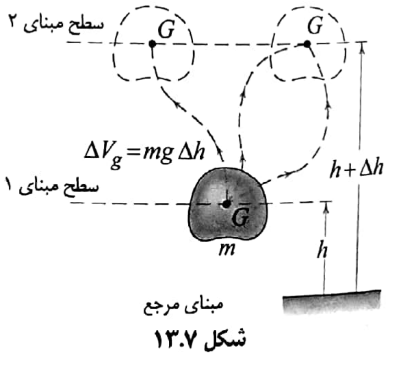
$$V_g = mgh \qquad (۵...)$$

...چنانچه جسم در فاصلهٔ h زیر سطح مبنـای انتخـابی باشـد، انـرژی پتانسـیل ...گرانشی آن $-mgh$ خواهد بود.

...توجه کنید که سطح مبنا یک سطح فرضی دلخواه است که در آن $h = 0$ است، ...آنچه که اهمیت دارد *تغییرات* انرژی پتانسیل اسـت و تغییـرات انـرژی پتانسـیل ...گرانشی بین دو نقطهٔ مستقل از مسیر پیموده‌شده برای رسیدن به ارتفـاع مـورد نظـر ...است. مثلاً در شکل ۱۳.۷ تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی بین دو سـطح مبنـای ۱ و ...صرف‌نظر از مسیری که برای رفتن از صفحهٔ مبنای ۱ به صفحهٔ مبنای ۲ پیمـوده ...می‌شود برای هر سه مسیر ثابت است زیرا Δh برای هر سه مسیر یکسان است.

...تغییر مجازی انرژی پتانسیل گرانشی چنین است

$$\delta V_g = mg\delta h$$



شکل ۱۳.۷

که در رابطهٔ بالا δh تغییر مکان مجازی مرکز جرم در امتداد روبه‌بالاست. اگر تغییر مکان مجازی مرکز جرم روبه‌پایین باشد، δV_g منفی خواهد بود.

یکاهای انرژی پتانسـیل گرانشـی در دسـتگاه SI برحسـب ژول (J)، و در سیستم یکای U.S. برحسب فوت ـ پوند (ft·lb) است.

معادلهٔ انرژی

چنانکه قبلاً دیده شد، کار انجام‌یافته *توسط* یک فنر خطی *بر* روی جسـمی کـه به سر متحرک آن متصل است، برابر منفی تغییر انرژی پتانسیل کشسـانی فنـر است. به‌طور مشابه کار انجام‌شده توسط نیروی گرانشی یا وزن یک جسم برابـر است با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی آن جسم. بنابراین هنگامی که معادلهٔ کار مجازی را در مورد سیستم‌هایی به‌کـار مـی‌بـریم کـه دارای فنـر هسـتند و موقعیت قائم اعضای آنها تغییر می‌کند، می‌توان کار فنرها و کـار وزنـه‌هـا را بـا منفی تغییرات انرژی پتانسیل جایگزین کرد.

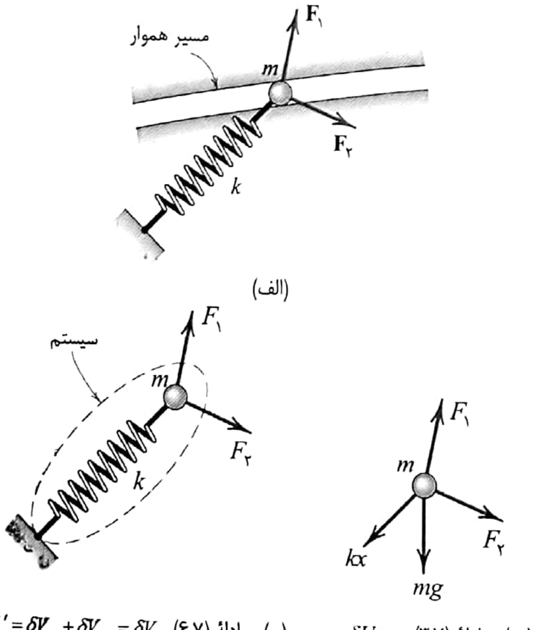
با استفاده از این جایگذاری‌ها می‌توان کل کار مجازی δU در معادلهٔ (۳.۷) را به‌صورت مجموع کار $\delta U'$ انجام‌شده توسط تمام نیروهای فعال، *به‌جز نیروی فنر و نیروی وزن* نوشت. جملهٔ $-(\delta V_e + \delta V_g)$ نیز کار نیروی فنـر و نیـروی وزن را نشان می‌دهد. بنابراین معادلهٔ (۳.۷) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\delta U' - (\delta V_e + \delta V_g) = 0 \quad \text{یا} \quad \delta U' = \delta V \qquad (۶.۷)$$

در ایـن رابطـه $V = V_e + V_g$ انـرژی پتانسـیل کـل سیسـتم اسـت. بـا ایـن فرمول‌بندی، فنر به‌عنوان یک *نیروی داخلـی* سیسـتم محسـوب شـده و کـار نیروهای فنر و گرانشی در جملهٔ δV منظور می‌شود.

نمودار نیروهای فعال

در حین استفاده از روش کار مجازی، رسم *نمودار نیروهای فعال* سیستم موردتحلیـل سودمند است. عضوهایی کـه قسـمتی از سیسـتم هسـتند، توسـط مـرز سیسـتم، از عضوهایی که قسمتی از سیستم نیستند به‌وضوح متمـایز مـی‌شـوند. وقتـی در مـرز سیستم خود عضوی کشسان قرار می‌دهیم، نیروهای متقابل بین آن عضو و اعضـای متحرک متصل به آن سیستم به‌عنوان نیروهای *داخلی* محسوب می‌شوند و نیازی به نشان‌دادن آن نیست، زیرا تأثیر آن در جملهٔ V_e منظور می‌شود. به‌طور مشابه، نیروهای وزن نشان داده نمی‌شوند زیرا کار آنها در جملهٔ V_g در نظرگرفته شده است.



(ج) معادلهٔ (۶.۷) $\delta U' = \delta V_e + \delta V_g = \delta V$ (ب) معادلهٔ (۳.۷) $\delta U = 0$

شکل ۱۴.۷

Scanned by CamScanner

با توجه به شکل ۱۴.۷ می‌خواهیم دربارهٔ تفاوت کاربرد معادلهٔ (۳.۷) و (۶.۷) بحث کنیم. برای سهولت، جسم نشان‌داده‌شده در شکل ۱۴.۷ (الف) را به‌صورت یک ذره اختیار کرده و فرض می‌کنیم تغییر مکان مجازی در امتداد یک مسیر ثابت است. این ذره تحت تأثیر نیروهای واردهٔ F_1 و F_2 و نیروی وزن mg، نیروی فنر kx و نیروی واکنش عمود بر سطح تماس در حالت تعادل قرار دارد. در شکل ۱۴.۷ (ب)، ذره از سایر اجزا جدا شده است و δU شامل کار مجازی تمام نیروهای فعال نشان‌داده‌شده در نمودار نیروی فعال ذره است. (نیروی واکنش عمودی که مسیر همواره بر ذره اعمال می‌کند کاری انجام نمی‌دهد و حذف شده است.) در شکل ۱۴.۷ (ج) مجموعهٔ *ذره ـ فنر* به‌عنوان سیستم در نظرگرفته شده است، و $\delta U'$ کار مجازی تنها F_1 و F_2 است، که تنها نیروهای خارجی هستند که کار آنها در جمله‌های انرژی پتانسیل به حساب نمی‌آیند. کار نیروی وزن mg در جملهٔ δV_g و کار نیروی فنر در جملهٔ δV_e منظور می‌شود.

اصل کار مجازی

در یک سیستم مکانیکی که شامل عضوهای کشسان و عضوهایی است که تغییر موقعیت می‌دهند. اصل کار مجازی به‌صورت زیر بیان می‌شود

کار مجازی انجام‌شده توسط تمام نیروهای فعال خارجی (به استثنای کار نیروهای گرانشی و نیروی فنر و نیروی وزن فنر) بر روی یک سیستم مکانیکی در حال تعادل برابر است با تغییر متناظر در انرژی پتانسیل کشسان و گرانشی سیستم به‌ازای همهٔ جابه‌جایی‌های مجازی سازگار با قیدهای سیستم.

پایداری تعادل

اکنون حالتی از سیستم‌های مکانیکی را در نظر بگیرید که در آن تغییر مکان با تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی و کشسانی همراه است و نیروهای غیرپتانسیل کاری بر روی سیستم انجام نمی‌دهند. سازوکار بررسی‌شده در مسئلهٔ نمونهٔ ۶.۷ نمونه‌ای از چنین سیستمی است. با $\delta U'=۰$، رابطهٔ کار مجازی، معادلهٔ (۶.۷)، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\delta(V_e+V_g)=۰ \quad \text{یا} \quad \delta V=۰ \qquad (۷.۷)$$

معادلهٔ (۷.۷) بیان می‌کند که انرژی پتانسیل کل V یک سیستم مکانیکی در حال تعادل دارای یک مقدار ثابت است. در سیستمی با یک درجهٔ آزادی که در آن انرژی پتانسیل و مشتق‌های آن که وضع سیستم را نشان می‌دهند، توابع پیوسته‌ای از یک متغیر تنها مانند x هستند. شرط تعادل $\delta V=۰$ از نظر ریاضی با شرط زیر معادل است

$$\frac{dV}{dx}=۰ \qquad (۸.۷)$$

طبق معادلهٔ (۸.۷)، یک سیستم مکانیکی زمانی در حال تعادل است که مشتق انرژی پتانسیل کل آن صفر باشد. برای سیستم‌هایی با چند درجهٔ آزادی، مشتق جزئی V نسبت به هریک از مختصات به‌نوبهٔ‌خود، در حالت تعادل باید برابر صفر باشد.[۱]

معادلهٔ (۸.۷) در سه حالت به‌کار می‌رود: *تعادل پایدار*، *تعادل ناپایدار* و *تعادل خنثی* که در شکل ۱۵.۷ هر سه حالت نشان داده شده است. در این شکل واضح است که انرژی پتانسیل غلتک در وضعیت پایدار دارای مقدار مینیمم، در وضعیت ناپایدار دارای مقدار ماکزیمم و در وضعیت خنثی دارای مقدار ثابت است.

در حالت تعادل پایدار، انرژی پتانسیل سیستم دارای مقدار حداقل است. در این حالت یک انحراف کوچک از وضع تعادل باعث افزایش انرژی پتانسیل شده و سیستم می‌خواهد به وضع اولیه که دارای کمترین انرژی پتانسیل است برگردد.

۱. به‌عنوان مثالی از سیستم‌های با دو درجهٔ آزادی، مرجع زیر را ببینید:
Art. 43, Chapter 7, first author's *Statics, 2nd Edition, SI Version*, 1975.

شکل ۱۵.۷

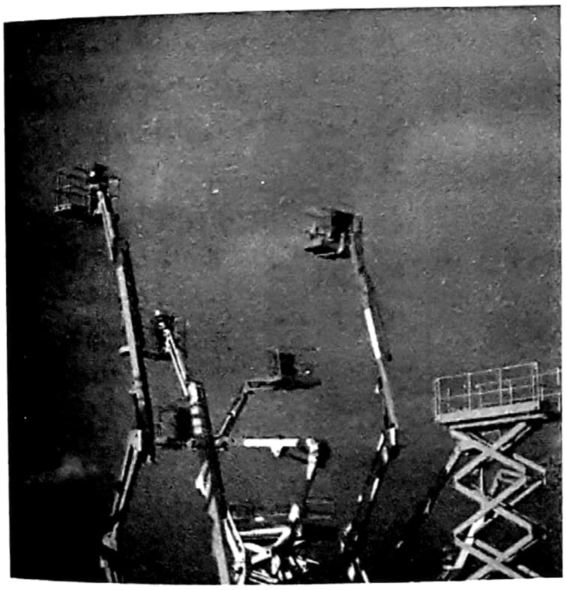
در حالت تعادل ناپایدار، انرژی پتانسیل سیستم دارای مقدار ماکزیمم است. در این حالت یک انحراف کوچک از وضع تعادل باعث کاهش انرژی پتانسیل می‌شود و سیستم می‌خواهد از وضع تعادل اولیهٔ خود خارج شود. در حالت تعادل خنثی انرژی پتانسیل سیستم دارای مقداری ثابت است، و در این حالت انحراف سیستم باعث تغییر انرژی پتانسیل سیستم در آن نمی‌شود و سیستم می‌خواهد در حالت تعادل باقی بماند.

وقتی یک تابع و مشتق‌های آن پیوسته هستند، مشتق‌های دوم در نقطهٔ مینیمم مقدار تابع، دارای مقدار مثبت و در ماکزیمم مقدار تابع، دارای مقدار منفی هستند. بنابراین، شرط ریاضی برای تعادل و پایداری سیستم با یک درجهٔ آزادی x عبارت است از

$$\begin{aligned} &\frac{dV}{dx}=۰ && \text{تعادل} \\ &\frac{d^2V}{dx^2}>۰ && \text{پایدار} \\ &\frac{d^2V}{dx^2}<۰ && \text{ناپایدار} \end{aligned} \qquad (۹.۷)$$

ممکن است مشتق دوم V در نقطهٔ تعادل صفر باشد، در این‌صورت برای تعیین نوع تعادل باید علامت بالاتر را امتحان کنیم. وقتی مرتبهٔ پایین‌ترین مشتق غیرصفر باقی‌مانده زوج باشد، بسته به اینکه علامت این مشتق مثبت یا منفی باشد، تعادل از نوع پایدار یا ناپایدار خواهد بود. اگر کوچکترین مشتق غیرصفر باقی‌مانده فرد باشد، تعادل از نوع پایدار است، و نمودار V برحسب x دارای نقطهٔ عطفی با شیب صفر در مقدار متناظر با حالت تعادل خواهد بود.

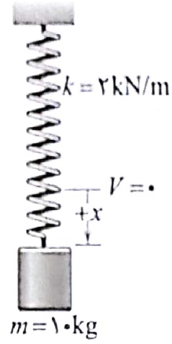
معیارهای پایداری برای سیستم‌های با چند درجهٔ آزادی پیچیده است. مثلاً در سیستم‌های با دو درجهٔ آزادی از بسط سری تیلور برای دو متغیر استفاده می‌شود.

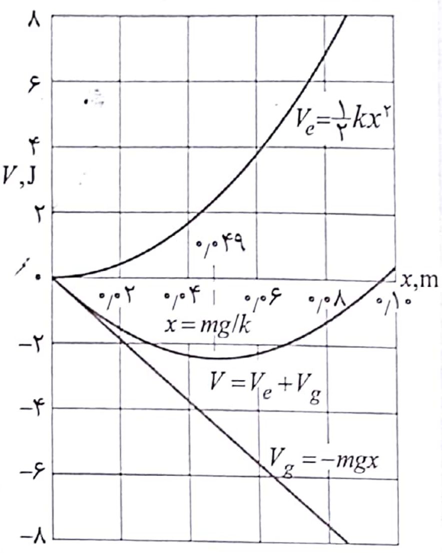


سکوی بالابر، یک نمونه از سازه‌هایی است که با استفاده از روش کار مجازی به‌سهولت تحلیل می‌شود.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۴.۷ استوانه‌ای به‌جرم ۱۰kg از یک فنر با ضریب سختی ۲kN/m آویزان شده است. نمودار انرژی پتانسیل V سیستم را رسم کرده و نشان دهید که انرژی پتانسیل در نقطهٔ تعادل مینیمم است.





حل: (اگرچه در این مسئلهٔ ساده وضعیت تعادل به‌وضوح در جایی است که نیروی فنر با وزن mg برابر است، وانمود می‌کنیم که این واقعیت را نمی‌دانیم تا روابط انرژی را به ساده‌ترین وجه نشان دهیم.) حالت آزاد فنر را به‌عنوان سطح مبنا انتخاب می‌کنیم. در این سطح انرژی پتانسیل سیستم برابر صفر است. ➊

انرژی پتانسیل کشسانی و انرژی پتانسیل گرانشی سیستم به‌ترتیب $V_e=\frac{1}{2}kx^2$ و $-mgx$ است، بنابراین انرژی پتانسیل کل برابر است با

$$[V=V_e+V_g] \qquad V=\frac{1}{2}kx^2-mgx$$

در وضعیت تعادل

$$\left[\frac{dV}{dx}=0\right] \qquad \frac{dV}{dx}=kx-mg=0 \qquad x=mg/k$$

اگرچه می‌دانیم که تعادل پایدار است، با تعیین علامت مشتق دوم V در حالت تعادل، پایداری تعادل را ثابت می‌کنیم. بنابراین $d^2V/dx^2=k$ مثبت است و ثابت می‌شود که سیستم دارای تعادل پایدار است.

با جایگذاری مقادیر عددی نتیجه می‌شود

$$V=\frac{1}{2}(2000)x^2-10(9{,}81)x$$

که برحسب ژول بیان می‌شود و مقدار x متناظر با حالت تعادل برابر است با

$$x=10(9{,}81)/2000=0{,}0490\text{m} \quad \text{یا} \quad 49{,}0\text{mm}$$ ج.

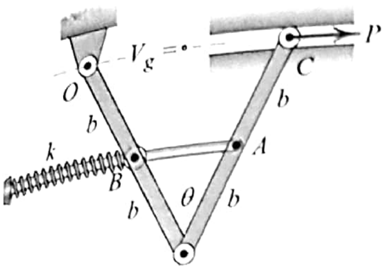
V را برای مقادیر مختلف x محاسبه می‌کنیم و نمودار آن را برحسب x مطابق شکل رسم می‌کنیم. نقطهٔ $x=0{,}0490$m نقطهٔ مینیمم این نمودار است که در این نقطه $\frac{dV}{dx}=0$ و $\frac{d^2V}{dx^2}$ مثبت است. ➋

راهنمایی‌های مفید

➊ سطح مبنا به‌دلخواه انتخاب می‌شود، اما بهتر است مکانی انتخاب شود که محاسبات را ساده‌تر کند.

➋ می‌توانستیم برای V_e و V_g صفحات مبنای متفاوتی انتخاب کنیم، بدون آنکه تأثیری بر نتایج ما بگذارد. چنین تغییری تنها نمودارهای جداگانهٔ V_e و V_g را بالا یا پایین می‌برد اما اثری بر محل مقدار مینیمم V ندارد.

Scanned by CamScanner



دو میلهٔ یکنواخت هریک به‌جرم m در صفحهٔ قائم قرار دارد و مطابق شکل به یکدیگر متصل و مقید شده‌اند. هنگامی که در اثر اعمال نیروی افقی P، زاویهٔ θ بین دو میلهٔ رابط افزایش می‌یابد، میلهٔ سبک‌وزنی که در A متصل شده و از میان غلاف واقع در B می‌گذرد، فنری با سختی k را فشرده می‌سازد. درصورتی که فنر در موقعیت متناظر $\theta = 0$ فشرده نشده باشد، نیروی P را که حالت تعادل در زاویهٔ θ ایجاد می‌کند، تعیین کنید.

حل: از شکل نشان‌داده‌شده به‌عنوان نمودار نیروهای فعال استفاده می‌شود. فشردگی x فنر، فاصله‌ای است که A از B دور می‌شود و برابر است با $x = 2b\sin\theta/2$. از این‌رو، انرژی پتانسیل کشسانی فنر عبارت است از

$$\left[V_e = \frac{1}{2}kx^2\right] \qquad V_e = \frac{1}{2}k\left(2b\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 2kb^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

اگر سطح مبنا را که در آن انرژی گرانشی صفر است، به‌عنوان تکیه‌گاه O در نظر بگیریم، رابطهٔ V_g چنین می‌شود

$$[V_g = mgh] \qquad V_g = 2mg\left(-b\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

فاصلهٔ بین O و C برابر $4b\sin\theta/2$ است، بنابراین کار مجازی انجام‌شده توسط P برابر است با

$$\delta U' = P\delta\left(4b\sin\frac{\theta}{2}\right) = 2Pb\cos\frac{\theta}{2}\delta\theta$$

اکنون از معادلهٔ کار مجازی داریم

$$[\delta U' = \delta V_e + \delta V_g]$$

$$2Pb\cos\frac{\theta}{2}\delta\theta = \delta\left(2kb^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \delta\left(-2mgb\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2kb^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\delta\theta + mgb\sin\frac{\theta}{2}\delta\theta$$

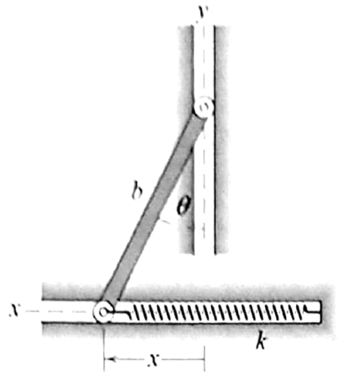
و در پایان بعد از ساده‌کردن داریم

$$P = kb\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}mg\tan\frac{\theta}{2} \qquad \text{ج.}$$

اگر از ما در مورد مقدار θی متناظر با نیروی معین P در حالت تعادل، سؤال می‌شد، به‌دست آوردن رابطهٔ صریح θ مشکل بود. اما برای حل عددی مسئله، می‌توانستیم از تحلیل کامپیوتری و ترسیم نمودار مقادیر عددی مجموع دو تابع θ استفاده کنیم و مقداری از θ را که برای آن، این مجموع برابر با P شود به‌دست آوریم.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ ۶.۷ میلهٔ یکنواختی به‌جرم m آزادانه در راهنماهای افقی و عمودی می‌لغزد. فنر با سختی k در دو سر میله در وضعیت $x=0$ آزاد است. شرایط پایداری را در وضعیت‌های تعادل بررسی کنید.



حل: این سیستم شامل یک فنر و یک میله است. چون هیچ‌گونه نیروی فعال خارجی در این سیستم وجود ندارد، از شکل نشان‌داده‌شده به‌عنوان نمودار نیروی فعال استفاده می‌کنیم. محور x را معمول مبنا برای انرژی پتانسیل گرانشی صفر در نظر می‌گیریم. در وضعیت جابه‌جاشده انرژی پتانسیل گرانشی و کشسانی عبارت‌اند از ❶

$$V_e=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kb^2\sin^2\theta \quad \text{و} \quad V_g=mg\frac{b}{2}\cos\theta$$

و انرژی کل برابر است با

$$V=V_e+V_g=\frac{1}{2}kb^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}mgb\cos\theta$$

وقتی تعادل رخ می‌دهد که $\frac{dV}{d\theta}=0$، پس

$$\frac{dV}{d\theta}=kb^2\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}mgb\sin\theta=(kb^2\cos\theta-\frac{1}{2}mgb)\sin\theta=0$$

دو پاسخ معادلهٔ فوق چنین است

$$\sin\theta=0 \quad \text{و} \quad \cos\theta=\frac{mg}{2kb}$$

❷

اکنون با تعیین علامت مشتق دوم V، در هر دو حالت تعادل، نوع پایداری را تعیین می‌کنیم. مشتق دوم برابر است با

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=kb^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-\frac{1}{2}mgb\cos\theta$$
$$=kb^2(2\cos^2\theta-1)-\frac{1}{2}mgb\cos\theta$$

حل ۱: $\sin\theta=0$، $\theta=0$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=kb^2(2-1)-\frac{1}{2}mgb=kb^2\left(1-\frac{mg}{2kb}\right)$$

ج. = مثبت (پایدار)، اگر $k>mg/2b$
= منفی (ناپایدار)، اگر $k<mg/2b$

❸ بنابراین اگر فنر به‌اندازهٔ کافی سفت باشد، میله به وضعیت عمودی برمی‌گردد، حتی اگر نیرویی به آن وارد نشود.

حل ۲: از رابطهٔ $\cos\theta=\frac{mg}{2kb}$، نتیجه می‌گیریم که $\theta=\cos^{-1}\frac{mg}{2kb}$. اکنون مشتق دوم V را ارزیابی می‌کنیم

$$\text{ج.}\quad \frac{d^2V}{d\theta^2}=kb^2\left[2\left(\frac{mg}{2kb}\right)^2-1\right]-\frac{1}{2}mgb\left(\frac{mg}{2kb}\right)=kb^2\left[\left(\frac{mg}{2kb}\right)^2-1\right]$$

چون $\cos\theta$ باید کوچکتر از یک باشد، ملاحظه می‌شود که حل محدود به حالتی می‌شود ❹ که $k>\frac{mg}{2b}$، در نتیجه مشتق دوم V باید منفی باشد. از این‌رو تعادل به‌ازای راه‌حل دوم پایدار نخواهد بود. اگر $k<\frac{mg}{2b}$، راه‌حل دوم را به‌کار نخواهیم برد، زیرا ضریب فنر بسیار کمتر از آن است که سیستم را در وضعیت $90°>\theta>0$، در وضع تعادل باقی نگه‌دارد.

راهنمایی‌های مفید

❶ وقتی نیروهای فعال خارجی وجود ندارد، جملهٔ $\delta U'$ حذف شده و $\delta V=0$ است و $\frac{dV}{d\theta}=0$ خواهد بود.

❷ مراقب باشید که پاسخ $\theta=0$ را که از $\sin\theta=0$ حاصل می‌شود، نادیده نگیرید.

❸ بدون تحلیل پایداری تعادل این نتیجه قابل پیش‌بینی نمی‌بود.

❹ دوباره می‌بینیم که بدون تحلیل ریاضی پایداری هم ممکن بود به نتیجهٔ وضعیت پایدار میله در زاویهٔ θ بین 0 و $90°$ برسیم.

Scanned by CamScanner

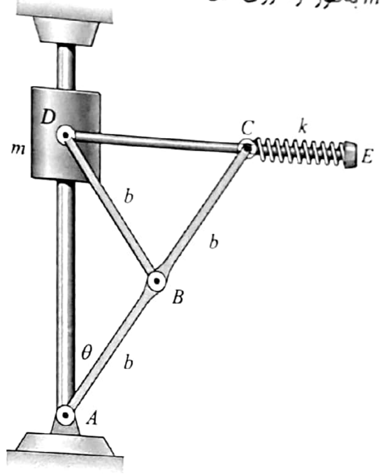
مسائل

فرض کنید که کار منفی اصطکاک در مسائل زیر ناچیز است.

مسائل مقدماتی

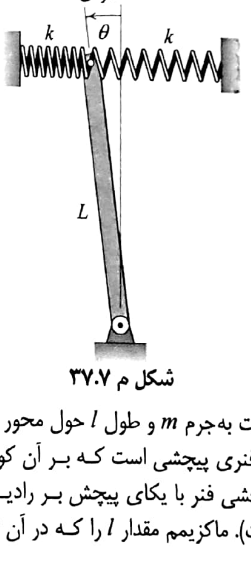
۳۵.۷ انرژی پتانسیل یک سیستم مکانیکی با رابطهٔ $V = 6x^{2} - 3x^{2} + 5$ داده شده که در آن x وضعیت مختصاتی است که وضعیت سیستم با یک درجهٔ آزادی را تعریف می‌کند. وضعیت‌های تعادل x و شرایط پایداری هرکدام را تعیین کنید.

۳۶.۷ در سازوکار نشان‌داده‌شده فنر در زاویهٔ $\theta = 0$ آزاد است. زاویهٔ θ در وضعیت تعادل را تعیین کنید و حداقل سختی فنر k را وقتی θ به 30° محدود شود، مشخص کنید. میلهٔ DE آزادانه داخل طوقه روی محور C عبور می‌کند و استوانه به‌جرم m به‌طور آزاد روی میل‌گردان ثابت قائم می‌لغزد.



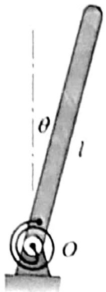
شکل م ۳۶.۷

۳۷.۷ میلهٔ یکنواختی به‌جرم m و طول L در صفحهٔ قائم با دو فنر مشابه، هریک به‌سختی k و فشردگی δ، در وضعیت قائم $\theta = 0$ نگه داشته شده است. مینیمم سختی k را طوری تعیین کنید که به‌ازای $\theta = 0$ پایداری تعادل تضمین شود. فرض می‌شود در حین حرکت زاویه‌ای کوچک میله، فنرها در امتداد افقی حرکت می‌کنند.



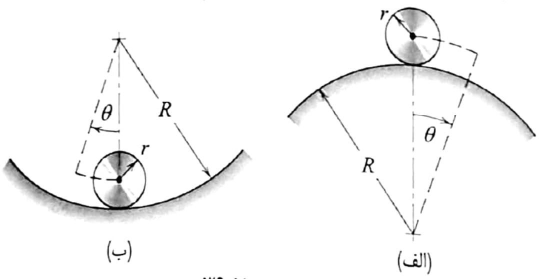
شکل م ۳۷.۷

۳۸.۷ میله‌ای یکنواخت به‌جرم m و طول l حول محور افقی گذرنده از سر O، لولا شده و متصل به فنری پیچشی است که بر آن کوپل $M = K\theta$ را وارد می‌کند (K سختی پیچشی فنر با یکای پیچش بر رادیان و θ زاویهٔ انحراف میله از حالت قائم است). ماکزیمم مقدار l را که در آن تعادل در $\theta = 0$ پایدار است تعیین کنید.



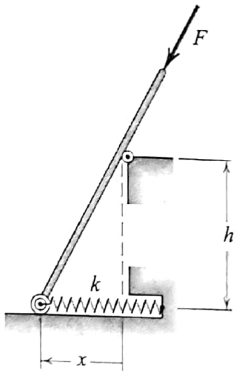
شکل م ۳۸.۷

۳۹.۷ استوانه‌ای کوچک به‌جرم m و شعاع r مقید شده است که روی سطح دایره‌ای به‌شعاع R بغلتد. با استفاده از روش‌های این بخش ثابت کنید که استوانه در این وضعیت (الف) ناپایدار و در وضعیت (ب) پایدار است.



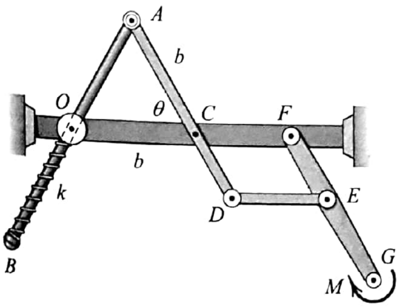
شکل م ۳۹.۷

۴۰.۷ برای فنر نگهدارندهٔ میله، مقدار x را برای تعادل معین کنید. وقتی $x = 0$ فنر دارای سختی k بوده و آزاد است. نیروی F وارد بر امتداد میله را معین کنید از جرم میله صرف‌نظر کنید.



شکل م ۴۰.۷

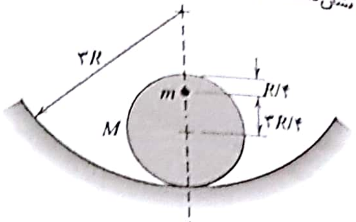
۴۱.۷ در سازوکار نشان‌داده‌شده، میلهٔ AB روی محور O داخل طوقه می‌لغزد و فنر را وقتی کوپل M بر اتصال GF وارد می‌شود تا زاویهٔ θ را افزایش دهد، فشرده می‌سازد. سختی فنر برابر k و در وضع آزاد $\theta = 0$ است. زاویهٔ θ را برای تعادل معین کنید. از وزن اتصال‌ها صرف‌نظر کنید. شکل $CDEF$ یک متوازی الاضلاع است.



شکل م ۴۱.۷

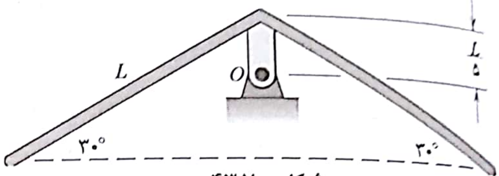
Scanned by CamScanner

۴۲.۷ استوانه‌ای به‌جرم M و شعاع R بدون لغزش روی سطح دایره‌ای به شعاع $3R$ می‌غلتد. جسم کوچکی به‌جرم m به استوانه چسبیده است. اگر سیستم در تعادل نشان‌داده‌شده پایدار بماند، رابطهٔ لازم بین M و m را معین کنید.



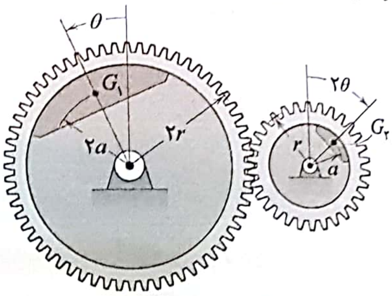
شکل م ۴۲.۷

۴۳.۷ دو میلهٔ یکنواخت با زاویهٔ °۱۲۰ به‌هم جوش داده شده و مطابق شکل در نقطهٔ O لولا شده‌اند. جرم تکیه‌گاه‌ها در مقایسه با جرم میله‌ها کوچک است. پایداری وضعیت تعادل نشان‌داده‌شده را بررسی کنید.



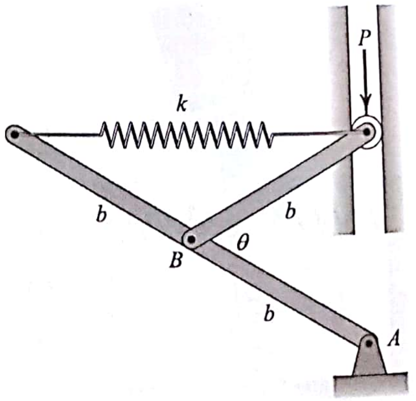
شکل م ۴۳.۷

۴۴.۷ هریک از دو چرخ‌دنده یک جرم خارج از مرکز به‌جرم m را حمل می‌کنند و برای چرخیدن در صفحهٔ قائم حول یاتاقان خود آزاد هستند. مقادیر θ را برای تعادل تعیین نموده و نوع تعادل را برای هر وضعیت مشخص کنید.



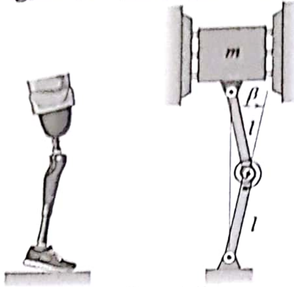
شکل م ۴۴.۷

۴۵.۷ در سازوکار نشان‌داده‌شده، طول کشیده‌نشدهٔ فنری با سختی k اصولاً صفر است و جرم اتصال بزرگتر m بوده و مرکز جرم آن در B قرار دارد. جرم اتصال کوچکتر قابل صرف‌نظرکردن است. زاویهٔ تعادل θ را به‌ازای نیروی روبه‌پایین P تعیین کنید.



شکل م ۴۵.۷

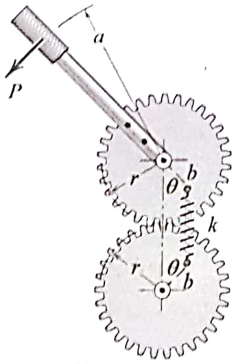
۴۶.۷ یکی از خواسته‌های مهم در طراحی پای مصنوعی، جلوگیری از خم‌شدن مفصل زانوی تحت تاثیر بار است، در حالتی که پا به‌صورت مستقیم قرار می‌گیرد. به‌عنوان اولین تقریب، می‌توان پای مصنوعی را دو میلهٔ سبک و یک فنر پیچشی در مفصل مشترکشان در نظر گرفت. گشتاور حاصل از این فنر با رابطهٔ $M = K\beta$ بیان می‌شود که متناسب با زاویهٔ خمش β در مفصل است. مینیمم مقدار K را طوری معین کنید که پایداری تعادل مفصل زانو به‌ازای $\beta = 0$ تضمین شود.



شکل م ۴۶.۷

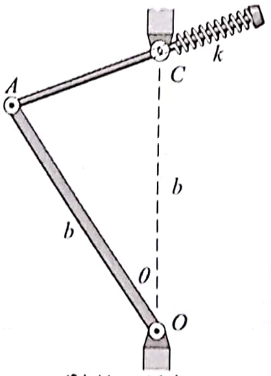
مسائل برگزیده

۴۷.۷ بر روی یکی از دو چرخ‌دندهٔ زیر که در یاتاقان‌های ثابت خود قرار دارند و توسط یک فنر به یکدیگر متصل شده‌اند، دسته‌ای محکم شده است. فنر با سختی k دو پین نصف شده را بر روی سطح چرخ‌دنده‌ها به‌هم مربوط کرده است. وقتی دسته در وضع قائم باشد $\theta = 0$، و نیروی فنر صفر است. نیروی P مورد نیاز را برای نگهداری تعادل در زاویهٔ θ تعیین کنید.



شکل م ۴۷.۷

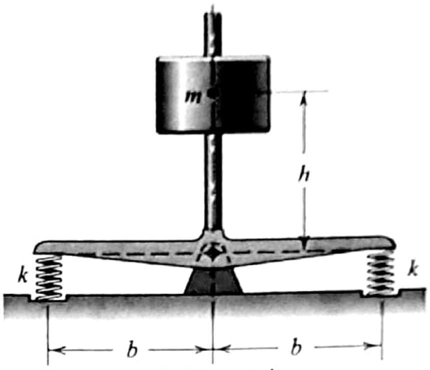
۴۸.۷ شکل زیر نمای جانبی دریچهٔ تهویهٔ یکنواخت OA به جرم m را نشان می‌دهد که فضای باز OC را در دیوار عمودی مسدود می‌کند. در $\theta = 0$، فنری با سختی k آزاد است و میلهٔ سبک محدودکنندهٔ این زاویه از داخل طوقهٔ مفصل‌شدهٔ C می‌گذرد. با توجه به این طرح نشان دهید که در صورت مناسب بودن سختی k، دریچه در هر زاویهٔ θ در حالت تعادل باقی می‌ماند.



شکل م ۴۸.۷

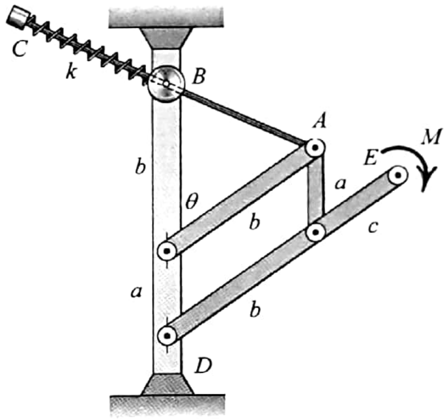
Scanned by CamScanner

۴۹.۷ حداکثر ارتفاع h جرم m را برای اینکه پاندول به‌طور معکوس در وضع نشان‌داده‌شده پایدار باشد، معین کنید. هریک از فنرها دارای سختی k و پیش‌فشردگی یکسان هستند. از جرم بقیهٔ سازوکار صرف‌نظر کنید.



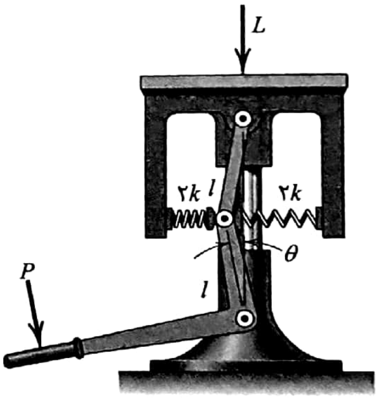
شکل م ۴۹.۷

۵۰.۷ در سازوکار نشان‌داده‌شده، میلهٔ AC در داخل غلاف لولاشده در B لغزیده و هنگامی‌که کوپل M بر رابط DE وارد می‌شود، فنر را فشرده می‌سازد. سختی فنر k است و در وضعیت $\theta = ۰$ غیرفشرده است. زاویهٔ θ را برای تعادل سیستم معین نموده و از جرم اجزای دیگر صرف‌نظر کنید.



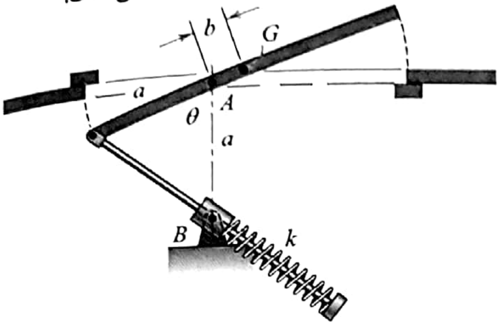
شکل م ۵۰.۷

۵۱.۷ شکل زیر یک بالابر صنعتی کوچک را که با پدال پایی خلاص می‌شود نشان می‌دهد که دارای چهار فنر یکسان است. هر جفت از این فنرها در یک سمت میل‌گردان مرکزی قرار دارند. سختی هر جفت فنر برابر $۲k$ می‌باشد. در طراحی بالابر مقدار k را طوری تعیین کنید که تعادل پایدار بالابر هنگام بالابردن بار L در موقعیت $\theta = ۰$ بدون واردآمدن نیروی P بر پدال، تضمین شود. پیش‌فشردگی اولیهٔ فنرها یکسان‌اند و می‌توان فرض کرد که همواره در امتداد افق اثر می‌کنند.



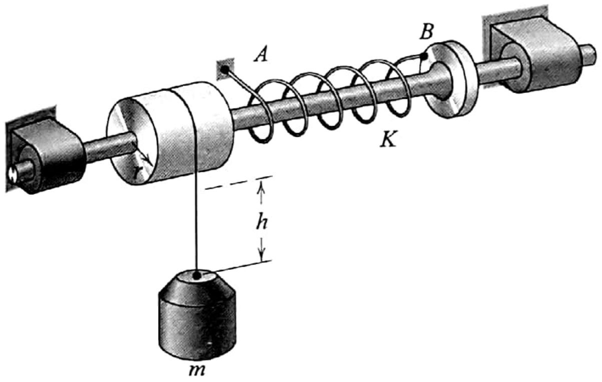
شکل م ۵۱.۷

۵۲.۷ مقطع عرضی یک دریچهٔ خوابیده در نقطهٔ A آویزان و دارای جرم m است که مرکز جرم آن مطابق شکل در نقطهٔ G است. فنر توسط میله‌ای فشرده می‌شود که در انتهای پایین دریچه لولا شده، و از داخل قطعهٔ نوسان‌کننده در نقطهٔ B عبور می‌کند. وقتی $\theta = ۰$، فنر آزاد است. نشان دهید که با سختی k مربوط به فنر، دریچه برای هر مقدار θ در حالت تعادل است.



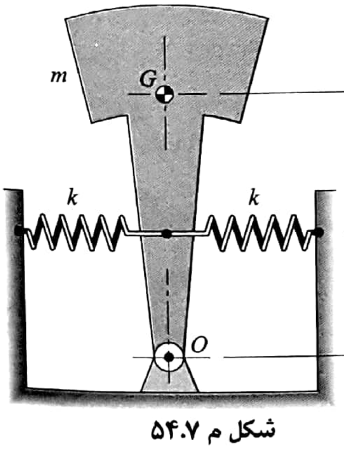
شکل م ۵۲.۷

۵۳.۷ یک سر فنر پیچشی در نقطهٔ A به زمین و انتهای دیگر آن به میل‌گردان B متصل است. منحنی پیچشی K فنر کشسان، برابر است با گشتاور مورد نیاز برای پیچاندن فنر به‌اندازهٔ زاویه‌ای مساوی با یک رادیان. فنر در برابر گشتاور حاصل از کشش mg در کابل پیچیده شده به دور استوانه‌ای به‌شعاع r حول میل‌گردان مقاومت می‌کند. مقدار h در حالت تعادل را نسبت به وضعیت خط‌چین، که متناظر با حالت غیرپیچشی فنر است، تعیین کنید.



شکل م ۵۳.۷

۵۴.۷ پاندول معکوسی به‌جرم m و مرکز جرم G توسط دو فنر هریک به‌ترتیب با سختی k نگه داشته شده است. اگر وقتی پاندول در وضعیت تعادل نشان داده شده باشد، فنرها به اندازهٔ برابر متراکم شوند؛ وضعیت تعادل استاتیکی را معین نموده و پایداری سیستم در هر وضعیت را تحقیق کنید. فنرها را به‌منظور ماندن مؤثر در وضعیت افقی به‌اندازهٔ کافی بلند در نظر بگیرید.

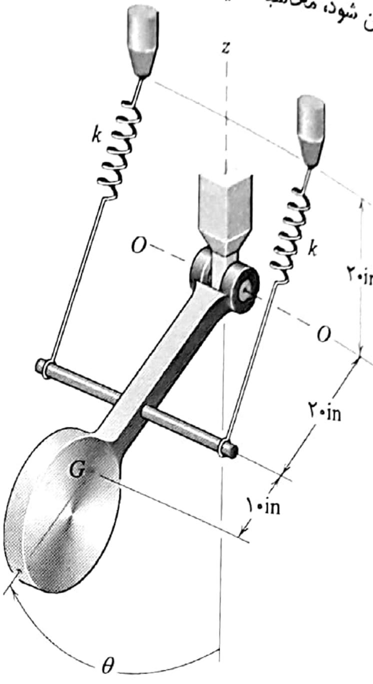


شکل م ۵۴.۷

Scanned by CamScanner

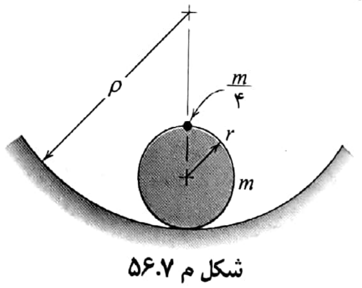
... مجازی

۵۵.۷ آونگ ۳lb حول محور O-O با مرکز جرم G نوسان می‌کند. ... $\theta = ۰$ است، هر فنر دارای یک کشیدگی ۴in می‌باشد. ماکزیمم سختی k هر یک از فنرهای موازی را به‌گونه‌ای که تعادل پایدار آونگ در وضعیت ... $\theta = ۰$ ممکن شود، محاسبه کنید.



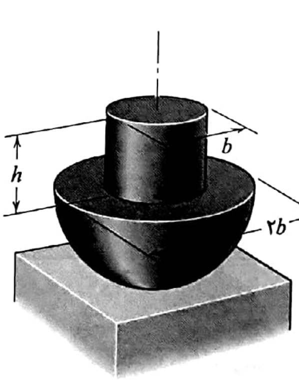
شکل م ۵۵.۷

۵۶.۷ استوانه‌ای به‌جرم m و شعاع r بر روی سطح دایره‌ای به‌شعاع ρ بدون لغزیدن می‌غلتد. به استوانه جسم کوچکی به‌جرم $m/۴$ متصل شده است. حداکثر مقدار ρ را برای اینکه جسم در تعادل پایدار بماند معین کنید.



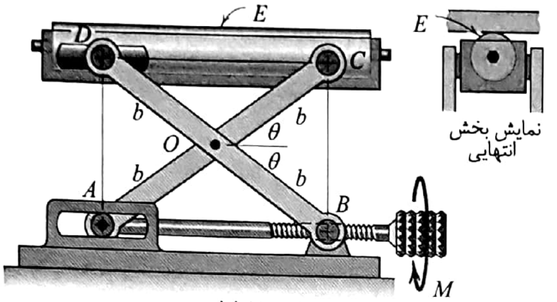
شکل م ۵۶.۷

۵۷.۷ نیم‌کره‌ای توپر به‌قطر ۲b با برآمدگی استوانه‌ای هم‌مرکز با آن به‌قطر b داخل استوانه روی سطح افقی قرار گرفته است. حداکثر ارتفاع h را که برآمدگی استوانه‌ای می‌تواند داشته باشد تا این مجموعه در وضعیت روبه‌بالای نشان‌داده‌شده، حالت ناپایدار نداشته باشد، تعیین کنید. هر دو قطعه از یک جنس ساخته شده‌اند.



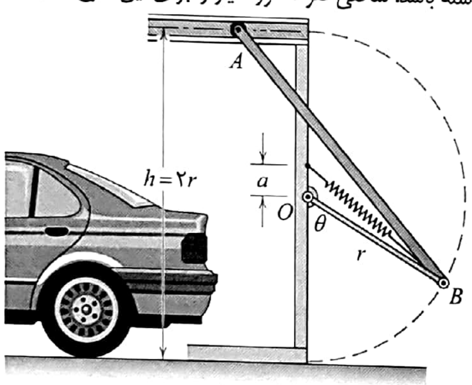
شکل م ۵۷.۷

◀ ۵۸.۷ پایهٔ غلتکی قابل حمل تکیه‌گاه یک تخته که از دستگاه رندهٔ چوب خارج شده است، با تنظیم دقیق ارتفاع از طریق چرخاندن دستگیرهٔ پیچ تنظیم با گشتاور پیچشی M، طراحی شده است. پیچ تک‌راههٔ رزوهٔ مربعی با پیشروی p است (پیشروی در هر دور) و پیچ از درون طوقهٔ رزوه‌شدهٔ نقطهٔ B می‌گذرد و فاصلهٔ بین نقاط A و B (و بنابراین C و D) را تنظیم می‌کند. غلتک E با نگهدارندهٔ جعبه دارای جرم $m_۱$ و چهار اتصال یکنواخت (دو عدد در هر طرف) دارای جرم $m_۲$ و طول ۲b است. با صرف‌نظرکردن از هر نوع اصطکاک، گشتاور M لازم را برای بلندکردن غلتک برای مقدار زاویهٔ مفروض θ تعیین کنید.



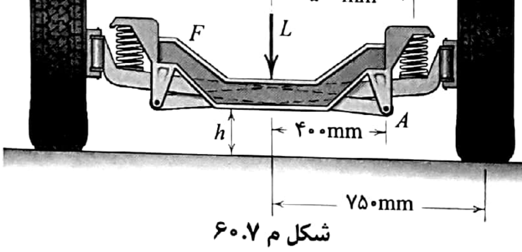
شکل م ۵۸.۷

◀ ۵۹.۷ درب گاراژِ یکنواخت AB که مقطع آن نشان داده شده است، جرمی برابر m دارد و مجهز به دو فنر باردار نشان‌داده‌شده است که هرکدام در یک طرف درب قرار دارد. بازوی OB با جرم ناچیز و گوشهٔ بالایی A از درب برای حرکت افقی روی غلتک آزاد است. طول کشیده‌نشدهٔ فنر برابر $r-a$ است، به‌طوری‌که در وضعیت بالا با $\theta=\pi$ نیروی فنر صفر است. برای اطمینان از روان‌بودن درب هنگامی‌که به وضعیت عمودی بسته‌شدن می‌رسد، $\theta=۰$، لازم است که درب در این وضعیت حساسیتی نداشته باشد. سختی فنر k مورد نیاز را برای این طرح تعیین کنید.



شکل م ۵۹.۷

◀ ۶۰.۷ بر روی کامیون‌های کوچک از سیستم تعلیق دومحورهٔ جلو استفاده می‌شود. در یک آزمایش عملکرد، سیستم شاسی F باید توسط جک تا ارتفاع $h=۳۵۰\text{mm}$ بالا بیاید تا فنرهای مارپیچ از به‌هم‌فشردگی آزاد شوند. مقدار h را پس از خارج‌کردن جک تعیین کنید. سختی هر فنر ۱۲۰kN/m، بار L برابر ۱۲kN، و جرم شاسی مرکزی F برابر ۴۰kg است. جرم مجموعهٔ هر چرخ و بازوی متصل به آن ۳۵kg است و مرکز جرم آن در فاصلهٔ ۶۸۰mm از خط مرکزی عمودی قرار دارد.



شکل م ۶۰.۷

Scanned by CamScanner

۵.۷ مروری بر فصل

در این فصل اصل کار مجازی را مورد بررسی قرار دادیم. این اصل برای تعیین پیکربندی‌های ممکن تعادل برای یک جسم یا سیستم اجسام متصل به‌هم که نیروهای خارجی در آنها معلوم هستند مفید است. برای استفادهٔ موفقیت‌آمیز از این روش، باید مفاهیم تغییر مکان مجازی، درجهٔ آزادی و انرژی پتانسیل را درک کرده باشید.

روش کار مجازی

هنگامی که جسمی یا مجموعه‌ای از اجسام متصل به‌هم می‌توانند در اثر نیروهای اعمال‌شده وضعیت‌های مختلفی را اختیار کنند، وضعیت تعادل را با استفاده از روش کار مجازی، می‌توان به‌دست آورد. برای این منظور باید نکات زیر را مورد توجه قرار داد:

۱. هنگام تعیین وضعیت تعادل، فقط نیروهای فعال را باید در نظرگرفت. (نیروهای فعال نیروهایی‌اند که در یک تغییر مکان مجازی کار انجام می‌دهند.)

۲. آن‌دسته از نیروهای خارجی که کار انجام نمی‌دهند (نیروهای واکنشی)، مورد توجه قرار نمی‌گیرند.

۳. به همین دلیل نمودار نیروهای فعال جسم یا سیستم (به‌جای نمودار جسم آزاد) مفید است که در آن تنها آن‌دسته از نیروهای خارجی در نظرگرفته می‌شوند که ضمن جابه‌جایی کار انجام می‌دهند.

تغییر مکان مجازی

تغییر مکان مجازی یک کمیت دیفرانسیلی مرتبهٔ اول است و می‌تواند به‌صورت تغییرات خطی یا زاویه‌ای باشد. این نوع تغییرات مجازی است زیرا جسم یا سیستم در واقع حرکت نمی‌کند. از نظر ریاضی، تغییر مکان مجازی مانند تغییر مکان دیفرانسیلی واقعی بررسی می‌شود. تغییر مکان‌های مجازی و تغییر مکان‌های واقعی دیفرانسیلی با نمادهای δ و d نشان داده می‌شوند.

مشکل‌ترین قسمت تحلیل در روش کار مجازی، ایجاد ارتباط بین تغییر مکان مجازی خطی و زاویه‌ای اجزای یک سیستم است. برای این منظور:

۱. رابطه‌های هندسی مشخص‌کنندهٔ وضعیت سیستم را می‌نویسیم.

۲. تغییر موقعیت دیفرانسیلی اجزای سیستم را در نظرگرفته و با دیفرانسیل‌گیری از رابطهٔ هندسی بین آنها، معادلات جابه‌جایی مجازی دیفرانسیلی را به‌دست آورید.

درجات آزادی

در این فصل اساساً سیستم‌های مکانیکی با یک درجهٔ آزادی را بررسی کردیم (یعنی سیستم‌هایی که وضعیت آنها با یک متغیر تنها مشخص می‌شود) و برای سیستم‌های با دو یا چند درجهٔ آزادی، معادلهٔ کار مجازی را به تعداد درجات آزادی باید به‌کار بریم، به‌این‌منظور در هر نوبت به یکی از متغیرها اجازهٔ تغییر داده و سایر متغیرها را ثابت نگه می‌داریم.

روش انرژی پتانسیل

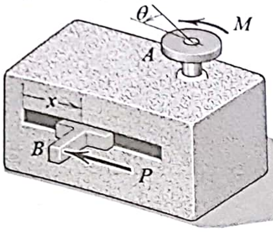
مفهوم انرژی پتانسیل گرانشی (V_g) و انرژی پتانسیل کشسانی (V_e) در حل مسائل تعادل که در آن جابه‌جایی مجازی موجب تغییر وضعیت عمودی مراکز جرم و تغییر طول اجزای کشسان (فنر) می‌شود، مفید است. برای این منظور:

۱. عبارت انرژی پتانسیل کل V سیستم را برحسب متغیری که وضعیت سیستم را مشخص می‌کند به‌دست می‌آوریم؛ سپس این عبارت را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

۲. برای تعیین وضعیت تعادل و بررسی پایداری آن، مشتق‌های اول و دوم انرژی پتانسیل V را تعیین می‌کنیم.

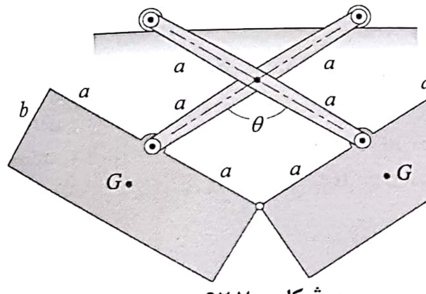
مسائل دوره‌ای

۶۱.۷ سازوکار کنترلی شامل یک میل‌گردان ورودی در A است که با به‌کاربردن یک کوپل M می‌چرخد و دارای یک خروجی لغزندهٔ B است که در امتداد x در برابر اعمال نیروی P می‌لغزد. سازوکار طوری طراحی شده که حرکت خطی B متناسب با حرکت زاویه‌ای A با ازدیاد x برابر ۶۰mm در هر چرخش کامل A هماهنگی کند. اگر $M = 10\,N{\cdot}m$، مقدار P را برای تعادل، با فرض اینکه همهٔ مؤلفه‌های مکانیکی به‌صورت ایده‌آل اجسام صلب متصل به‌هم هستند، تعیین کنید. از اصطکاک داخلی صرف‌نظر کنید.



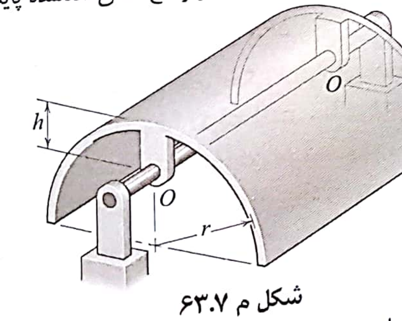
شکل م ۶۱.۷

۶۲.۷ با صرف‌نظرکردن از جرم میله‌های ضربدری، زاویهٔ θ را در وضعیت تعادل سازوکار متقارن در صفحهٔ قائم تعیین کنید. جرم هریک از قطعات مکعبی یکنواخت m بوده و مرکز جرم آنها در G است. زاویهٔ θ را برای موقعیت تعادل در حالت $b=a$ معین کنید.



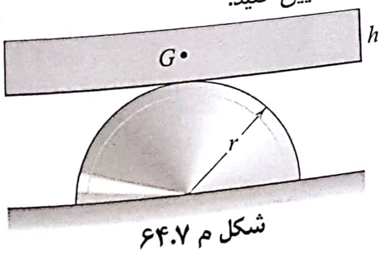
شکل م ۶۲.۷

۶۳.۷ پوستهٔ نیم‌استوانه‌ای به‌شعاع r حول میل‌گردان در نقاط O مطابق شکل لولا شده است. جرم دو تکیه‌گاه در مقایسه با جرم پوسته کوچک است. معین کنید حداکثر مقدار h را برای اینکه تعادل در وضع نشان‌داده‌شده پایدار باشد.



شکل م ۶۳.۷

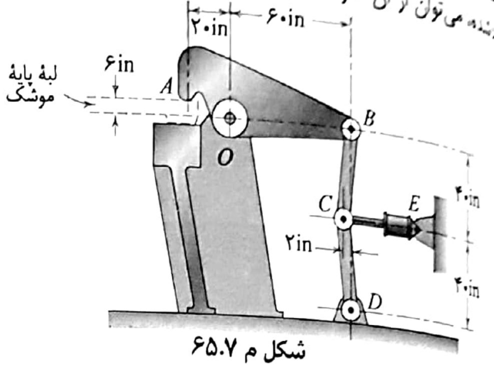
۶۴.۷ یک قطعهٔ یکنواخت مستطیلی به‌ارتفاع h و جرم m در میانهٔ خود بر روی سطح ثابت مدوّری به‌شعاع r به‌صورت افقی قرار گرفته است. مقدار حدی h را برای پایداری قطعه تعیین کنید.



شکل م ۶۴.۷

Scanned by CamScanner

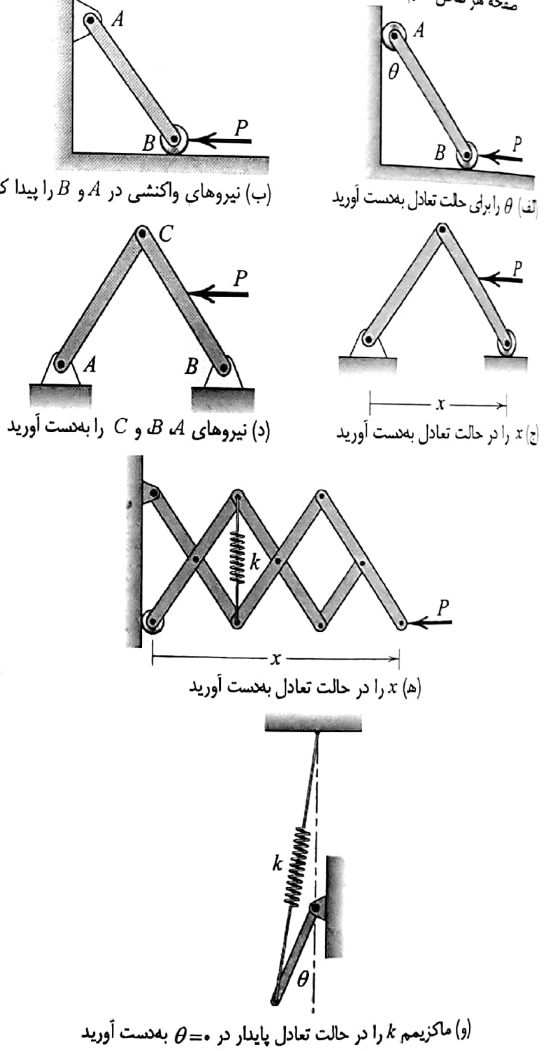
۶۵.۷ شکل نشان‌داده‌شده طرح تقریبی یکی از چهار گیره‌ای است که لبهٔ پایهٔ موشک را پیش از پرتاب به سکو متصل می‌کند. اگر میلهٔ رابط CE تحت اثر نیروی کششی حاصل از فشار هیدرولیکی $2000\,lb/in^2$ وارد بر سمت چپ پیستون سیلندر هیدرولیکی باشد، نیروی دربرگیرندهٔ از قبل تنظیم‌شدهٔ F را در نقطهٔ A حساب کنید. سطح خالص پیستون $16\,in^2$ است. وزن مجموعه قابل ملاحظه است اما به‌دلیل کوچک‌بودن آن در مقایسه با نیروی دربرگیرندهٔ واردشده می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.



شکل م ۶۵.۷

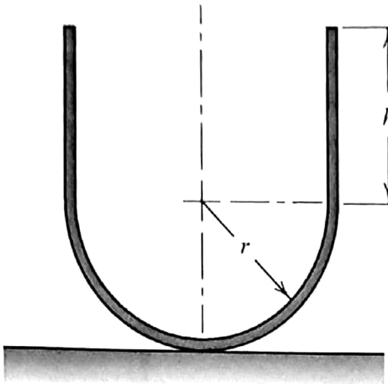
۶۶.۷ مشخص کنید برای حل مسائل (الف) تا (و)، بهترین راه‌حل کدام‌یک از روش‌هاست: (الف) معادلات نیرو و گشتاور، (ب) کار مجازی. در مورد هر مسئله، روش حل را به‌اختصار توضیح دهید.

صفحهٔ هر شکل قائم است. اندازه و جرم هر عضو و نیروی واردشده معلوم می‌باشد.



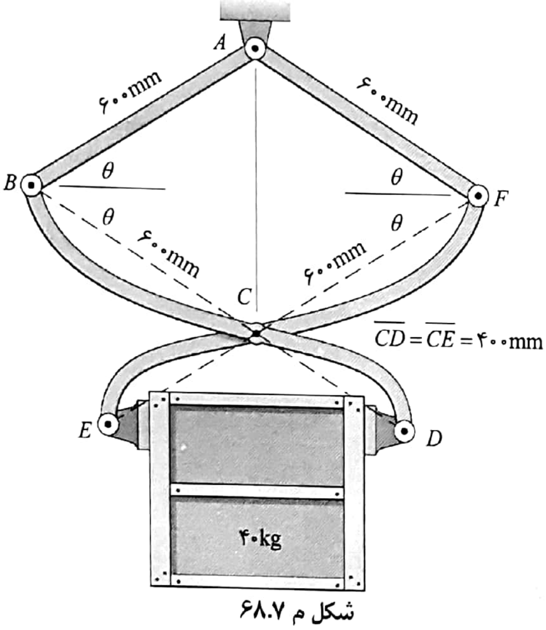
شکل م ۶۶.۷

۶۷.۷ شکل نشان‌داده‌شده مقطع عرضی ظرفی است متشکل از پوستهٔ نیم‌کروی به‌شعاع r و یک پوستهٔ استوانه‌ای به‌ارتفاع h که هردو از یک جنس‌اند. برای اینکه ظرف در وضعیت نشان‌داده‌شده بر روی یک سطح افقی پایدار بماند، حدود h را تعیین کنید.



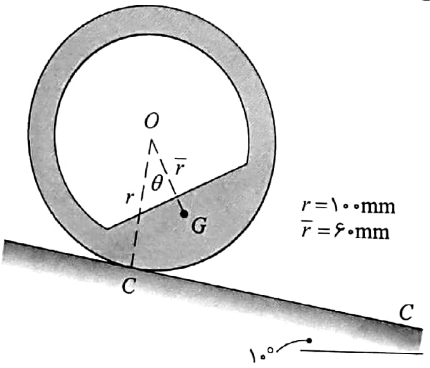
شکل م ۶۷.۷

۶۸.۷ با استفاده از اصل کار مجازی، ضریب اصطکاک مینیمم μ_s بین جعبهٔ $40\,kg$ و سطح اتکا را به‌گونه‌ای تعیین کنید که جعبه نلغزد. مسئله را برای وقتی‌که $\theta = 30°$ است حل کنید.



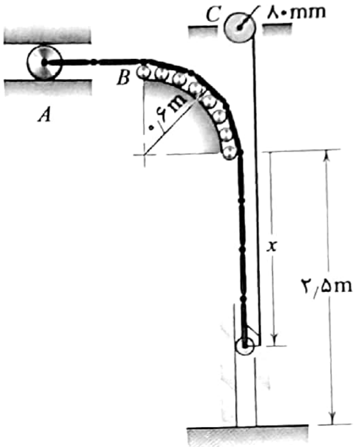
شکل م ۶۸.۷

۶۹.۷ مقادیر θ را برای تعادل و پایداری تعادل در هر وضع غیرمتوازن چرخ روی سطح شیبدار $10°$ تعیین کنید. ضریب اصطکاک استاتیکی برای جلوگیری از لغزش کافی است. مرکز جرم در نقطهٔ G است.



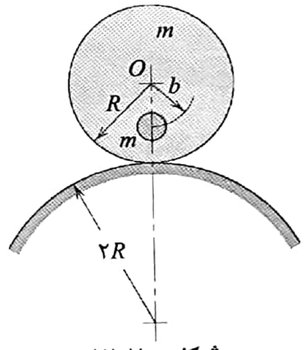
شکل م ۶۹.۷

۷۰.۷ شکل زیر مقطع عرضی یک درب کرکره‌ای به‌جرم ۱۳۵kg می‌باشد، که بخش‌های متوالی آن به یکدیگر لولاشده‌اند و از روی غلتک‌هایی واقع بر شیار استوانه‌ای‌شکل می‌گذرد. وقتی درب بسته است، انتهای A در نقطهٔ B قرار دارد. در هر طرف درب یک کابل کنترل قرار دارد که به انتهای درب مستقل و دور یک قرقرهٔ C پیچیده شده است. هریک از این دو قرقره به یک فنر پیچشی متصل‌اند. گشتاور مقاوم هریک از این فنرها در هر دور چرخش قرقره ۱۰N·m افزایش می‌یابد. در $x=$ ۰، (وقتی که فنرها هنوز پیچیده نشده‌اند)، فنرها آزاد هستند. مقدار x را برای حالت تعادل سیستم تعیین کنید. همچنین ثابت کنید که درب در وضع تعادل پایدار است.



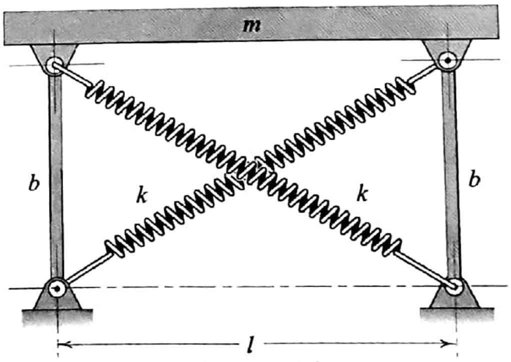
شکل م ۷۰.۷

۷۱.۷ دیسک آلومینیومی یکنواختی به‌شعاع R و جرم m روی سطح دایرهٔ ثابتی به‌شعاع ۲R بدون لغزش می‌غلتد. یک استوانهٔ سربی به‌جرم m در فاصلهٔ b از مرکز O دیسک به آن متصل است. حداقل مقدار b را برای اینکه دیسک دارای تعادل پایدار باشد، تعیین کنید.



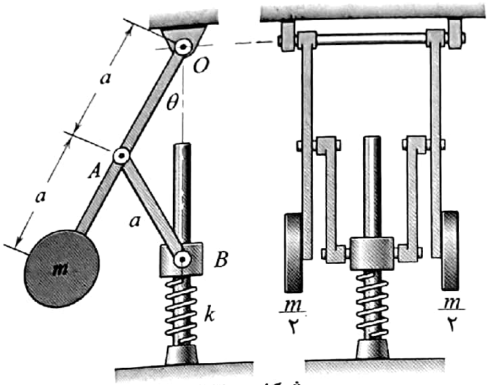
شکل م ۷۱.۷

۷۲.۷ سکویی به‌جرم m توسط دو فنر یکسان مطابق شکل نگهداری می‌شود. اگر از جرم و طول فنرها صرف‌نظر شود، فنرها را طوری طراحی کنید که با حداقل سختی هر فنر، k پایداری سکو تضمین شود. هر فنر شرایط نگهداری یکسان دارد. تغییر شکل از پیش‌تنظیم‌شده در فنر صفر است.



شکل م ۷۲.۷

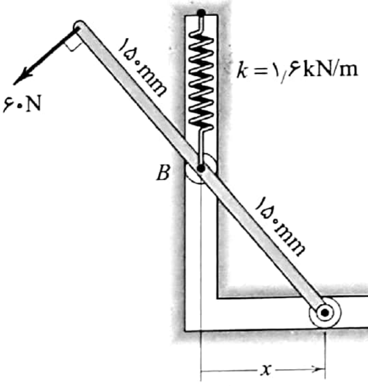
۷۳.۷ در سازوکار نشان‌داده‌شده فنر با سختی k در وضعیت $\theta=$ ۶۰° بدون فشردگی است. همچنین جرم‌های بخش‌ها نسبت به مجموع جرم‌های دو استوانه کوچک‌اند. سازوکار سازه طوری است که بازوها حول محور عمود نوسان می‌کنند، چنانکه در طرف راست دیده می‌شود. مقادیر θ را برای اینکه تعادل برقرار باشد، تعیین کنید. پایداری سازوکار را در هر وضعیت بررسی کنید. از اصطکاک صرف‌نظر کنید.



شکل م ۷۳.۷

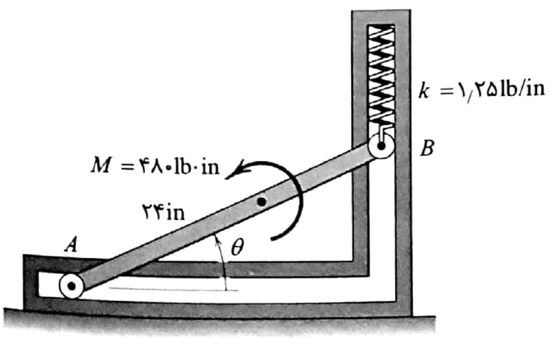
مسائل کامپیوتری

۷۴.۷* در سازوکار نشان‌داده‌شده، اندازهٔ مؤلفهٔ x را برای واردکردن نیروی عمودی ۶۰N بر روی میلهٔ سبک تعیین کنید. سختی فنر $k=$ ۱٫۶kN/m، و وقتی $x=$ ۰ است در وضع آزاد می‌باشد. (راهنمایی: نیروی وارده را با یک سیستم کوپل-نیرو در نقطهٔ B جایگزین کنید.)



شکل م ۷۴.۷

۷۵.۷* غلتک‌های تعبیه‌شده در دو انتهای میلهٔ یکنواخت AB به‌جرم ۲۰lb، مطابق شکل به‌صورت آزاد در دو شیار راهنمای افقی و عمودی حرکت می‌کنند. کمترین مقدار وضعیت تعادل را برای θ که تحت تأثیر کوپل $M=$ ۴۸۰lb·in و فنر با سختی $k=$ ۱٫۲۵lb/in قرار گرفته است تعیین کنید. وقتی $\theta=$ ۰ است، فنر در حالت آزاد می‌باشد.

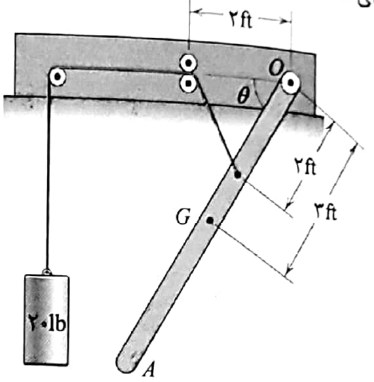


شکل م ۷۵.۷

Scanned by CamScanner

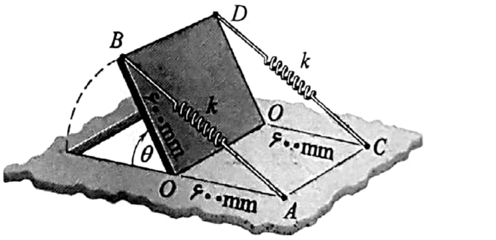
۷۶.۷ انرژی پتانسیل کلی $V=V_e+V_g$ برای درب صنعتی مسئلهٔ ۷۰.۷ را برحسب x محاسبه کرده و نتایج به‌دست‌آمده را در آن مسئله تحقیق کنید. V_g نقطهٔ A برابر صفر در نظر بگیرید. گفتنی است که انرژی پتانسیل در ... از درب در محل تماس با استوانهٔ راهنما ثابت است، که می‌توان آن را ... محاسبه مساوی صفر در نظر گرفت.

۷۷.۷ میلهٔ OA بوزن ۵۰lb با مرکز گرانی در نقطهٔ G، حول انتهای O آن ... و در اثر وزنهٔ ۲۰lb در صفحهٔ قائم نوسان می‌کند. عبارتی برای ... پتانسیل سیستم با در نظر گرفتن $V_g=0$، وقتی $\theta=0$ است بنویسید و ... را برحسب تابع θ از $\theta=0$ تا $\theta=360°$ محاسبه کنید. از روی نمودار ... وضعیت‌های تعادل و پایداری تعادل را در هر وضعیت معین کنید.



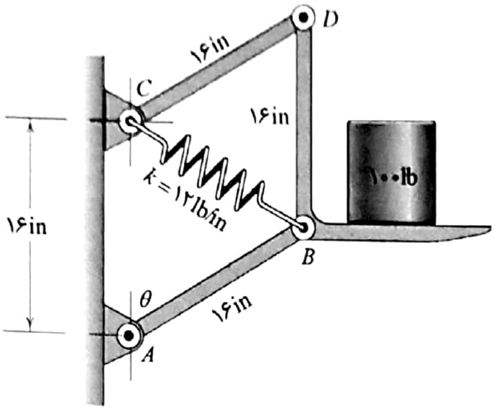
شکل م ۷۷.۷

۷۸.۷ دریچهٔ خوابیدهٔ یکنواخت ۲۵kg آزادانه در امتداد لبهٔ پایینی O-O لولا شده و متصل به دو فنر هریک به‌سختی $k=800\text{N/m}$ می‌باشد. وقتی $\theta=90°$ است فنرها آزاد هستند. V_g را روی صفحهٔ افقی در امتداد O-O مساوی صفر بگیرید و $V=V_g+V_e$ را برحسب تابعی از θ، از $\theta=0$ تا $\theta=90°$ رسم کنید. همچنین زاویهٔ θ را برای تعادل و پایداری در این وضعیت تعیین کنید.



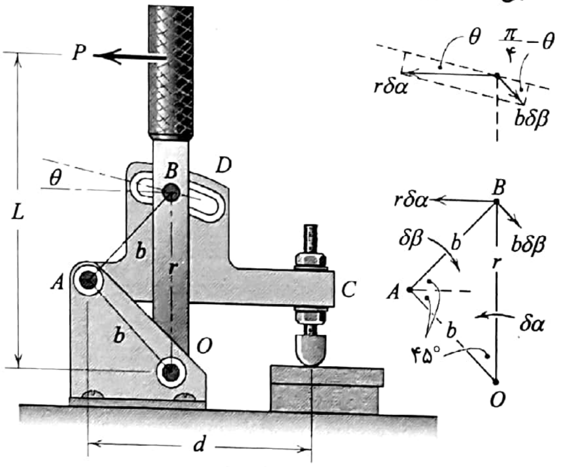
شکل م ۷۸.۷

۷۹.۷* برای سازوکار نشان‌داده‌شده زاویهٔ θ را در حالت تعادل تعیین کنید. سختی فنر $k=12\text{lb/in}$ است، و طول کشیده‌نشدهٔ آن ۸in می‌باشد. هرکدام از اتصال‌های یکنواخت AB و CD دارای وزن ۱۰lb و عضو BD به‌همراه بارش، ۱۰۰lb وزن دارد. حرکت در صفحهٔ قائم است.



شکل م ۷۹.۷

۸۰.۷* برای ارزیابی عملکرد طرح یک گیره، نسبت درزگیری نیروی R به نیروی P وارد بر دستهٔ گیره را برحسب تابعی از θ در گسترهٔ $1° \leq \theta \leq 10°$ تعیین و رسم کنید. ابعاد عبارت‌اند از $L=200\text{mm}$، $b=80\text{mm}$ ($r=b\sqrt{2}$) و $d=150\text{mm}$. نمودارهای سمت راست ارتباط هندسی چرخش کوچک پادساعتگرد $\delta\alpha$ سیستم و نظیر آن، چرخش کوچک ساعتگرد $\delta\beta$ عضو ACD را نشان می‌دهد. پین B روی دسته در فاصلهٔ $r\delta\alpha$ و نقطه‌ای روی ACD منطبق با B، در راستای $b\delta\beta$ حرکت می‌کند.



شکل م ۸۰.۷

Scanned by CamScanner

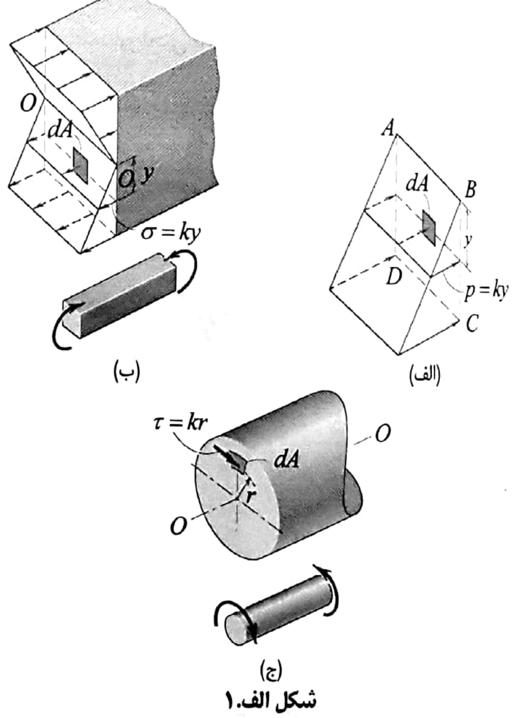
پیوست الف

گشتاورهای لختی سطح

الف.۱ مقدمه
الف.۲ تعاریف
الف.۳ سطوح مرکب
الف.۴ حاصلضرب‌های لختی و چرخش محورها

الف.۱ مقدمه

وقتی نیروها به‌طور پی‌درپی روی سطحی که بر آن وارد می‌شوند گسترده‌اند، غلب لازم است گشتاور این نیروها حول یک محور یا عمود بر آن سطح را محاسبه کنیم. خوشبختانه شدت نیروها (فشار یا تنش) با فاصلهٔ خط اثر نیروها از محور گشتاور متناسب است. بنابراین جزء نیروی وارد بر جزء سطح، متناسب است با دیفرانسیل سطح نسبت به زمان، و گشتاور جزئی متناسب است با مجذور فاصلهٔ دیفرانسیلی سطح نسبت به زمان. بنابراین ملاحظه می‌شود که گشتاور کلی شامل یک انتگرال به‌شکل $\int$[(فاصله)^{2} d(سطح)] است. این انتگرال را به‌نام *گشتاور لختی* یا *گشتاور دوم سطح* می‌نامند. این انتگرال تابع شکل هندسی سطح بوده و به‌کرات در مکانیک کاربرد دارد. پس بهتر است خواص این انتگرال را به‌خوبی توضیح دهیم.



(ب) (الف)
(ج)
شکل الف.۱

شکل‌های الف.۱ منشأ فیزیکی این انتگرال‌ها را نشان می‌دهد. در شکل الف.۱ (الف) مساحت $ABCD$ تحت فشار گستردهٔ p قرارگرفته که شدت آن با فاصلهٔ y از محور AB متناسب است. این موقعیت در فصل ۵، بخش ۹.۵ هنگام توصیف اثر فشار حاصل از مایع بر روی یک سطح، مورد مطالعه قرارگرفت. گشتاور نیروی حاصل از فشار وارد بر جزء سطح dA حول AB، برابر است با $py\,dA=ky^{2}dA$؛ بنابراین هنگام محاسبهٔ گشتاور کل $M=k\int y^{2}dA$، انتگرال مورد نظر پدیدار می‌شود.

در شکل الف.۱ (ب) توزیع تنش وارد بر مقطع عرضی یک تیر سادهٔ کشسان نشان داده شده است که تحت تأثیر کوپل‌های مساوی و در خلاف جهت واردشده بر دو انتهای آن قرار دارد. در هر مقطع از تیر یک توزیع خطی شدت نیرو یا تنش σ، طبق رابطهٔ $\sigma=ky$ تغییر می‌کند و تنش در زیر محور O-O مثبت (کششی)، و بالای این محور منفی (فشاری) است. می‌بینیم که گشتاور جزئی حول محور O-O، $dM=y(\sigma dA)=ky^{2}dA$ است. پس همین انتگرال هنگام محاسبهٔ گشتاور کل، $M=k\int y^{2}dA$ ظاهر می‌شود.

مثال سوم در شکل الف.۱ (ج)، یک میل‌گردان دایره‌ای را نشان می‌دهد که تحت تأثیر یک پیچش یا گشتاور پیچشی قرارگرفته و ماده در حد کشسان واقع شده است. در هر مقطعی از محور، توزیع تنشی مماسی یا برشی τ که با فاصلهٔ شعاعی r از مرکز متناسب است، در برابر این گشتاور مقاومت می‌کند. پس $\tau=kr$ و گشتاور کلی حول محور مرکزی $M=\int r(\tau dA)=k\int r^{2}dA$. در اینجا این دو انتگرال با دو انتگرال مثال گذشته متفاوت است و تفاوت در این است که سطح با محور گشتاور موازی نیست بلکه بر آن عمود است و r نیز مختصهٔ شعاعی است نه مختصهٔ قائم.

اگرچه انتگرال در دو مثال قبلی به‌طورکلی *گشتاور لختی سطح* حول محورها نامیده می‌شود، *گشتاور دوم سطح* اصطلاح مناسب‌تری است، زیرا اولین گشتاور $y\,dA$ در بازوی y ضرب شده تا گشتاور دوم برای جزء سطح dA به‌دست آید. کلمهٔ *لختی* در اصطلاح‌شناسی فنی به‌دلیل تشابه بین شکل ریاضی انتگرال‌ها برای گشتاور دوم سطح، و آنچه که گشتاورهای برایند نیروهای لختی می‌نامند، برای اجسام دوران‌کننده، می‌باشد. گشتاور لختی سطح یک خاصیت محض ریاضی بوده و مفهوم فیزیکی ندارد.

Scanned by CamScanner

الف.۲ تعاریف

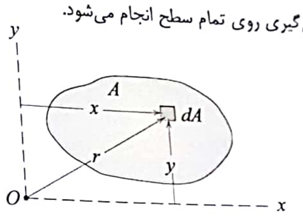
تعاریف زیر اساس تحلیل گشتاور لختی سطح را تشکیل می‌دهد.

گشتاور لختی در مختصات عمود برهم و مختصات قطبی

در شکل الف.۲ سطح A در صفحهٔ x-y را در نظر بگیرید. بنا به تعریف، گشتاور لختی جزء سطح dA حول محورهای x و y برابر است با $dI_x = y^2 dA$ و $dI_y = x^2 dA$. گشتاورهای لختی A حول محورهای یکسان برابرند با

$$I_x = \int y^2 dA, \quad I_y = \int x^2 dA \qquad \text{(الف.۱)}$$

که در آن انتگرال‌گیری روی تمام سطح انجام می‌شود.



شکل الف.۲

گشتاور لختی dA حول نقطهٔ O (محور z) طبق تعریف عبارت است از $dI_z = r^2 dA$. گشتاور لختی تمام سطح حول O برابر است با

$$I_z = \int r^2 dA \qquad \text{(الف.۲)}$$

تعاریف بیان‌شده در معادلات (الف.۱) را گشتاورهای لختی عمود برهم می‌نامند، درحالی‌که توضیح معادلهٔ (الف.۲) گشتاور لختی *قطبی*[1] نامیده می‌شود. از آنجا که $x^2 + y^2 = r^2$، واضح است که

$$I_z = I_x + I_y \qquad \text{(الف.۳)}$$

گشتاور لختی قطبی برای سطحی که مرزهای آن توسط مختصات قائم آسان‌تر از مختصات قطبی تعریف می‌شود، با کمک معادلهٔ (الف.۳) ساده‌تر محاسبه می‌شود.

گشتاور لختی یک جزء سطح شامل مجذور فاصله از محور لختی تا جزء سطح است. پس یک جزء سطح با مختصات منفی به همان اندازه در گشتاور لختی مشارکت دارد که یک جزء سطح با مختصات مثبت. در نتیجه گشتاور لختی حول هر محور پیوسته یک مقدار مثبت است. در کنار آن، گشتاور اول سطح، که در محاسبات مرکز هندسی وارد می‌شود می‌تواند مثبت یا صفر باشد.

ابعاد گشتاورهای لختی سطح برابر با L^4 اند، که در آن L نمایانگر بعد طول می‌باشد. پس یکاهای SI برای گشتاور لختی، قید درجهٔ چهارم (m^4) یا (mm^4) و در یکاهای معمول U.S. برای گشتاور لختی سطح (ft^4) یا (in^4) می‌باشد.

انتخاب مختصات برای محاسبهٔ گشتاورهای لختی مهم است. برای شکل‌هایی که مرزهای آنها را می‌توان با مختصات قائم به ساده‌ترین گونه بیان کرد، باید از این مختصات استفاده نمود. در مسائلی که مرزهای آنها به‌سادگی برحسب r و θ بیان می‌شوند، انتخاب مختصات قطبی باعث سادگی کار می‌شود. همچنین انتخاب یک جزء سطح که انتگرال‌گیری را تا حد ممکن، ساده می‌کند، مهم است. این روش نسبت به آنچه قبلاً بحث کردیم، و در فصل ۵ برای محاسبهٔ مراکز هندسی به‌کار بردیم، به‌طور قابل ملاحظه‌ای منطقی است.

شعاع چرخش

سطح A در شکل الف.۳ (الف) را در نظر بگیرید که در آن گشتاورهای لختی متعامد حول O برابر I_x و I_y و گشتاور قطبی حول O برابر I_z است. حال آن سطوح را به‌صورت متمرکز با نوار بلند و باریک به‌مساحت A که فاصله‌اش از محور x برابر k_x است تصور کنید (شکل الف.۳ ب). بنا به تعریف گشتاور لختی نوار نسبت به محور x برابر با گشتاور لختی سطح اولیه است، درحالی‌که $k_x^2 A = I_x$. فاصلهٔ k_x را *شعاع چرخش* یا *شعاع ژیراسیون* سطح حول محور x می‌نامند. با در نظر گرفتن سطح به‌صورت نوار باریکی به‌موازات محور y، رابطهٔ مشابهی برای محور y نوشته می‌شود (شکل الف.۳ ج). همچنین اگر سطح را به‌صورت حلقهٔ باریکی به‌شعاع k_z در نظر بگیریم، گشتاور لختی را می‌توانیم به‌صورت $k_z^2 A = I_z$ بیان نماییم (شکل الف.۳ د). به‌طور خلاصه می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} I_x &= k_x^2 dA \\ I_y &= k_y^2 dA \\ I_z &= k_z^2 dA \end{aligned} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} k_x &= \sqrt{I_x / A} \\ k_y &= \sqrt{I_y / A} \\ k_z &= \sqrt{I_z / A} \end{aligned} \qquad \text{(الف.۴)}$$

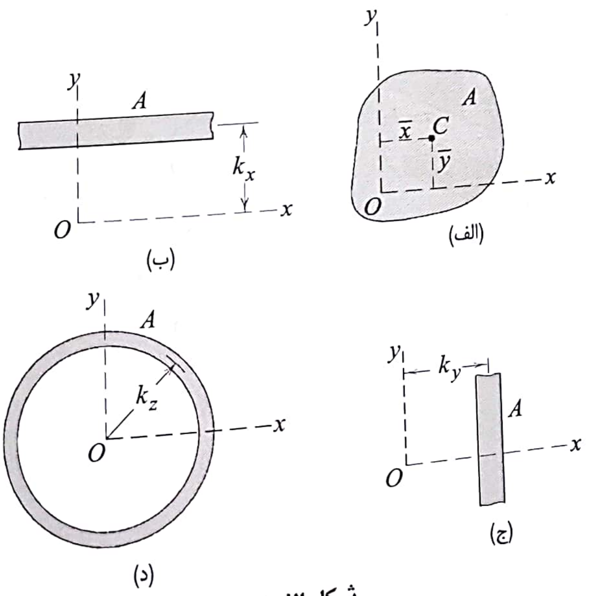
بنابراین شعاع چرخش اندازه‌ای از گستردگی سطح از محور مورد نظر است. یک گشتاور عمود برهم و یا لختی قطبی را می‌توان با شعاع چرخش و سطح، مشخص و بیان کرد.

وقتی معادلات (الف.۴) را وارد معادلهٔ (الف.۳) کنیم، خواهیم داشت

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 \qquad \text{(الف.۵)}$$

پس مجذور شعاع چرخش حول یک محور قطبی برابر مجموع مجذورهای شعاع چرخش حول دو محور عمود برهم متناظر است.

فاصلهٔ میان محورهای مختصات تا مرکز هندسی C یک سطح را با شعاع چرخش اشتباه نگیرید. به‌عنوان مثال، در شکل الف.۳ (الف) مجذور فاصلهٔ مرکز هندسی از محور x، $\bar{y}^2$ است که مقصود، مجذور فاصلهٔ میانگین از سطح جزئی تا محور x است. از طرف دیگر کمیت k_x^2 میانگین مجذورهای این فواصل است. بنابراین گشتاور لختی برابر $A\bar{y}^2$ *نیست*، از آنجا که مربع میانگین کمتر از میانگین مربعات است.



شکل الف.۳

---

۱. در مکانیک گاهی گشتاور لختی قطبی را با نماد J نشان می‌دهند.

Scanned by CamScanner

... محورها

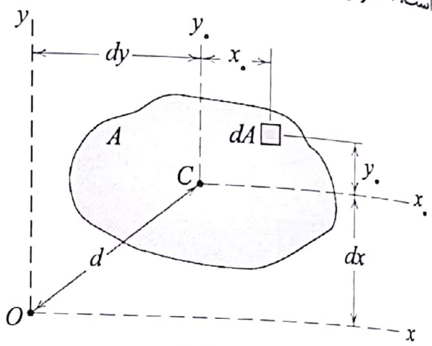
... لختی یک سطح حول محوری را که از مرکز هندسی نمی‌گذرد می‌توان ... برحسب گشتاور لختی حول یک محور گذرنده از مرکز هندسی و ... بیان کرد. در شکل الف.۴ محورهای $y_{\circ}$-$x_{\circ}$ از مرکز هندسی C ... کرده‌اند. حال گشتاورهای لختی سطح را حول محورهای ... x-y تعیین می‌کنیم. بنا به تعریف، گشتاور لختی سطح جزئی dA حول ... x برابر است با

$$dI_x = (y_{\circ} + d_x)^{۲} dA$$

... رابطهٔ بالا و انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود

$$I_x = \int y_{\circ}^{۲} dA + ۲d_x \int y_{\circ} dA + d_x^{۲} \int dA$$

... می‌بینیم که اولین انتگرال بنا به تعریف گشتاور لختی $\bar{I}_x$ حول مرکز ... $x_{\circ}$ است. انتگرال دوم صفر است، چون $\int y_{\circ} dA$ مساوی $A\bar{y}_{\circ}$ و $\bar{y}_{\circ}$



شکل الف.۴

به‌طور خودکار صفر است زیرا مرکز هندسی روی محور $x_{\circ}$ قرار دارد. جملهٔ سوم به‌سادگی برابر $Ad_x^{۲}$ است. پس رابطهٔ بیانگر I_x و رابطهٔ مشابه با آن برای I_y چنین می‌شود

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_x^{۲} \qquad I_y = \bar{I}_y + Ad_y^{۲} \qquad \text{(الف.۶)}$$

با توجه به معادلهٔ (الف.۳)، از مجموع این معادلات نتیجه می‌شود

$$I_z = \bar{I}_z + Ad^{۲} \qquad \text{(الف.۶ الف)}$$

معادلات (الف.۶) و (الف.۶ الف) را *قضایای محورهای موازی* می‌نامند. دو نکتهٔ مهم را می‌توان خاطر نشان کرد. اول اینکه محورهای تبدیل *باید موازی* باشند و دوم آنکه یکی از محورها *باید از مرکز هندسی سطح عبور کند.*

اگر می‌خواهید یک تبدیل بین دو محور موازی باشد، بدون توجه به اینکه کدام محور از مرکز سطح عبور می‌کند، لازم است ابتدا انتقال را از یک محور به محور موازی مرکز هندسی و سپس انتقال را از این محور به محور دوم انجام داد.

قضیهٔ محورهای موازی نیز برای شعاع چرخش به‌کار می‌رود. با جایگزین کردن تعریف k در معادلات (الف.۶) رابطهٔ انتقال چنین می‌شود

$$k^{۲} = \bar{k}^{۲} + d^{۲} \qquad \text{(الف.۶ ب)}$$

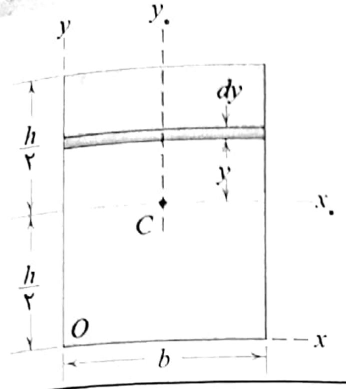
که در آن $\bar{k}$ شعاع چرخش حول محور گذرنده از مرکز هندسی و موازی با محوری است که در آن k به‌کار برده شده و d فاصلهٔ بین دو محور است. محورها ممکن است در صفحهٔ سطح و یا عمود بر صفحهٔ سطح باشند.

خلاصه‌ای از روابط گشتاور لختی برای بعضی از شکل‌های متداول در جدول د۳ در پیوست (د) آورده شده است.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ الف.۱

گشتاورهای لختی سطح مستطیل، حول محورهای مرکزی $\bar{x}_0$ و $\bar{y}_0$، محور قطبی مرکز هندسی $\bar{z}_0$ گذرنده از نقطهٔ C، محور x و محور قطبی z گذرنده از نقطهٔ O را تعیین کنید.



❶ **حل:** برای محاسبهٔ گشتاور لختی $\bar{I}_x$ حول محور x_0، نوار افقی $b\,dy$ را طوری انتخاب می‌کنیم که همهٔ اجزای نوار دارای مختصهٔ y یکسان باشند، پس

$$[I_x = \int y^2 dA] \qquad \bar{I}_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\, dy = \frac{1}{12} bh^3 \qquad \text{ج.}$$

با تغییر نمادها، گشتاور لختی حول محور گذرنده از مرکز هندسی y_0 چنین می‌شود

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} hb^3 \qquad \text{ج.}$$

گشتاور لختی قطبی گذرنده از مرکز هندسی برابر است با

$$[\bar{I}_z = \bar{I}_x + \bar{I}_y] \qquad \bar{I}_z = \frac{1}{12}(bh^3 + hb^3) = \frac{1}{12} A(b^2 + h^2) \qquad \text{ج.}$$

با توجه به قضیهٔ محورهای موازی، گشتاور لختی حول محور x چنین است

$$[I_x = \bar{I}_x + Ad_x^2] \qquad I_x = \frac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}Ah^2 \qquad \text{ج.}$$

همچنین گشتاور لختی قطبی حول O با توجه به قضیهٔ محورهای موازی چنین می‌شود

$$[I_z = \bar{I}_z + Ad^2] \qquad I_z = \frac{1}{12}A(b^2 + h^2) + A\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

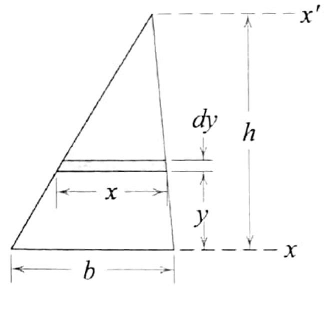
$$I_z = \frac{1}{3}A(b^2 + h^2) \qquad \text{ج.}$$

راهنمایی مفید

❶ اگر حل مسئله را با جزء سطح مرتبهٔ دوم $dA = dx\,dy$ شروع می‌کردیم، انتگرال‌گیری نسبت به x و ثابت نگه‌داشتن y، به ضرب کردن در b منتهی می‌شد و عبارت $y^2 b\,dy$ که در آغاز آن را به‌کار بردیم، به‌دست می‌آمد.

مسئلهٔ نمونهٔ الف.۲

گشتاورهای لختی سطح مثلث، حول قاعده و حول محورهای موازی گذرنده از رأس و مرکزش را تعیین کنید.



❶ **حل:** نوار سطح موازی قاعدهٔ مثلث را مطابق شکل انتخاب می‌کنیم، که سطح نوار برابر است ❷ با $dA = x\,dy = [(h-y)b/h]\,dy$. بنا به تعریف

$$[I_x = \int y^2 dA] \qquad I_x = \int_0^h y^2 \frac{h-y}{h} b\, dy = b\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4h}\right]_0^h = \frac{bh^3}{12} \qquad \text{ج.}$$

از قضیهٔ محورهای موازی، گشتاور لختی $\bar{I}$ حول محور گذرنده از مرکز هندسی به‌فاصلهٔ $h/3$ حول محور x چنین است

$$[\bar{I} = I - Ad^2] \qquad \bar{I} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36} \qquad \text{ج.}$$

انتقال از محوری که از مرکز هندسی می‌گذرد، به محور x' که از رأس می‌گذرد، نتیجه می‌دهد

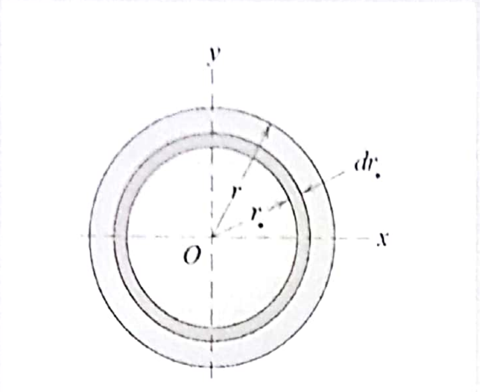
$$[I = \bar{I} + Ad^2] \qquad I_{x'} = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{4} \qquad \text{ج.}$$

راهنمایی‌های مفید

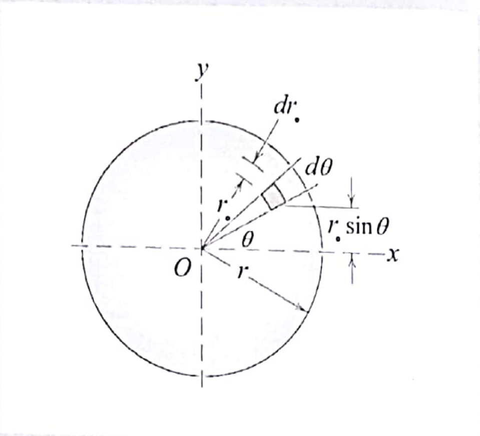
❶ در اینجا نیز ساده‌ترین جزء ممکن را انتخاب می‌کنیم. اگر $dA = dx\,dy$ را انتخاب کرده بودیم، ابتدا باید از $y^2 dx\,dy$ نسبت به x انتگرال‌گیری می‌کردیم که از آن $y^2 x\,dy$، به‌دست می‌آمد که در آغاز آن را انتخاب کرده بودیم.

❷ اگر نسبت تشابه مثلث‌های مشابه را در نظر بگیریم، به‌سادگی می‌توانیم x را برحسب y بیان کنیم.

Scanned by CamScanner



مسئلهٔ نمونهٔ الف.۳ گشتاورهای لختی سطح دایره‌ای را حول قطر آن و حول محور قطبی گذرنده از مرکز هندسی محاسبه کنید. شعاع چرخش را معین کنید.



حل: سطح جزئی به‌شکل حلقهٔ دایره‌ای را، که همهٔ اجزای حلقه دارای فاصلهٔ برابرند می‌توان برای محاسبهٔ گشتاور لختی حول محور قطبی z که از O می‌گذرد، مورد استفاده قرار ① داد. جزء سطح برابر $dA=2\pi r_0 dr_0$ است و بنابراین

$$[I_z=\int r^2 dA] \qquad I_z=\int_0^r r_0^2(2\pi r_0 dr_0)=\frac{\pi r^4}{2}=\frac{1}{2}Ar^2$$

ج.

شعاع چرخش قطبی برابر است با

$$\left[k=\sqrt{\frac{I}{A}}\right] \qquad k_z=\frac{r}{\sqrt{2}}$$

ج.

به‌واسطهٔ تشابه $I_x=I_y$، همچنین از معادلهٔ (الف.۳)

$$[I_z=I_x+I_y] \qquad I_x=\frac{1}{2}I_z=\frac{\pi r^4}{4}=\frac{1}{4}Ar^2$$

ج.

شعاع چرخش حول محور گذرنده از قطر چنین است

$$\left[k=\sqrt{\frac{I}{A}}\right] \qquad k_x=\frac{r}{2}$$

ج.

تعیین I_x به روش بیان شده ساده‌ترین کار ممکن است. با استفاده از جزء سطح $dA=r_0 dr_0 d\theta$ که در پایین شکل نشان داده شده، و با انتگرال‌گیری مستقیم می‌توان به نتیجهٔ بالا رسید. بنابر تعریف

$$[I_x=\int y^2 dA] \qquad I_x=\int_0^{2\pi}\int_0^r (r_0\sin\theta)^2 r_0 dr_0 d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{r^4\sin^2\theta}{4}d\theta$$

$$=\frac{r^4}{4}\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi r^4}{4}$$

ج. ②

راهنمایی‌های مفید

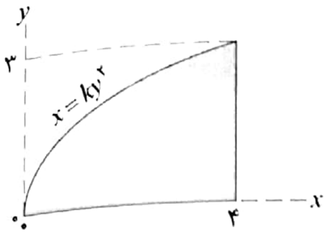
① مختصات قطبی عملاً در اینجا بیان شده است. همچنین مانند قبل ساده‌ترین و پایین‌ترین جزء ممکن را انتخاب می‌کنیم که یک حلقهٔ دیفرانسیلی است. با توجه به گشتاور قطبی، فوراً متوجه می‌شویم که گشتاور لختی قطبی حلقه برابر با حاصلضرب سطح آن $2\pi r_0 dr_0$ در r_0^2 است.

② این انتگرال ساده قابل فهم است ولی کاربرد معادلهٔ (الف.۳) به‌همراه نتیجهٔ به‌دست آمده برای I_z مسلماً ساده‌تر است.

Scanned by CamScanner

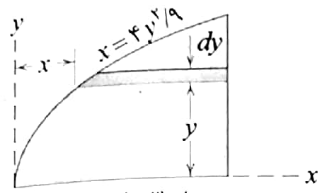
مسئلهٔ نمونهٔ الف.۴

گشتاور لختی سطح زیر سهمی را حول محور x تعیین کنید. مسئله را با استفاده از (الف) یک نوار افقی و (ب) یک نوار عمودی حل کنید.



حل: ثابت k مساوی $\frac{۴}{۹}$، نخست با جایگزینی $x=۴$ و $y=۳$ در معادلهٔ سهمی به‌دست آمده است.

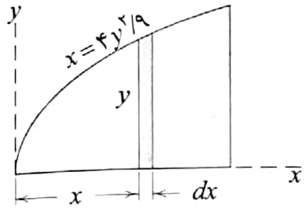
(الف) نوار افقی: از آنجا که همهٔ اجزای نوار افقی به فاصلهٔ یکسان از محور x قرار دارند، گشتاور لختی نوار حول محور x برابر $y^2 dA$ است که در آن $dA=(۴-x)dy=۴(۴-y^2/۹)dy$ است. انتگرال‌گیری نسبت به y می‌دهد



حل (الف)

$$[I_x=\int y^2 dA] \qquad I_x=\int_۰^۳ ۴y^2\left(۱-\frac{y^2}{۹}\right)dy=\frac{۷۲}{۵}=۱۴/۴ \text{ (یکا)}^۴$$ ج.

(ب) نوار عمودی: در اینجا همهٔ اجزا در فواصل متفاوت از محور x قرار دارند. پس باید عبارت درستی برای گشتاور لختی جزئی عموود برهم حول قاعدهٔ مستطیل که از مسئلهٔ نمونهٔ الف.۱ برابر $bh^3/۳$ به‌دست آمد، به‌کار ببریم. برای عرض dx و ارتفاع y چنین می‌شود



حل (ب)

$$dI_x=\frac{۱}{۳}(dx)y^3$$

با انتگرال‌گیری نسبت به x، باید y را برحسب x بیان کنیم که نتیجه می‌دهد $y=۳\sqrt{x}/۲$، و انتگرال چنین می‌شود

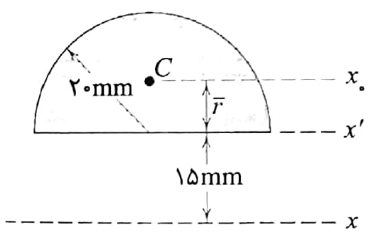
$$I_x=\frac{۱}{۳}\int_۰^۴\left(\frac{۳\sqrt{x}}{۲}\right)^3 dx=\frac{۷۲}{۵}=۱۴/۴ \text{ (یکا)}^۴$$ ➊ ج.

راهنمایی مفید

➊ راه‌حل (الف) بر (ب) کمی برتری دارد. حل (ب) مستلزم دانستن گشتاور لختی سطح مستطیل حول قاعده است.

مسئلهٔ نمونهٔ الف.۵

گشتاور لختی حول محور x سطح نیم‌دایره را پیدا کنید.



حل: گشتاور لختی سطح نیم‌دایره حول محور x' با نصف معین گشتاور برای یک دایرهٔ کامل حول محور یکسان است. پس از نتایج مسئلهٔ نمونهٔ الف.۳ داریم

$$I_{x'}=\frac{۱}{۲}\frac{\pi r^4}{۴}=\frac{۲۰^4\pi}{۸}=۲\pi(۱۰^4)\text{mm}^4$$

سپس گشتاور لختی $\bar{I}$ حول محور گذرنده از مرکز هندسی موازی $x_۰$ را به‌دست می‌آوریم. با استفاده از قضیهٔ محورهای موازی این انتقال را برای فاصلهٔ $\bar{r}=۴r/(۳\pi)=(۴)(۲۰)/(۳\pi)=۸۰/(۳\pi)\text{mm}$ انجام می‌دهیم. بنابراین

$$[\bar{I}=I-Ad^2] \qquad \bar{I}=۲(۱۰^4)\pi-\left(\frac{۲۰^2\pi}{۲}\right)\left(\frac{۸۰}{۳\pi}\right)^2=۱/۷۵۵(۱۰^4)\text{mm}^4$$

➊ در آخر، با انتقال از محور $x_۰$ گذرنده از مرکز هندسی به محور x خواهیم داشت

$$[I=\bar{I}+Ad^2] \qquad I_x=۱/۷۵۵(۱۰^4)+\left(\frac{۲۰^2\pi}{۲}\right)\left(۱۵+\frac{۸۰}{۳\pi}\right)^2$$

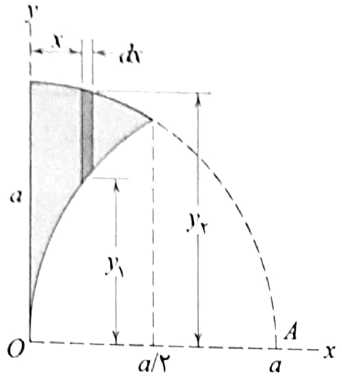
$$=۱/۷۵۵(۱۰^4)+۳۴/۷(۱۰^4)=۳۶/۴(۱۰^4)\text{mm}^4$$ ج.

راهنمایی مفید

➊ این مسئله نشان می‌دهد که در حین استفاده از انتقال دوگانه باید احتیاط کرد، زیرا نه محور x' و نه محور x از مرکز هندسی C عبور نمی‌کنند. اگر دایره کامل بود و مرکز هندسی آن روی محور x' قرار داشت، تنها یک انتقال کافی بود.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ الف.۶ گشتاور لختی سطح محصور بین محور y و کمان‌هایی از دوایری به‌شعاع a را که مراکز آنها در نقاط O و A می‌باشند، حول محور x محاسبه کنید.



حل: انتخاب نوار دیفرانسیل عمودی سطح این امکان را به ما می‌دهد که با یک بار انتگرال‌گیری، تمام سطح محصور پوشانده شود. با انتخاب نوار افقی، به دو انتگرال‌گیری نسبت به y نیاز است و این به‌دلیل ناپیوستگی می‌باشد. گشتاور لختی حول محور x برابر است با گشتاور لختی نواری به‌ارتفاع y_2، منهای گشتاور لختی نواری به‌ارتفاع y_1. پس بنابر نتایج حاصل از مسئلهٔ نمونهٔ الف.۱ می‌نویسیم

$$dI_x = \frac{1}{3}(y_2\,dx)y_2^2 - \frac{1}{3}(y_1\,dx)y_1^2 = \frac{1}{3}(y_2^3 - y_1^3)dx$$

مقادیر y_1 و y_2 از معادلات دو منحنی $x^2 + y_2^2 = a^2$ و $(x-a)^2 + y_1^2 = a^2$ به‌دست می‌آیند که نتیجه می‌دهند $y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$ و $y_1 = \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$، پس ❶

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^{a/2}\{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2} - [a^2 - (x-a)^2]\sqrt{a^2 - (x-a)^2}\}dx$$

از حل همزمان معادلات دو دایره، مختصهٔ x محل تقاطع دو منحنی به‌دست می‌آید که با بررسی مشخص می‌شود مقدار آن برابر $\frac{a}{2}$ است. محاسبهٔ انتگرال‌ها نتیجه می‌دهد

$$\int_0^{a/2} a^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^4}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$-\int_0^{a/2} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^4}{16}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$-\int_0^{a/2} a^2\sqrt{a^2 - (x-a)^2}\,dx = \frac{a^4}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\int_0^{a/2} (x-a)^2\sqrt{a^2 - (x-a)^2}\,dx = \frac{a^4}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{3}\right)$$

از جمع انتگرال‌ها با توجه به ضریب مشترک $\frac{1}{3}$ نتیجه می‌شود

$$I_x = \frac{a^4}{96}(9\sqrt{3} - 2\pi) = 0.0969a^4$$ ج

اگر با جزء درجهٔ دوم $dA = dx\,dy$ شروع می‌کردیم، برای گشتاور لختی جزء حول محور x می‌توانستیم بنویسیم $y^2dx\,dy$. با انتگرال‌گیری از y_1 تا y_2 برای نوار عمودی، ثابت گرفتن x نتیجه می‌دهد

$$dI_x = \left[\int_{y_1}^{y_2} y^2dy\right]dx = \frac{1}{3}(y_2^3 - y_1^3)dx$$

که همان عبارتی است که با در نظر داشتن گشتاور لختی مستطیل، کار خود را با آن شروع کردیم.

راهنمایی مفید

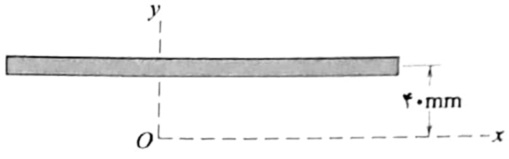
❶ از علامت مثبت برای رادیکال استفاده نمودیم زیرا y_1 و y_2 هردو بالای محور x هستند.

Scanned by CamScanner

مسائل

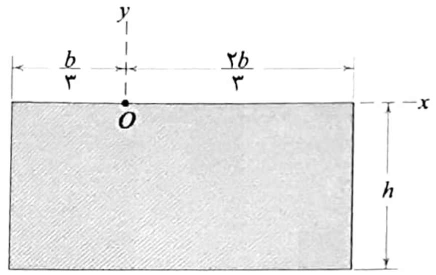
مسائل مقدماتی

الف.۱ اگر گشتاور لختی نوار باریک و نازک سطح حول محور x برابر $2/56(10^6)\ \text{mm}^4$ باشد، سطح A نوار را با تقریب دقیق تعیین کنید.



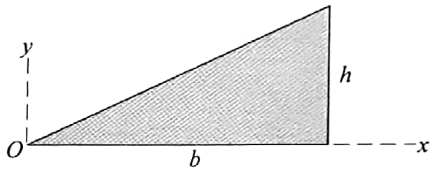
شکل م الف.۱

الف.۲ گشتاور لختی سطح مستطیل را حول محورهای x و y معین کنید. گشتاور لختی قطبی حول نقطهٔ O را پیدا کنید.



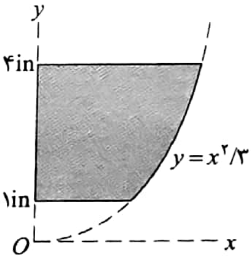
شکل م الف.۲

الف.۳ به روش انتگرال‌گیری مستقیم گشتاور لختی سطح مثلث حول محور y را تعیین کنید.



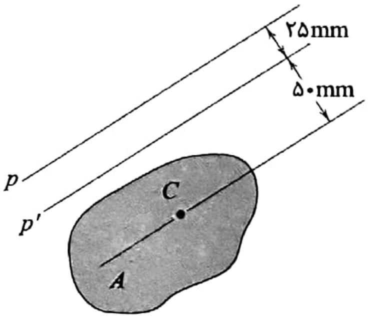
شکل م الف.۳

الف.۴ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محور y تعیین کنید.



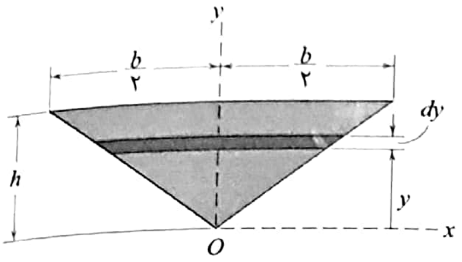
شکل م الف.۴

الف.۵ گشتاور لختی A حول محورهای موازی p و p' به‌میزان $15(10^6)\ \text{mm}^4$ تفاوت دارد. سطح A را که مرکز هندسی آن در نقطهٔ C است محاسبه کنید.



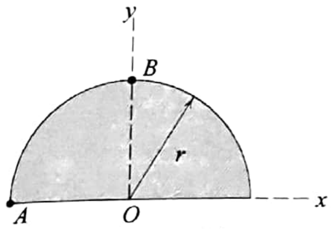
شکل م الف.۵

الف.۶ با استفاده از جزء دیفرانسیلی نشان‌داده‌شده، محورهای x و y، همچنین گشتاور لختی قطبی را حول نقطهٔ O تعیین کنید.



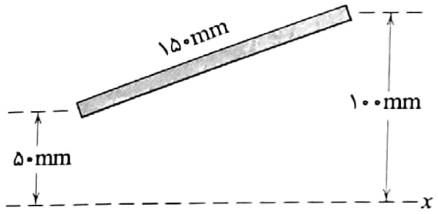
شکل م الف.۶

الف.۷ گشتاور لختی قطبی سطح نیم‌دایره را حول نقاط A و B تعیین کنید.



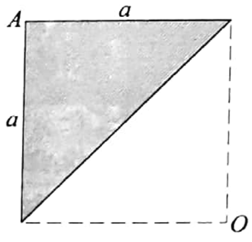
شکل م الف.۷

الف.۸ سطح نوار باریک با عرض یکنواخت برابر $750\ \text{mm}^2$ است. با استفاده از این واقعیت که عرض نوار نسبت به طول آن کوچک است، گشتاور لختی را حول محور x تخمین بزنید. جواب به‌دست‌آمده را با نتیجهٔ نادرستی که از ضرب سطح در مجذور فاصلهٔ آن از مرکز سطح آن تا محور x حاصل می‌شود، مقایسه کنید.



شکل م الف.۸

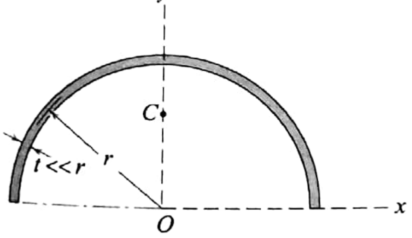
الف.۹ شعاع چرخش قطبی سطح مثلث را حول نقاط O و A تعیین کنید.



شکل م الف.۹

مسائل برگزیده

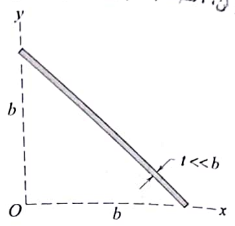
الف.۱۰ گشتاورهای لختی I_x و I_y سطح نازک حلقهٔ نیم‌دایره‌ای را حول محو[ر x] و y تعیین کرده، گشتاور لختی قطبی I_C حلقه را حول مرکز C پیدا کنید.



شکل م الف.۱۰

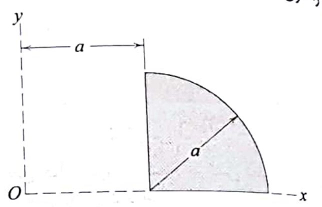
Scanned by CamScanner

الف.۱۱ با استفاده از بسط روابط به‌دست آمده در مسئلهٔ نمونهٔ الف.۱، عبارت‌هایی برای گشتاورهای لختی قطبی و متعامد I_x، I_y و I_O نوار مستطیلی باریکی با سطح ... بیابید که در آن، t نسبت به عرض سطح نوار b بسیار کوچک است.



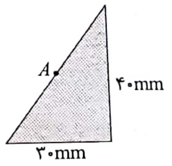
شکل م الف.۱۱

الف.۱۲ گشتاور لختی سطح ربع دایره را حول محورهای x و y تعیین کرده و شعاع چرخش قطبی را حول نقطهٔ O به‌دست آورید.



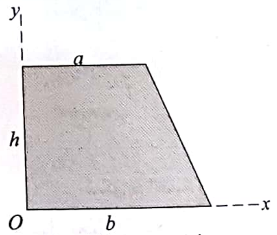
شکل م الف.۱۲

الف.۱۳ شعاع چرخش حول محور قطبی را که از نقطهٔ A (وسط وتر مثلث قائم‌الزاویه) می‌گذرد، تعیین کنید. (*راهنمایی*: با مشاهدهٔ نتایج برای یک مستطیل ۳۰×۴۰mm، محاسبات خود را ساده کنید.)



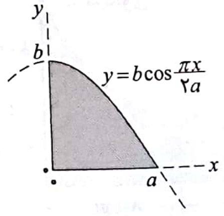
شکل م الف.۱۳

الف.۱۴ به‌روش انتگرال‌گیری مستقیم گشتاورهای لختی سطح ذوزنقه را حول محورهای x و y تعیین کرده و گشتاور لختی قطبی را حول نقطهٔ O به‌دست آورید.



شکل م الف.۱۴

الف.۱۵ گشتاور لختی را حول محور x سطح سایه‌خورده تعیین کنید.

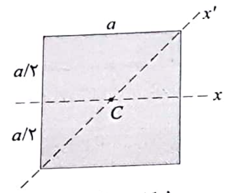


شکل م الف.۱۵

الف.۱۶ گشتاور لختی مستطیلی و شعاع چرخش قطبی سطح سایه‌خورده را تعیین کنید.

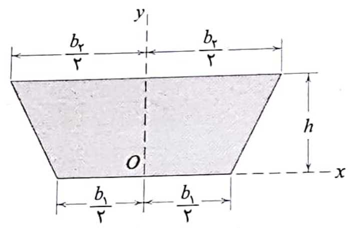
شکل م الف.۱۶

الف.۱۷ به دو روش نشان دهید که گشتاورهای لختی سطح مربع حول محورهای x و x' یکسان‌اند.



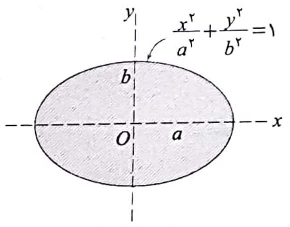
شکل م الف.۱۷

الف.۱۸ به‌روش انتگرال‌گیری مستقیم گشتاور لختی سطح ذوزنقه را حول محورهای x و y تعیین کنید.



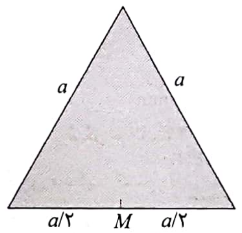
شکل م الف.۱۸

الف.۱۹ گشتاور لختی سطح بیضی را حول محور y تعیین کرده و شعاع چرخش را حول نقطهٔ O مبدأ مختصات به‌دست آورید.



شکل م الف.۱۹

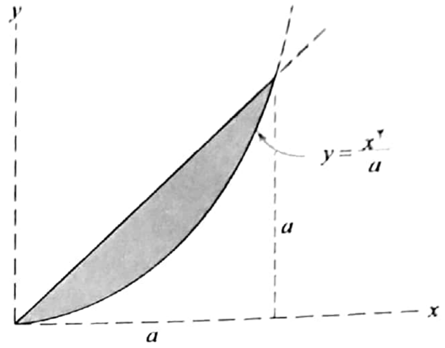
الف.۲۰ شعاع چرخش سطح معادل مثلث را حول نقطهٔ M وسط قاعده‌اش تعیین کنید.



شکل م الف.۲۰

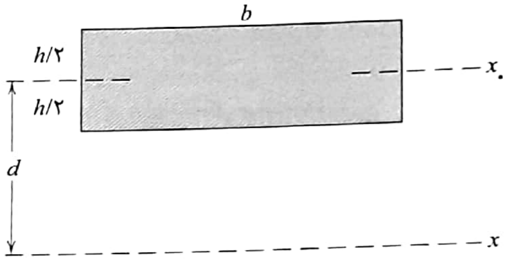
Scanned by CamScanner

الف.۲۱ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محورهای x و y تعیین کرده و جزء دیفرانسیلی را برای هر دو محاسبه به‌کار برید.



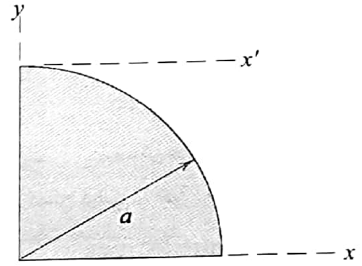
شکل م الف.۲۱

الف.۲۲ اگر h در مقایسه با d کوچک باشد، گشتاور لختی حول محور x یک سطح مستطیل A تقریباً برابر Ad^2 است. درصد خطای n تقریب را برای h/d از ۰٫۱ تا ۱، رسم و تعیین کنید. درصد خطا برای $h = d/4$ چه‌اندازه است؟



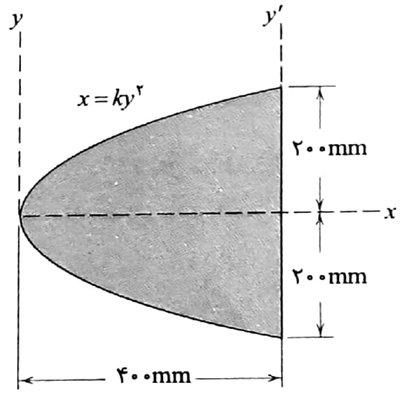
شکل م الف.۲۲

الف.۲۳ گشتاور لختی سطح ربع‌دایره را حول محور مماس بر آن، x'، تعیین کنید.



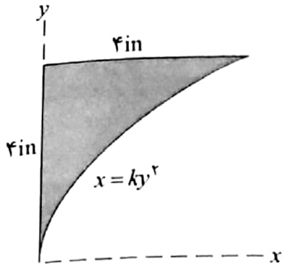
شکل م الف.۲۳

الف.۲۴ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محورهای y و y' تعیین کنید.



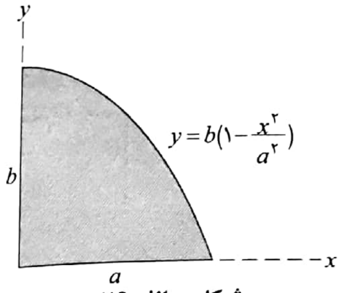
شکل م الف.۲۴

الف.۲۵ به‌روش انتگرال‌گیری مستقیم، گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محور x محاسبه کنید. مسئله را ابتدا با کاربرد نوار افقی و داشتن سطح دیفرانسیلی و سپس با استفاده از نوار دیفرانسیلی قائم حل کنید.



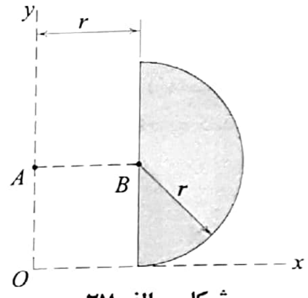
شکل م الف.۲۵

الف.۲۶ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محور x با استفاده از (الف) نوار افقی در سطح و (ب) نوار قائم در سطح محاسبه کنید.



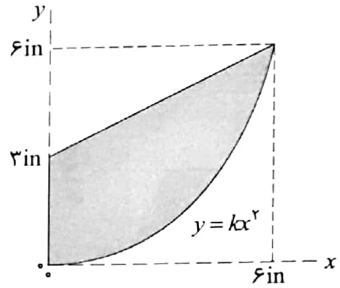
شکل م الف.۲۶

الف.۲۷ گشتاور لختی حول محور x و شعاع چرخشی قطبی را حول نقطهٔ O برای سطح نیم‌دایره نشان داده و تعیین کنید.



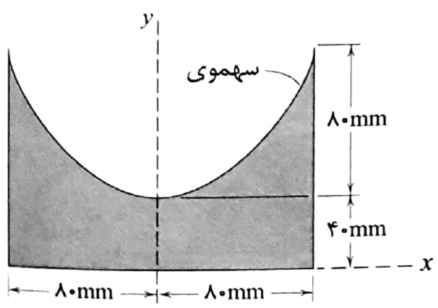
شکل م الف.۲۷

الف.۲۸ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محور x محاسبه کنید.



شکل م الف.۲۸

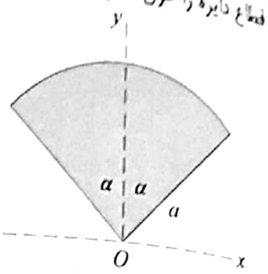
الف.۲۹ شعاع چرخش را حول محور y سطح سایه‌خورده تعیین کنید.



شکل م الف.۲۹

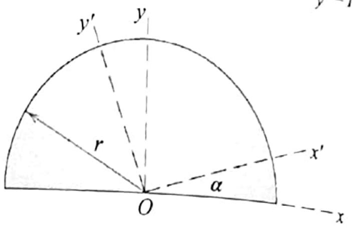
Scanned by CamScanner

۰. گشتاور لختی قطاع دایره را حول محورهای x و y تعیین کنید.



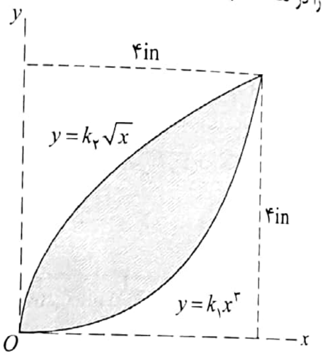
شکل م الف.۳۰

۱. با در نظر گرفتن تقارن نشان دهید: برای سطح نیم‌دایره بدون توجه به α، $I_{x'} = I_{y'} = I_x = I_y$.



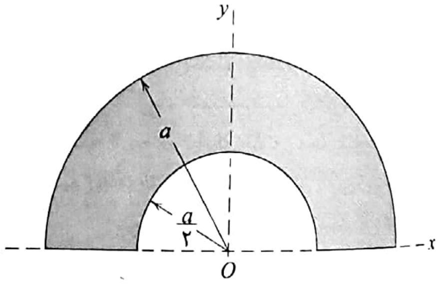
شکل م الف.۳۱

۳۲. گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محورهای x و y محاسبه کرده و گشتاور لختی قطبی را در نقطهٔ O به‌دست آورید.



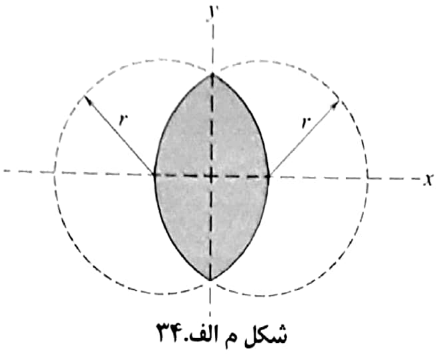
شکل م الف.۳۲

۳۳. با روش نشان‌داده‌شده در این بخش، شعاع چرخش قطبی و متعامد سطح سایه‌خورده را حول محورهای نشان‌داده‌شده تعیین کنید.



شکل م الف.۳۳

۳۴. گشتاور لختی سطح سایه‌خوردهٔ دو دایره‌ای را که با هم هم‌پوشانی دارند حول محور x محاسبه کنید.



شکل م الف.۳۴

الف.۳ سطوح مرکب

اغلب محاسبهٔ گشتاورهای لختی سطوح مرکب از چند شکل هندسی ساده و قابل محاسبه، لازم است. از آنجا که گشتاور لختی انتگرال یا مجموع حاصلضرب‌های مجذور فاصله در جزء سطح است، نتیجه می‌گیریم که گشتاور لختی یک سطح مثبت، همواره مقدارش مثبت است. گشتاور لختی یک سطح مرکب حول یک محور مخصوص، برابر مجموع گشتاورهای لختی اجزای سازندهٔ آن حول همان محور است. اغلب مناسب‌تر است یک سطح مرکب را متشکل از اجزای مثبت یا منفی در نظر بگیریم. در این صورت می‌توان گشتاور لختی یک سطح منفی را با مقدار منفی در نظر گرفت.

وقتی یک سطح مرکب از چندین بخش مختلف ترکیب شود، بهتر است نتایج هر قسمت برحسب سطوح A، گشتاور لختی گذرنده از مرکز هندسی $\bar{I}$، فاصلهٔ d از محور گذرنده از مرکز هندسی تا محوری که گشتاور لختی کل سطح حول آن محاسبه شده، و حاصلضرب Ad^2 جدول‌بندی شود. برای هر قسمت، گشتاور لختی حول محور مورد درخواست با استفاده از قضیهٔ انتقال محورها برابر است با $\bar{I} + Ad^2$. پس برای کل سطح مرکب خواسته‌شده، گشتاور لختی برابر $I = \Sigma\bar{I} + \Sigma A d^2$ می‌شود.

مثلاً برای سطحی واقع در صفحهٔ x-y، به‌کمک نمادهای شکل الف.۴ که در آن $\bar{I}_x$، همانند I_x و $\bar{I}_y$، همانند I_y است، این جدول شامل ستون‌های زیر است

قسمت (جزء)	سطح A	d_x	d_y	Ad_x^2	Ad_y^2	$\bar{I}_x$	$\bar{I}_y$
مجموع	ΣA			$\Sigma A d_x^2$	$\Sigma A d_y^2$	$\Sigma\bar{I}_x$	$\Sigma\bar{I}_y$

از جمع چهار ستون، گشتاور لختی برای سطح مرکب حول محورهای x و y چنین می‌شود

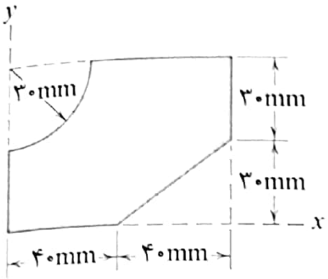
$$I_x = \Sigma\bar{I}_x + \Sigma A d_x^2, \qquad I_y = \Sigma\bar{I}_y + \Sigma A d_y^2$$

همچنین می‌توانیم جمع گشتاورهای لختی قسمت‌های مجزای یک سطح مرکب حول یک محور مفروض را با رابطهٔ $k = \sqrt{I/A}$، که در آن I گشتاور لختی کل و A سطح کلی شکل مرکب است، به‌دست آوریم. به‌طور مشابه، شعاع چرخش k حول محور قطبی گذرنده از یک نقطه برابر است با $\sqrt{I_z / A}$، که در آن برای محورهای x و y گذرنده از آن نقطه $I_z = I_x + I_y$ است.

Scanned by CamScanner

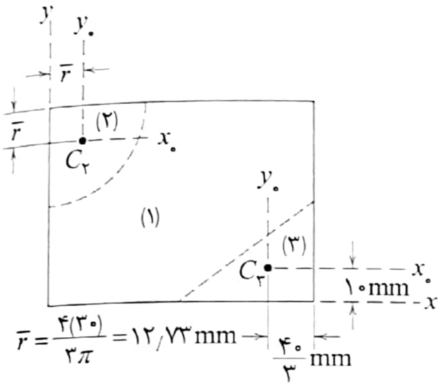
مسئلهٔ نمونهٔ الف.۷

گشتاور لختی حول محورهای x و y را برای سطح سایه‌خورده تعیین کنید. از عبارت داده‌شده در جدول د.۳ برای گشتاورهای لختی گذرنده از مرکز هندسی سطوح مجزا، مستقیماً استفاده کنید.



حل: سطح مورد نظر به سه سطح نشان‌داده‌شده، تقسیم شده است. (۱) یک مستطیل، (۲) یک ربع‌دایره، و (۳) یک مثلث. دو تا از آنها دارای حفره‌هایی با سطح‌های منفی هستند. محورهای گذرنده از مرکز سطح x_0-y_0 برای سطوح (۲) و (۳) نشان داده شده‌اند و موقعیت مراکز هندسی $C_۲$ و $C_۳$ از جدول د.۳ آورده شده است.

جدول زیر محاسبات را تسهیل می‌کند.



قسمت	A, mm²	d_x, mm	d_y, mm	Ad_x^2, mm⁴	Ad_y^2, mm⁴	$\bar{I}_x$, mm⁴	$\bar{I}_y$, mm⁴
۱	۸۰(۶۰)	۳۰	۴۰	۴/۳۲(۱۰^۶)	۷/۶۸(۱۰^۶)	$\frac{۱}{۱۲}(۸۰)(۶۰)^۳$	$\frac{۱}{۱۲}(۶۰)(۸۰)^۳$
۲	$-\frac{۱}{۴}\pi(۳۰)^۲$	(۶۰−۱۲/۷۳)	۱۲/۷۳	−۱/۵۷۹(۱۰^۶)	−۰/۱۱۴۶(۱۰^۶)	$-\left(\frac{\pi}{۱۶}-\frac{۴}{۹\pi}\right)۳۰^۴$	$-\left(\frac{\pi}{۱۶}-\frac{۴}{۹\pi}\right)۳۰^۴$
۳	$-\frac{۱}{۲}(۴۰)(۳۰)$	$\frac{۳۰}{۳}$	$\left(۸۰-\frac{۴۰}{۳}\right)$	−۰/۰۶(۱۰^۶)	−۲/۶۷(۱۰^۶)	$-\frac{۱}{۳۶}۴۰(۳۰)^۳$	$-\frac{۱}{۳۶}(۳۰)(۴۰)^۳$
کل	۳۴۹۰			۲/۶۸(۱۰^۶)	۴/۹۰(۱۰^۶)	۱/۳۶۶(۱۰^۶)	۲/۴۶(۱۰^۶)

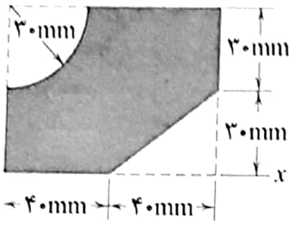
ج. $[I_x=\Sigma\bar{I}_x+\Sigma Ad_x^2]\quad I_x=۱/۳۶۶(۱۰^۶)+۲/۶۸(۱۰^۶)=۴/۰۵(۱۰^۶)\text{mm}^۴$

ج. $[I_y=\Sigma\bar{I}_y+\Sigma Ad_y^2]\quad I_y=۲/۴۶(۱۰^۶)+۴/۹۰(۱۰^۶)=۷/۳۶(۱۰^۶)\text{mm}^۴$

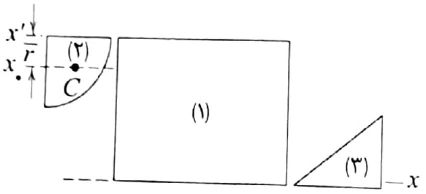
در مسئلهٔ نمونهٔ بعد، روش دیگری برای تعیین I_x ارائه خواهد شد. به‌عنوان مثال، گشتاور لختی سطوح (۱) و (۳) حول محور x کمیت‌هایی هستند که در جدول وجود دارد. درحالی‌که حل بالا با گشتاور لختی گذرنده از مرکز هندسی سطوح (۱) و (۳) شروع شد، مسئلهٔ نمونهٔ بعدی استفادهٔ مستقیمی از جدول‌بندی گشتاورهای لختی حول قاعده را فراهم می‌سازد.

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ الف.۸ گشتاور لختی و شعاع چرخش را حول محور x برای سطح سایه‌خوردهٔ نشان‌داده‌شده حساب کنید. در صورت امکان از جدول گشتاورهای لختی استفاده کنید.



حل: سطح مرکب از یک مستطیل با سطح مثبت (۱)، و سطح منفی ربع‌دایره (۲)، و سطح مثلث منفی (۳) تشکیل شده است. برای مستطیل، گشتاور لختی حول محور x از مسئلهٔ نمونهٔ الف.۱ یا از جدول د.۳ چنین است



$$I_x = \frac{۱}{۳}Ah^۲ = \frac{۱}{۳}(۸۰)(۶۰)(۶۰)^۲ = ۵/۷۶(۱۰^۶)\ \text{mm}^۴$$

از مسئلهٔ نمونهٔ الف.۳ (یا جدول د.۳) گشتاور لختی سطح قطاع دایره حول محور قاعدهٔ x' با علامت منفی برابر است با

$$I_{x'} = -\frac{۱}{۴}\left(\frac{\pi r^۴}{۴}\right) = -\frac{\pi}{۱۶}(۳۰)^۴ = -۰/۱۵۹۰(۱۰^۶)\ \text{mm}^۴$$

حال با استفاده از قضیهٔ محورهای موازی این نتیجه را به فاصلهٔ $\bar{r} = ۴r/(۳\pi) = ۴(۳۰)/(۳\pi) = ۱۲/۷۳\ \text{mm}$ منتقل می‌کنیم تا گشتاور لختی گذرنده از مرکز هندسی بخش (۲) (یا استفادهٔ مستقیم از جدول د.۳) را به‌دست آوریم

① $[\bar{I} = I - Ad^۲]$

$$\bar{I}_x = -۰/۱۵۹۰(۱۰^۶) - \left[-\frac{\pi(۳۰)^۲}{۴}(۱۲/۷۳)^۲\right] = -۰/۰۴۴۵(۱۰^۶)\ \text{mm}^۴$$

گشتاور لختی قطاع دایره حول محور x برابر است با

② $[I = \bar{I} + Ad^۲]$

$$I_x = -۰/۰۴۴۵(۱۰^۶) + \left[-\frac{\pi(۳۰)^۲}{۴}\right](۶۰-۱۲/۷۳)^۲ = -۱/۶۲۴(۱۰^۶)\ \text{mm}^۴$$

سرانجام گشتاور لختی مثلث سطح (۳) را حول قاعدهٔ آن از مسئلهٔ نمونهٔ الف.۲ (یا جدول د.۳) به‌دست می‌آوریم

$$I_x = -\frac{۱}{۱۲}bh^۳ = -\frac{۱}{۱۲}(۴۰)(۳۰)^۳ = -۰/۹۰(۱۰^۶)\ \text{mm}^۴$$

در نتیجه گشتاور لختی کل حول محور x سطح مرکب برابر است با

③ ج. $$I_x = ۵/۷۶(۱۰^۶) - ۱/۶۲۴(۱۰^۶) - ۰/۰۹(۱۰^۶) = ۴/۰۵(۱۰^۶)\ \text{mm}^۴$$

این نتیجه با مسئلهٔ نمونهٔ الف.۷ مطابقت دارد.

سطح خالص شکل برابر $A = ۶۰(۸۰) - \frac{۱}{۴}\pi(۳۰)^۲ - \frac{۱}{۲}(۴۰)(۳۰) = ۳۴۹۰\ \text{mm}^۲$ است، به‌طوری‌که شعاع چرخش حول محور x برابر است با

ج. $$k_x = \sqrt{I_x/A} = \sqrt{۴/۰۵(۱۰^۶)/۳۴۹۰} = ۳۴/۰\ \text{mm}$$

راهنمایی‌های مفید

① توجه کنید، همان‌طورکه در مسئلهٔ نمونهٔ الف.۵ انجام داده شد، باید گشتاور لختی را برای ربع‌دایره نسبت به محور گذرنده از مرکز هندسی x. پیش از انتقال آن به محور x انجام داد.

② به‌طور دقیق باید به علائم توجه کرد. از آنجا که سطح منفی است، هم $\bar{I}$ و هم A دارای علامت منفی هستند.

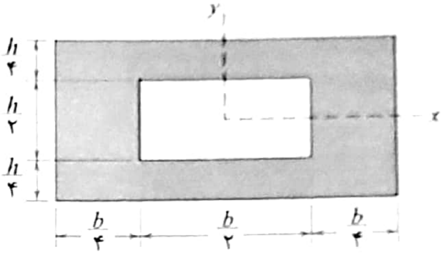
③ همواره در نقاط کلیدی مانند این حالت از عقل سلیم استفاده کنید. در اینجا، دو نشانهٔ منفی برای سطوح (۲) و (۳) مقدار عددی گشتاور لختی را نسبت به قاعدهٔ مستطیل کاهش می‌دهد.

Scanned by CamScanner

مسائل

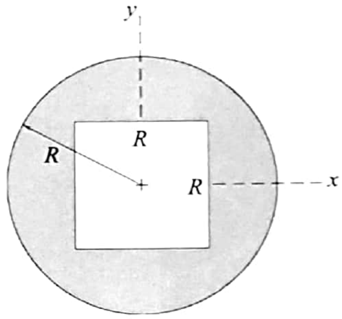
مسائل مقدماتی

الف.۳۵ گشتاور لختی را حول محور x سطح مستطیل بدون در نظر گرفتن حفرهٔ مرکزی مستطیل، و با در نظر گرفتن آن تعیین کنید.



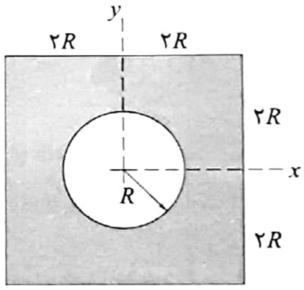
شکل م الف.۳۵

الف.۳۶ گشتاور لختی را حول محور y سطح دایره بدون در نظر گرفتن حفرهٔ مربع‌شکل مرکزی، و با در نظر گرفتن آن تعیین کنید.



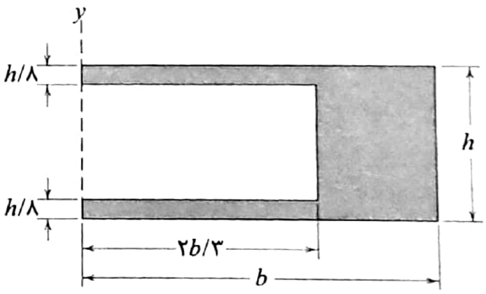
شکل م الف.۳۶

الف.۳۷ درصد کاهش n در گشتاور لختی قطبی صفحهٔ مربعی را در نتیجهٔ ایجاد حفرهٔ دایره‌ای‌شکل تعیین کنید.



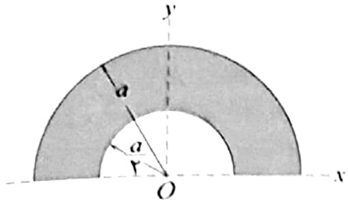
شکل م الف.۳۷

الف.۳۸ درصد کاهش سطح و گشتاور لختی سطح حول محور y را در اثر جدا کردن صفحهٔ مستطیلی با قاعدهٔ b و ارتفاع h تعیین کنید.



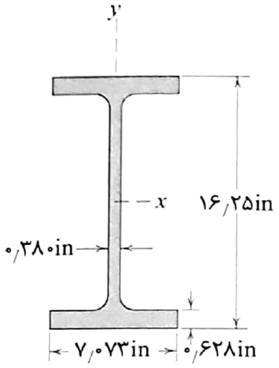
شکل م الف.۳۸

الف.۳۹ با روش بیان‌شده در این بخش، شعاع چرخش قطبی و متعامد سطح سایه‌خورده در مسئلهٔ الف.۳۳ را که در اینجا تکرارشده است، حول محورهای نشان‌داده‌شده تعیین کنید.



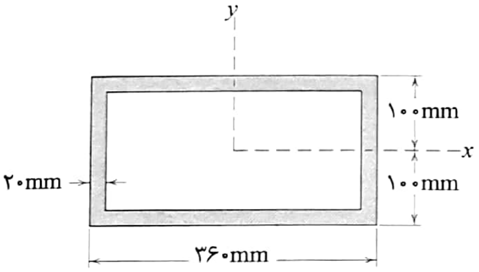
شکل م الف.۳۹

الف.۴۰ سطح مقطع یک تیر I-شکل بال پهن، دارای ابعاد نشان داده شده است. با در نظر گرفتن مقطع به‌صورت ترکیبی از سه مستطیل، با تقریب دقیقی مقدار $\overline{I}_x = ۶۵۷\,\text{in}^{۴}$ را که در هندبوک‌ها آمده است به‌دست آورید.



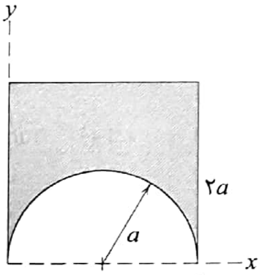
شکل م الف.۴۰

الف.۴۱ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محور x به دو روش معین کنید. ضخامت دیواره در هر چهار وجه مستطیل برابر ۲۰mm است.



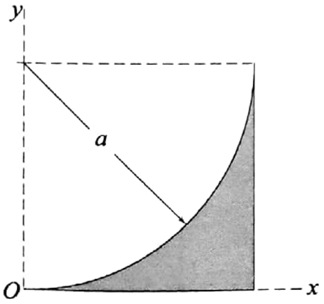
شکل م الف.۴۱

الف.۴۲ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محورهای x و y تعیین کنید.



شکل م الف.۴۲

الف.۴۳ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محورهای x و y تعیین کنید.

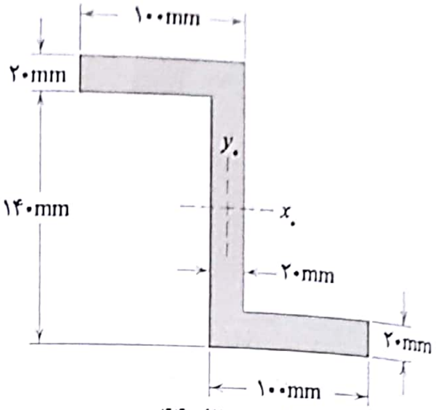


شکل م الف.۴۳

Scanned by CamScanner

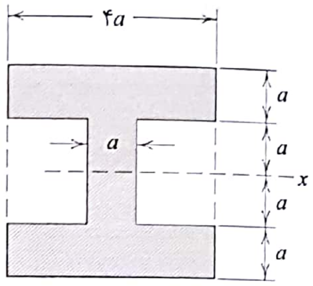
...ائل برگزیده

...۴۴ گشتاور لختی مقطع Z را حول محورهای مرکز سطح $x_\circ$ و $y_\circ$ تعیین ...



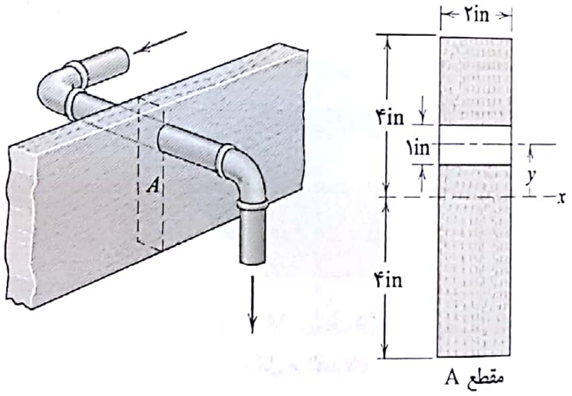
شکل م الف.۴۴

...۴۵ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محور x به دو روش متفاوت تعیین کنید.



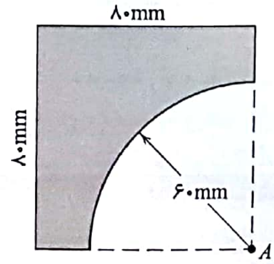
شکل م الف.۴۵

...۴۶ در تیرچهٔ کف ساختمانی به‌ابعاد ۲in و ۸in، سوراخی به‌قطر ۱in برای عبور لولهٔ ... ایجاد شده است. درصد کاهش n در گشتاور لختی سطح مقطع تیرچه را نسبت به محور x ... مقایسه با وضعیت بدون سوراخ) تعیین کنید. محل سوراخ در بازهٔ $0 \le y \le 3{,}5\text{in}$ قرار ... رابطهٔ به‌دست آمده را برای $y = 2\text{in}$ ارزیابی کنید.



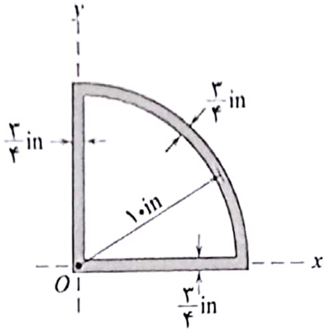
شکل م الف.۴۶

...۴۷ شعاع چرخش قطبی حول نقطهٔ A را برای سطح سایه‌خورده تعیین کنید.



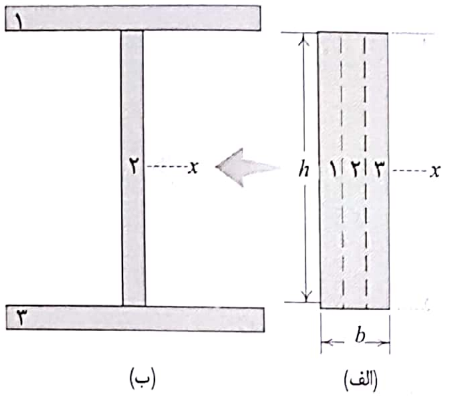
شکل م الف.۴۷

الف.۴۸ شعاع چرخش قطبی را حول نقطهٔ O سطح سایه‌خورده محاسبه کنید. توجه کنید که عرض جزء سطح در مقایسه با طول آن ناچیز است.



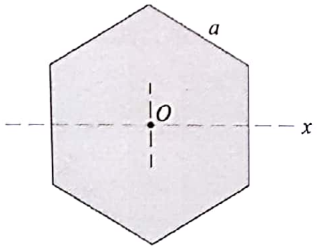
شکل م الف.۴۸

الف.۴۹ سطح مستطیل نشان‌داده‌شده در قسمت (الف) به سه قسمت مساوی تقسیم شده و سپس مطابق قسمت (ب) چیده شده است. عبارتی برای گشتاور لختی سطح در قسمت (ب) حول محور x گذرنده از مرکز سطح تعیین کنید. اگر $h = 200\text{mm}$ و $b = 60\text{mm}$ باشد، چند درصد افزایش n گشتاور لختی برای سطح a ایجاد می‌شود؟



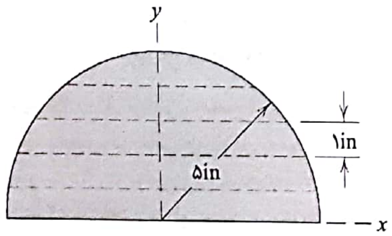
شکل م الف.۴۹

الف.۵۰ رابطه‌ای برای گشتاور لختی سطح شش‌ضلعی منتظم به‌ضلع a حول محور مرکزی x به‌دست آورید.



شکل م الف.۵۰

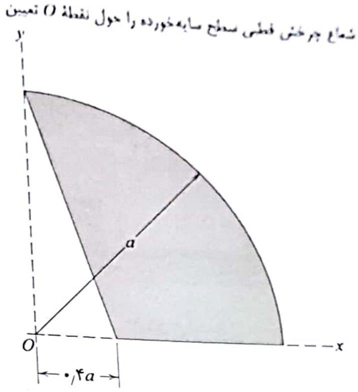
الف.۵۱ سطح نیم‌دایره‌ای را به پنج نوار افقی با عرض مساوی تقسیم نموده و گشتاور لختی تقریبی آن را حول محور x محاسبه کنید. گشتاور لختی هر نوار را با ضرب مساحت آن (عرض نوار ضربدر طول افقی میانهٔ نوار) در مجذور فاصلهٔ میانهٔ نوار تا محور x تخمین بزنید. نتیجهٔ خود را با مقدار دقیق مقایسه کنید.



شکل م الف.۵۱

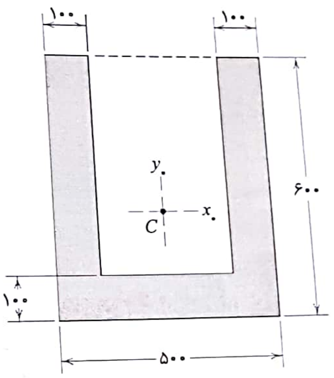
Scanned by CamScanner

الف.۵۲ شعاع چرخش قطبی سطح سایه‌خورده را حول نقطهٔ O تعیین کنید.



شکل م الف.۵۲

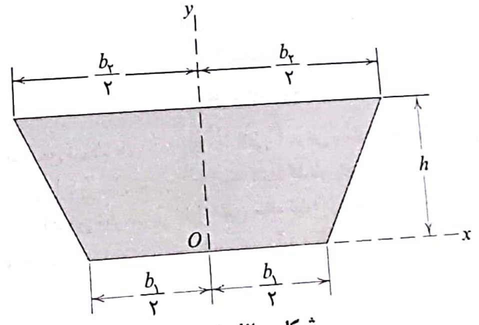
الف.۵۳ شعاع چرخش قطبی سطح سایه‌خورده را حول مرکز هندسی C آن محاسبه کنید.



ابعاد برحسب میلیمتر

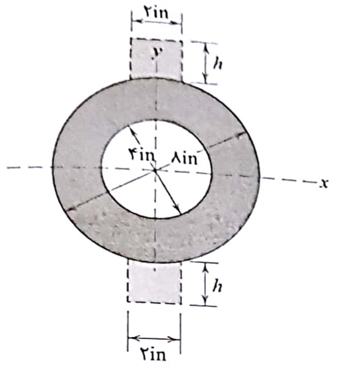
شکل م الف.۵۳

الف.۵۴ با روش ارائه‌شده در این بخش، گشتاور لختی را حول محورهای x و y ذوزنقهٔ مسئلهٔ الف.۱۸ دوباره در اینجا تعیین کنید.



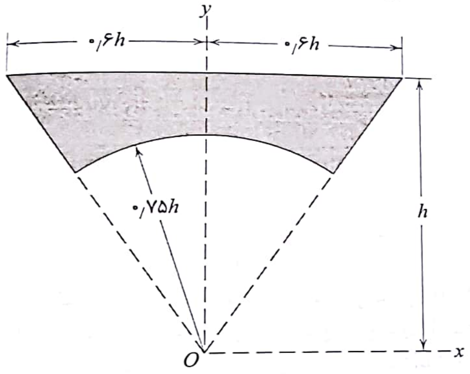
شکل م الف.۵۴

الف.۵۵ برای تقویت یک دکل توخالی با مقطع دایره‌ای مطابق شکل، دو تسمه از همان جنس با مقطع مستطیل، در تمامی طول دکل به دو طرف آن متصل می‌شود. طول h را به‌طوری‌که مقاومت دکل در برابر خمش وارده در صفحهٔ y-z دو برابر شود، تعیین کنید. (این مقاومت با گشتاور لختی مقطع عرضی نسبت به محور x متناسب است.) مرز داخلی هر تسمه را یک خط راست در نظر بگیرید.



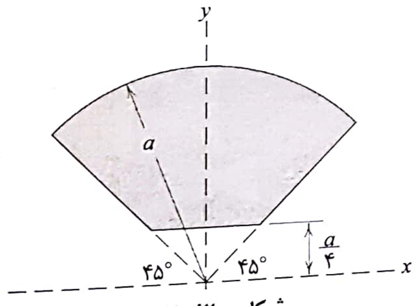
شکل م الف.۵۵

الف.۵۶ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محورهای x و y تعیین کنید. همچنین گشتاور لختی قطبی را حول نقطهٔ O تعیین کنید.



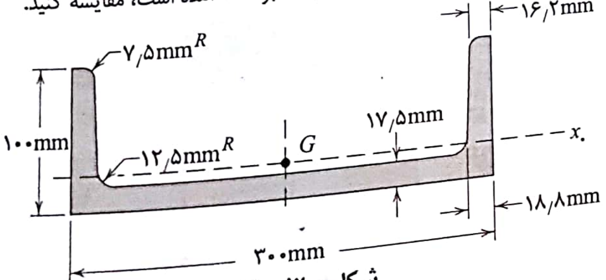
شکل م الف.۵۶

الف.۵۷ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محور x تعیین کنید.



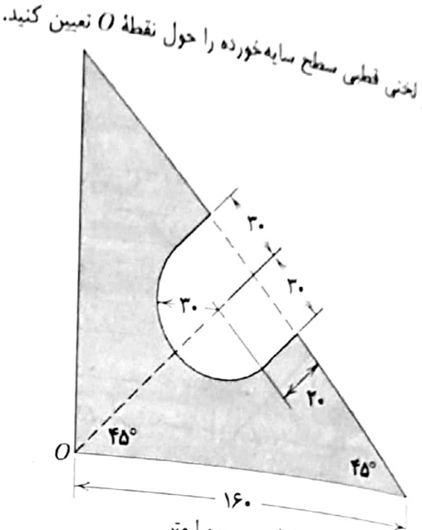
شکل م الف.۵۷

الف.۵۸ گشتاور لختی مقطع کانال ۳۰۰×۱۰۰mm را حول محور x گذرنده از مرکز هندسی، محاسبه کنید. از انحنای جوش و شعاع جوش‌ها صرف‌نظر کرده و پاسخ را با مقدار $\bar{I}_x = 6.25(10^6)\ \text{mm}^4$ که در هندبوک‌ها آمده است، مقایسه کنید.



شکل م الف.۵۸

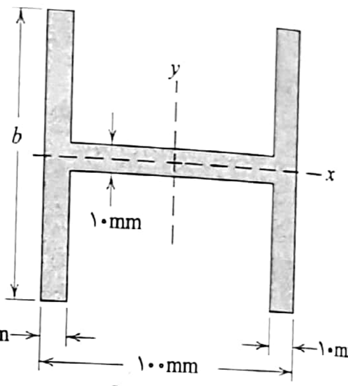
...گشتاور لختی قطبی سطح سایه‌خورده را حول نقطهٔ O تعیین کنید.



ابعاد برحسب میلیمتر

شکل م الف.۵۹

...۶۰ برای مقطع تیر H-شکل، عرض بال b را طوری تعیین کنید که گشتاور[های لختی] حول محورهای مرکزی x و y برابر باشند. (راهنمایی: در اینجا حل معادلهٔ درجه سوم لازم است. برای حل یک معادلهٔ درجه سوم به پیوست ج.۴ یا پیوست ج.۱۱ مراجعه کنید.)



شکل م الف.۶۰

الف.۴ حاصلضرب‌های لختی و چرخش محورها

در این بخش حاصلضرب لختی را نسبت به محورهای متعامد تعریف کرده و سپس قضیهٔ محورهای موازی را برای محورهایی که از مرکز هندسی می‌گذرند یا نمی‌گذرند پی‌ریزی می‌کنیم. سپس به اثرات چرخش محورها بر روی گشتاورها و حاصلضرب‌های لختی می‌پردازیم.

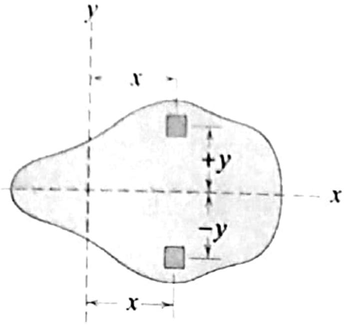
تعریف

در بعضی از مسائل با مقاطع نامتقارن و در محاسبهٔ گشتاور لختی حول محورهای چرخش‌یافته، عبارت $dI_{xy} = xy\,dA$ که به‌شکل انتگرال‌گیری خود را نشان می‌دهد، ظاهر می‌شود

$$I_{xy} = \int xy\,dA \qquad \text{(الف.۷)}$$

که در آن x و y مختصات جزء سطح $dA = dx\,dy$ است. کمیت I_{xy} را *حاصلضرب لختی* مساحت A حول محورهای x-y می‌گویند. برخلاف گشتاورهای لختی که برای سطوح مثبت همواره مثبت هستند، حاصلضرب لختی ممکن است مثبت، منفی، و یا صفر باشد.

هرگاه یکی از محورهای مرجع، محور تقارن باشد، مثل محور x در سطح شکل الف.۵، حاصلضرب لختی صفر است. می‌بینیم که به‌دلیل اجزای متقارن، مجموع جملات $x(-y)dA$ و $x(+y)dA$ صفر است. از آنجا که



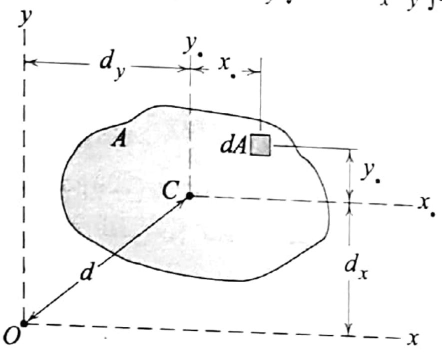
شکل الف.۵

تمامی این سطح را می‌توان متشکل از زوج‌هایی از این قبیل اجزاء در نظر گرفت، نتیجه می‌گیریم که حاصلضرب لختی I_{xy} برای تمامی سطح، مساوی صفر است.

انتقال محورها

طبق تعریف، حاصلضرب لختی سطح A در شکل الف.۴ نسبت به محورهای x و y برحسب مختصات $x_\circ$ و $y_\circ$ نسبت به محورهایی که از مرکز هندسی می‌گذرند چنین است

$$I_{xy} = \int (x_\circ + d_y)(y_\circ + d_x)\,dA$$
$$= \int x_\circ y_\circ\,dA + d_x \int x_\circ\,dA + d_y \int y_\circ\,dA + d_x d_y \int dA$$



شکل الف. ۴ (تکرار)

اولین انتگرال بنابه تعریف حاصلضرب لختی حول محور گذرنده از مرکز هندسی است که آن را با $\bar{I}_{xy}$ نشان می‌دهیم. دو انتگرال وسط هر دو صفرند، زیرا گشتاور لختی سطح حول مرکز هندسی خود لزوماً صفر است و جملهٔ چهارم تنها $d_x d_y A$ است. پس قضیهٔ انتقال محورها برای حاصلضرب‌های لختی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A \qquad \text{(الف.۸)}$$

چرخش محورها

حاصلضرب لختی وقتی مفید است که بخواهیم گشتاور لختی یک سطح را حول محور مایل محاسبه کنیم. این موضوع مستقیماً ما را به مسئلهٔ مهم محورهایی که حول آنها گشتاورهای لختی ماکزیمم یا مینیمم است، هدایت می‌کند.

در شکل الف.۶ گشتاور لختی سطح حول محورهای x' و y' چنین هستند

$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$
$$I_{y'} = \int x'^2 dA = \int (y\sin\theta + x\cos\theta)^2 dA$$

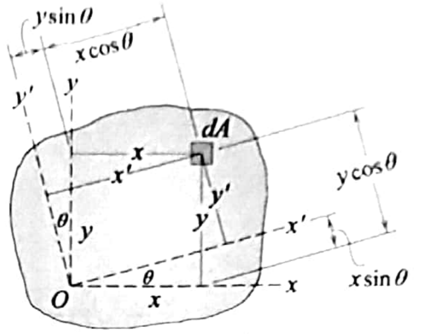
که در آن x' و y' جایگزین عبارات معادل خود که در هندسهٔ شکل دیده می‌شود، شده‌اند.

با بسط و جایگذاری اتحادهای مثلثاتی زیر

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

Scanned by CamScanner

و روابط مربوط به I_x، I_y و I_{xy} نتیجه می‌شود



شکل الف.۶

$$I_{x'} = \frac{I_x+I_y}{2} + \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$
$$I_{y'} = \frac{I_x+I_y}{2} - \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \qquad \text{(الف.۹)}$$

به‌طور مشابه حاصلضرب لختی حول محورهای مایل را چنین می‌نویسیم

$$I_{x'y'} = \int x'y'\,dA = \int (y\sin\theta + x\cos\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta)\,dA$$

با بسط و جایگزینی روابط مثلثاتی داریم

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta, \qquad \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

و روابط توصیفی I_x، I_y و I_{xy} نتیجه می‌دهد

$$I_{x'y'} = \frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \qquad \text{(الف.۹ الف)}$$

با جمع کردن معادلات (الف.۹) نتیجه می‌شود: $I_{x'}+I_{y'}=I_x+I_y=I_z$، که در آن I_z گشتاور لختی قطبی حول نقطهٔ O است که با نتایج معادلهٔ (الف.۳) سازگار است.

زاویه‌ای که $I_{x'}$ و $I_{y'}$ را ماکزیمم یا مینیمم می‌کند، با مساوی صفر قرار دادن مشتق $I_{x'}$ یا $I_{y'}$، نسبت به θ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = (I_y - I_x)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

با توجه به زاویهٔ بحرانی برای α، داریم

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \qquad \text{(الف.۱۰)}$$

معادلهٔ (الف.۱۰) دو مقدار برای 2α ارائه می‌دهد که به‌میزان π با یکدیگر اختلاف دارند، زیرا $\tan 2\alpha = \tan(2\alpha+\pi)$ است. در نتیجه دو پاسخ به‌دست آمده برای α به‌میزان $\frac{\pi}{2}$ با یکدیگر اختلاف دارند. یکی از این دو مقدار بیانگر محور ماکزیمم گشتاور لختی و مقدار دیگر، بیانگر محور مینیمم گشتاور لختی است. این دو محور متعامد *محورهای اصلی لختی* نامیده می‌شوند.

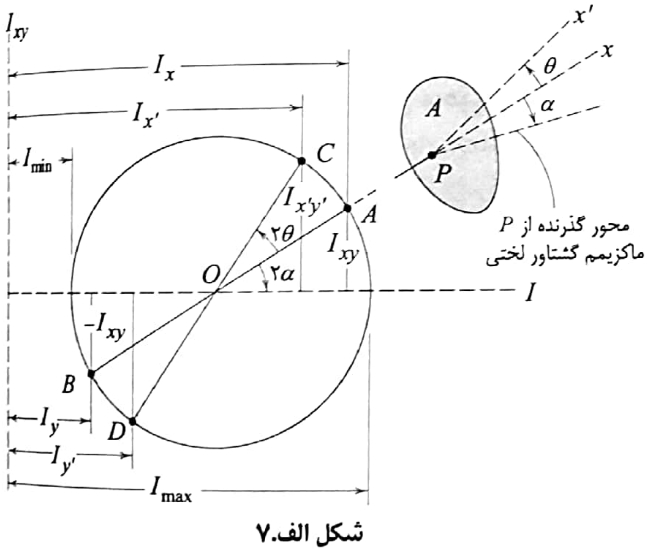
وقتی معادلهٔ (الف.۱۰) به‌ازای مقدار بحرانی 2θ را در معادلهٔ (الف.۹ الف) قرار می‌دهیم، ملاحظه می‌کنیم که حاصلضرب گشتاور به‌ازای محورهای اصلی لختی صفر می‌شود. با جایگذاری $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$، که از معادلهٔ (الف.۱۰) به‌دست آمدند، به‌جای $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ در معادلهٔ (الف.۹)، عبارت‌های گشتاورهای اصلی به‌دست می‌آید

$$I_{max} = \frac{I_x+I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x-I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$
$$I_{min} = \frac{I_x+I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x-I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \qquad \text{(الف.۱۱)}$$

دایرهٔ لختی مور

می‌توانیم عبارات داده‌شده در معادلات (الف.۹)، (الف.۹ الف)، (الف.۱۰) و (الف.۱۱) را به‌طور ترسیمی توسط نموداری به‌نام *دایرهٔ مور* نشان دهیم. به‌ازای مقادیر معین I_x، I_y و I_{xy} می‌توان مقادیر متناظر $I_{x'}$، $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$ را به‌ازای هر زاویهٔ θ از روی این نمودار به‌دست آورد. ابتدا مطابق شکل الف.۷ محور افقی را برای اندازه‌گیری گشتاورهای لختی و محورهای عمودی را برای اندازه‌گیری حاصلضرب لختی انتخاب می‌کنیم. سپس نقطهٔ A با مختصات (I_x, I_{xy}) و نقطهٔ B با مختصات $(I_y, -I_{xy})$ را در نظر می‌گیریم.

حال دایره‌ای رسم می‌کنیم که این دو نقطه در دوسر قطر آن قرار دارند. زاویه‌ای که شعاع OA با محور افقی می‌سازد برابر است با 2α یا دو برابر زاویه‌ای است که محور متناظر با گشتاور لختی ماکزیمم با محور x می‌سازد. زاویهٔ روی نمودار و زاویهٔ روی سطح، هر دو را مطابق شکل در یک جهت اندازه‌گیری می‌کنیم. مختصات نقطه‌ای مانند C برابر است با $(I_{x'}, I_{x'y'})$ و مختصات نقطه‌ای همچون D عبارت است از $(I_{y'}, I_{x'y'})$. زاویهٔ بین OA و OC برابر است با 2θ، یعنی دو برابر زاویهٔ بین محور x و x'. اندازه‌گیری این دو زاویه نیز مطابق شکل در یک جهت صورت می‌گیرد. با استفاده از روابط مثلثاتی دایره می‌توان نشان داد که معادلات (الف.۹)، (الف.۹ الف) و (الف.۱۰) با عبارت‌های به‌دست‌آمده مطابقت دارند.

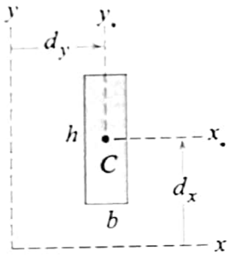


شکل الف.۷

Scanned by CamScanner

مسئلهٔ نمونهٔ الف.۹

حاصلضرب لختی سطح مستطیل با مرکز C را نسبت به محورهای x-y موازی بـا اضـلاع آن تعیین کنید.



حل: از آنجا که به‌دلیل تقارن حاصلضرب لختی $\bar{I}_{xy}$ حول محورهای x_0 و y_0 صفر است، قضیهٔ انتقال محورها نتیجه می‌دهد

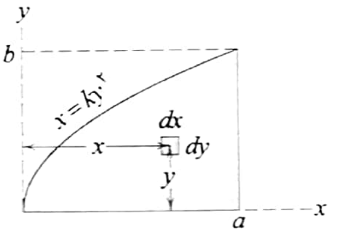
$$[I_{xy}=\bar{I}_{xy}+d_x d_y A] \qquad I_{xy}=d_x d_y bh$$

ج.

در این مثال هم d_x و هم d_y مثبت نشان داده شده‌اند. باید مراقب باشیم که با جهـت مثبـت d_x و d_y سازگار باشیم تا علامت جبری درست آنها رعایت شود.

مسئلهٔ نمونهٔ الف.۱۰

حاصلضرب لختی حول محورهای x-y را برای سطح زیر سهمی معین کنید.

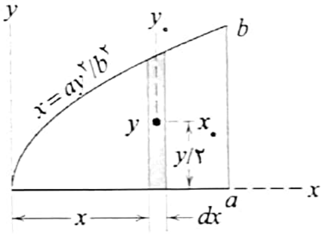


حل: با قرار دادن $x=a$، وقتی $y=b$، معادلهٔ منحنی برابر $x=ay^2/b^2$ می‌شود.

حل (۱): اگر با جزء مرتبهٔ دوم $dA=dx\,dy$ شـروع کنـیم داریـم $dI_{xy}=xy\,dx\,dy$. انتگرال در تمام سطح برابر می‌شود با

$$I_{xy}=\int_0^b\int_{ay^2/b^2}^a xy\,dx\,dy=\int_0^b\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{a^2y^4}{b^4}\right)y\,dy=\frac{1}{6}a^2b^2$$

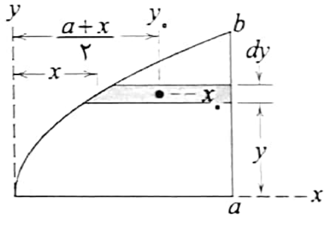
ج.



حل (۲): به روشی دیگر، با جزء سطح مرتبهٔ اول شـروع مـی‌کنـیم و بـا اسـتفاده از نتـایج حاصل از مسئلهٔ نمونهٔ الـف.۹ تنهـا یـک بـار انتگـرال مـی‌گیـریم. بـا انتخـاب نـوار عمـودی ❶ $dA=y\,dx$ چنین می‌شود $dI_{xy}=0+(\frac{1}{2}y)(x)(y\,dx)$، کـه در آن فاصـلهٔ تـا محورهـای گذرنده از مرکز هندسی جزء مستطیلی برابر $d_x=y/2$ و $d_y=x$ می‌شود. اکنون داریم

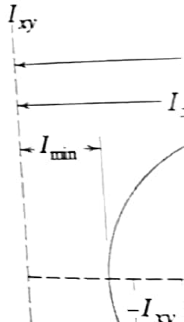
$$I_{xy}=\int_0^a\frac{y^2}{2}x\,dx=\int_0^a\frac{xb^2}{2a}x\,dx=\frac{b^2}{6a}x^3\Big|_0^a=\frac{1}{6}a^2b^2$$

ج.



راهنمایی مفید

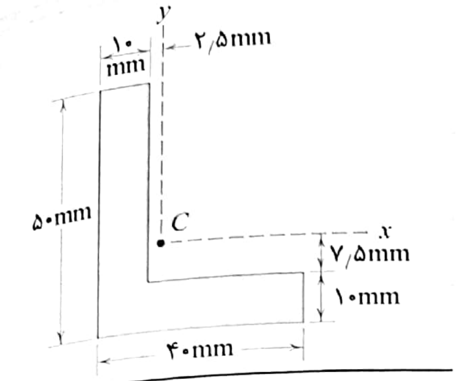
❶ اگر یک نوار افقی انتخاب می‌کردیم، عبارت فاصله چنین می‌شد $dI_{xy}=y\frac{1}{2}(a+x)[(a-x)dy]$، که پس از گرفتن انتگرال از آن نتیجهٔ پیشین به‌دست می‌آمد.



Scanned by CamScanner

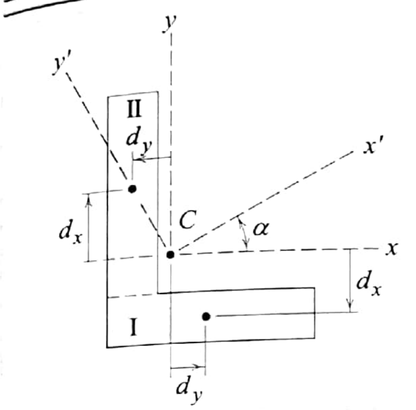
مسئلهٔ نمونهٔ الف.۱۲

جهت محورهای اصلی لختی مرکز هندسی مقطع نبشی نشان‌داده‌شده و همچنین گشتاورهای لختی ماکزیمم و مینیمم متناظر را تعیین کنید.



حل: مکان مرکز هندسی C به‌سهولت قابل محاسبه است و وضعیت آن در نمودار نشان داده شده است.

حاصلضرب لختی. حاصلضرب لختی برای هر مستطیل حول محور گذرنده از مرکز هندسی آن موازی با محورهای x-y با توجه به تقارن صفر است. پس حاصلضرب لختی حول محورهای x-y برای قسمت (۱) چنین است



$$[I_{xy}=\bar{I}_{xy}+d_x d_y A] \qquad I_{xy}=۰+(-۱۲٫۵)(+۷٫۵)(۴۰۰)=-۳٫۷۵(۱۰)^۴\ \text{mm}^۴$$

که در آن

$$d_x=-(۷٫۵+۵)=-۱۲٫۵\text{mm}$$

و

$$d_y=+(۲۰-۱۰-۲٫۵)=۷٫۵\text{mm}$$

همچنین مانند قسمت ۲

$$[I_{xy}=\bar{I}_{xy}+d_x d_y A] \qquad I_{xy}=۰+(۱۲٫۵)(-۷٫۵)(۴۰۰)=-۳٫۷۵(۱۰)^۴\ \text{mm}^۴$$

که در آن

$$d_x=+(۲۰-۷٫۵)=۱۲٫۵\text{mm},\quad d_y=-(۵+۲٫۵)=-۷٫۵\text{mm}$$

برای کل زاویه

$$I_{xy}=-۳٫۷۵(۱۰)^۴-۳٫۷۵(۱۰)^۴=-۷٫۵(۱۰)^۴\ \text{mm}^۴$$

گشتاورهای لختی. گشتاورهای لختی حول محورهای x و y قسمت (۱) چنین است

$$[I=\bar{I}+Ad^۲] \qquad I_x=\frac{۱}{۱۲}(۴۰)(۱۰)^۳+(۴۰۰)(۱۲٫۵)^۲=۶٫۵۸(۱۰)^۴\ \text{mm}^۴$$

$$I_y=\frac{۱}{۱۲}(۱۰)(۴۰)^۳+(۴۰۰)(۷٫۵)^۲=۷٫۵۸(۱۰)^۴\ \text{mm}^۴$$

و گشتاور لختی برای قسمت (۲) حول همین محورها برابرند با

$$[I=\bar{I}+Ad^۲] \qquad I_x=\frac{۱}{۱۲}(۱۰)(۴۰)^۳+(۴۰۰)(۱۲٫۵)^۲=۱۱٫۵۸(۱۰)^۴\ \text{mm}^۴$$

$$I_y=\frac{۱}{۱۲}(۴۰)(۱۰)^۳+(۴۰۰)(۷٫۵)^۲=۲٫۵۸(۱۰)^۴\ \text{mm}^۴$$

پس برای کل مقطع داریم

$$I_x=۶٫۵۸(۱۰)^۴+۱۱٫۵۸(۱۰)^۴=۱۸٫۱۷(۱۰)^۴\ \text{mm}^۴$$

$$I_y=۷٫۵۸(۱۰)^۴+۲٫۵۸(۱۰)^۴=۱۰٫۱۷(۱۰)^۴\ \text{mm}^۴$$

محورهای اصلی: زاویهٔ شیب محورهای اصلی لختی از معادلهٔ (الف.۱۰) به‌دست می‌آید. پس داریم

$$\left[\tan ۲\alpha=\frac{۲I_{xy}}{I_y-I_x}\right] \qquad \tan ۲\alpha=\frac{۲(-۷٫۵۰)}{۱۰٫۱۷-۱۸٫۱۷}=۱٫۸۷۵$$

$$۲\alpha=۶۱٫۹^\circ \qquad \alpha=۳۱٫۰^\circ$$ ج.

اکنون محاسبهٔ گشتاورهای لختی را از معادلات (الف.۹) با استفاده از α به‌جای θ محاسبه می‌کنیم و I_{max} را از I_x، و I_{min} را از I_y به‌دست می‌آوریم. بنابراین

$$I_{max}=\left[\frac{۱۸٫۱۷+۱۰٫۱۷}{۲}+\frac{۱۸٫۱۷-۱۰٫۱۷}{۲}(۰٫۴۷۱)+(۷٫۵۰)(۰٫۸۸۲)\right](۱۰)^۴$$

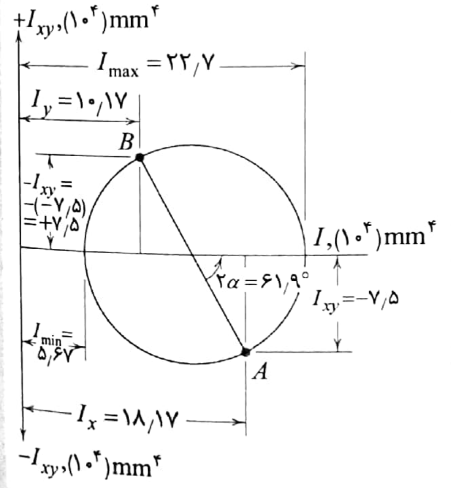
$$=۲۲٫۷(۱۰)^۴\ \text{mm}^۴$$ ج.

$$I_{min}=\left[\frac{۱۸٫۱۷+۱۰٫۱۷}{۲}-\frac{۱۸٫۱۷-۱۰٫۱۷}{۲}(۰٫۴۷۱)-(۷٫۵۰)(۰٫۸۸۲)\right](۱۰)^۴$$

$$=۵٫۶۷(۱۰)^۴\ \text{mm}^۴$$ ج.

راهنمایی مفید

دایرهٔ مور. به روشی دیگر، می‌توانستیم از معادلات (الف.۱۱) برای به‌دست آوردن I_{max} و یا I_{min} استفاده کنیم یا می‌توانستیم دایرهٔ مور را از روی مقادیر به‌دست آمدهٔ I_x، I_y و I_{xy} رسم کنیم. این مقادیر روی نمودار مشخص شده‌اند و نقاط A و B که دو سر قطر دایره هستند، به‌دست آمده‌اند. مطابق شکل، زاویهٔ ۲α، I_{max} و I_{min} از روی نمودار به‌دست می‌آیند.

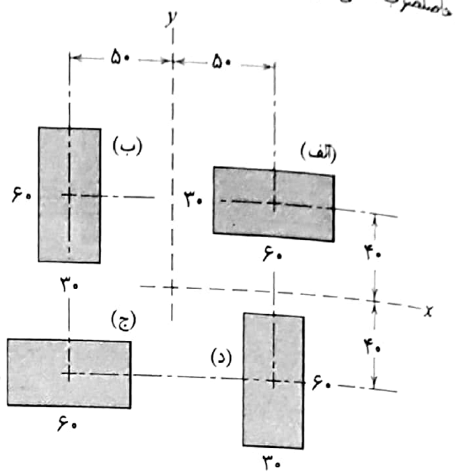


Scanned by CamScanner

مسائل

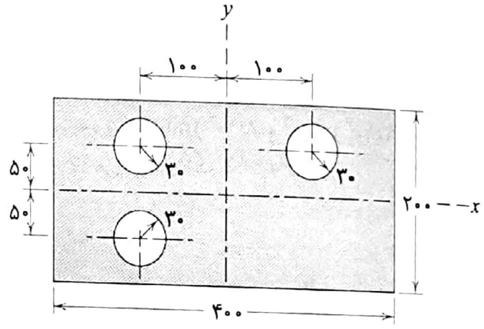
مسائل مقدماتی

الف.۶۱ حاصلضرب لختی هریک از چهار سطح را حول محورهای x-y تعیین کنید.



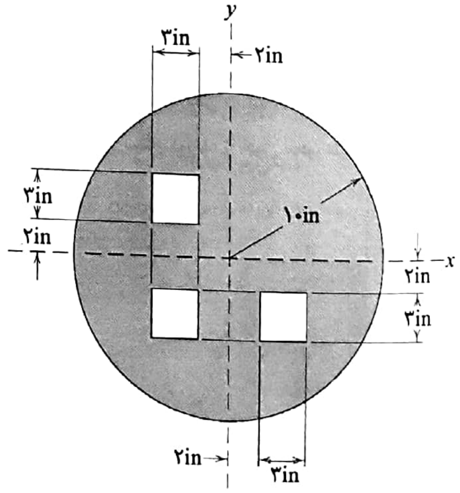
شکل م الف.۶۱

الف.۶۲ I_x، I_y و I_{xy} را برای سطح مستطیل با سه حفرهٔ دایره‌ای توخالی مساوی تعیین کنید.



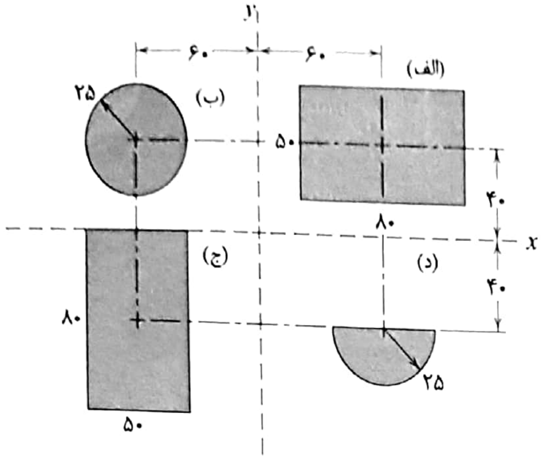
شکل م الف.۶۲

الف.۶۳ حاصلضرب لختی را حول محورهای x-y سطح دایره‌ای با سه حفرهٔ مربعی برداشته‌شده تعیین کنید.



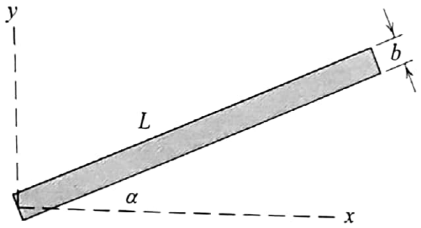
شکل م الف.۶۳

الف.۶۴ حاصلضرب لختی هریک از چهار سطح را حول محورهای x-y تعیین کنید.



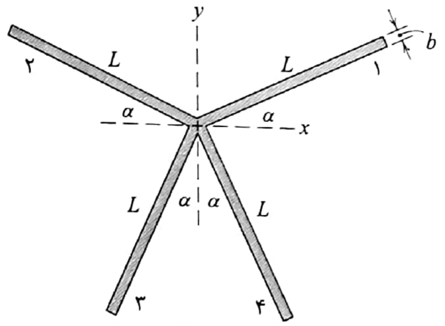
شکل م الف.۶۴

الف.۶۵ حاصلضرب لختی سطح مستطیل را حول محورهای x-y تعیین کنید. حالتی را در نظر بگیرید که b نسبت به L بسیار کوچک است.



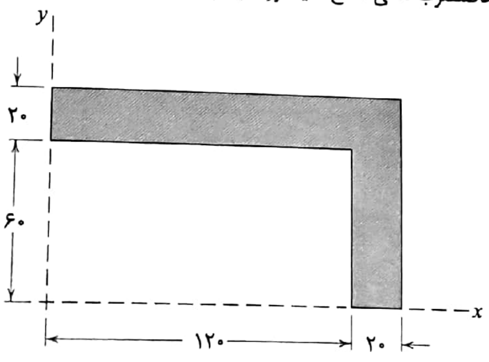
شکل م الف.۶۵

الف.۶۶ حاصلضرب لختی نوار مستطیل ۱ را حول محورهای x-y تعیین کنید. فرض کنید که عرض b نسبت به طول L کوچک است. از نتیجهٔ به‌دست آمده، حاصلضرب لختی هریک از نوارهای ۲، ۳ و ۴ را معین کنید. تحقیق کنید که جمع نتایج چهار نوار صفر است.



شکل م الف.۶۶

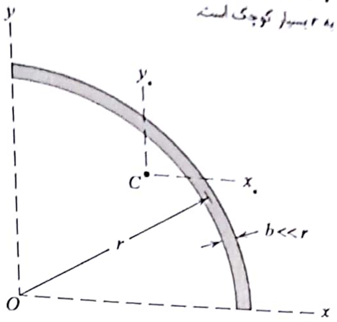
الف.۶۷ حاصلضرب لختی سطح سایه‌خورده را حول محورهای x-y تعیین کنید.



شکل م الف.۶۷

Scanned by CamScanner

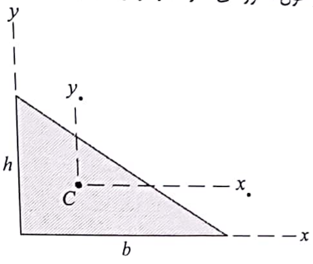
الف.۶۸ حاصلضرب لختی سطح حلقهٔ ربع‌دایره‌ای را حول محورهای x-y و حول محورهای x_c-y_c که از مرکز هندسی C می‌گذرد تعیین کنید. حالتی را در نظر بگیرید که در آن b نسبت به r بسیار کوچک است.



شکل م الف.۶۸

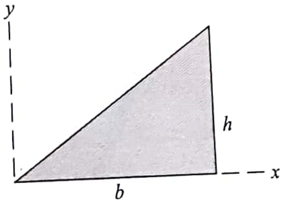
مسائل برگزیده

الف.۶۹ عبارتی برای حاصلضرب لختی سطح مستطیل قائم‌الزاویه را حول محورهای x-y و حول محورهای گذرنده از مرکز سطح x_c و y_c تعیین کنید.



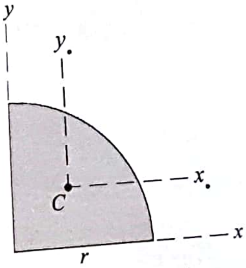
شکل م الف.۶۹

الف.۷۰ عبارتی برای حاصلضرب لختی سطح مثلث قائم‌الزاویه حول محورهای x-y به‌دست آورید. مسئله را ابتدا با انتگرال‌گیری دوگانه و بعد با انتگرال‌گیری منفرد با نوار قائم برای سطح جزئی حل کنید.



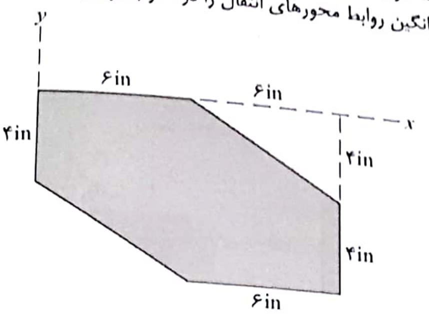
شکل م الف.۷۰

الف.۷۱ حاصلضرب لختی سطح ربع‌دایره را نسبت به محورهای x-y به‌دست آورید و با به‌کاربردن این نتایج حاصلضرب لختی را نسبت به محورهای گذرنده از مرکز هندسی موازی به‌دست آورید.



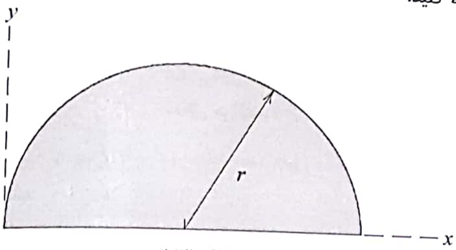
شکل م الف.۷۱

الف.۷۲ حاصلضرب لختی سطح سایه‌خورده را حول محورهای x-y محاسبه کنید. (راهنمایی: میانگین روابط محورهای انتقال را در نظر بگیرید.)



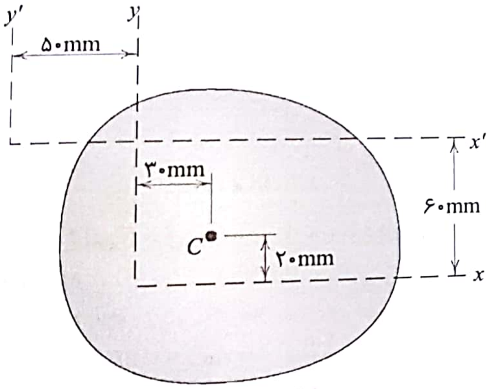
شکل م الف.۷۲

الف.۷۳ حاصلضرب لختی را، برای سطح نیم‌دایره‌ای حول محورهای x-y به دو طریق محاسبه کنید.



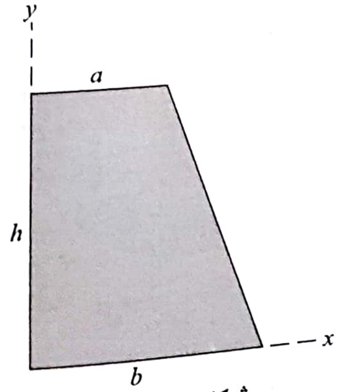
شکل م الف.۷۳

الف.۷۴ حاصلضرب لختی سطح سایه‌خورده نسبت به محورهای x-y و محورهای x'-y'، به‌ترتیب $8(10^6)\,mm^4$ و $-42(10^6)\,mm^4$ می‌باشند. مساحت شکلی را که مرکز هندسی آن C باشد، محاسبه کنید.



شکل م الف.۷۴

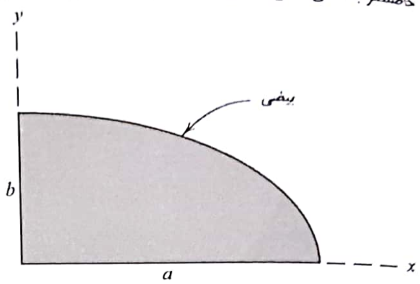
الف.۷۵ حاصلضرب لختی سطح ذوزنقه را حول محورهای x-y تعیین کنید.



شکل م الف.۷۵

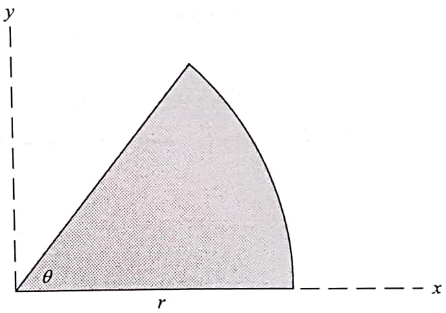
Scanned by CamScanner

الف.۷۶ حاصلضرب لختی سطح بیضی‌شکل را حول محورهای x-y تعیین کنید.



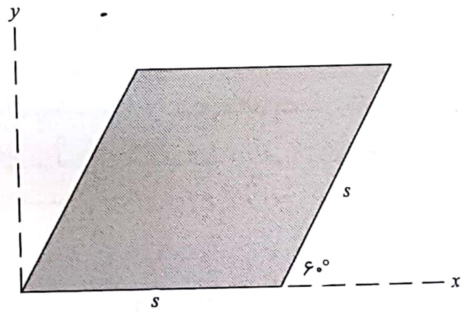
شکل م الف.۷۶

الف.۷۷ حاصلضرب لختی سطح قطاع دایره‌ای را نسبت به محورهای x-y به‌دست آورید. توصیف کلی خود را برای تعیین سطوح (الف) ربع‌دایره و (ب) نیم‌دایره ارزیابی کنید.



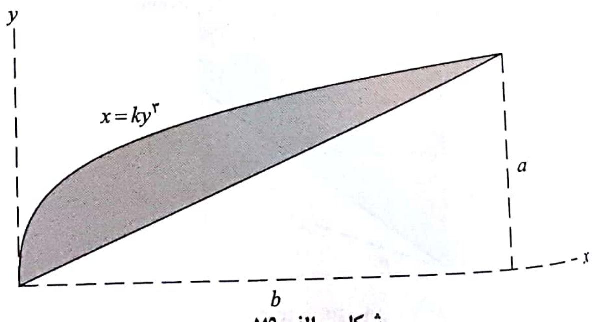
شکل م الف.۷۷

الف.۷۸ حاصلضرب لختی سطح متوازی‌الاضلاع را حول محورهای x-y تعیین کنید (راهنمایی: سطح را به‌منزلهٔ یک مستطیل و یک مثلث در نظر بگیرید و از نتیجهٔ مسئلهٔ الف.۷۰ استفاده کنید.)



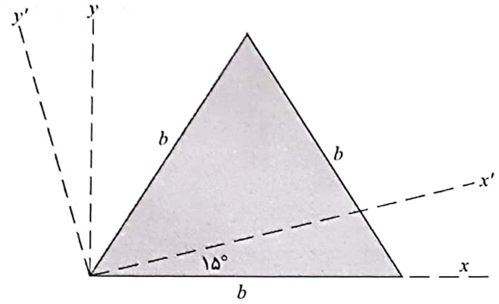
شکل م الف.۷۸

الف.۷۹ حاصلضرب لختی سطح سایه‌خورده را حول محورهای x-y تعیین کنید.



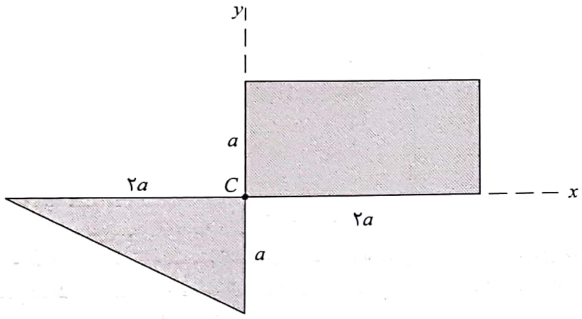
شکل م الف.۷۹

الف.۸۰ گشتاورها و حاصلضرب لختی سطح مثلث متوازی‌الاضلاع را نسبت به محورهای x'-y' تعیین کنید.



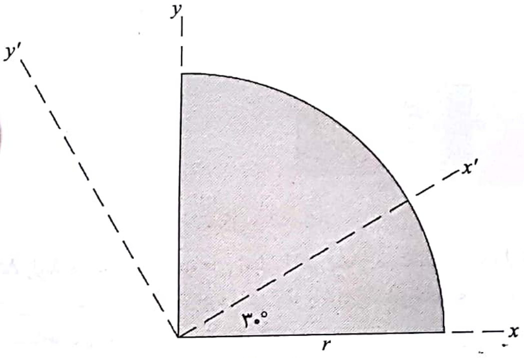
شکل م الف.۸۰

الف.۸۱ گشتاورهای ماکزیمم و مینیمم لختی را نسبت به محورهای گذرنده از C برای سطوح مرکب نشان‌داده‌شده تعیین کنید. اندازهٔ زاویهٔ α پادساعتگرد را از محور x تا محور گشتاور لختی ماکزیمم به‌دست آورید. از نتایج مسئلهٔ الف.۶۹ استفاده کنید.



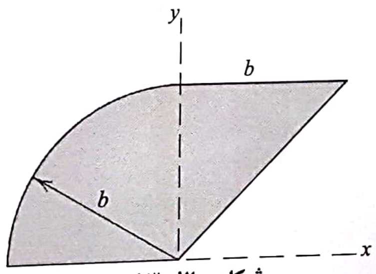
شکل م الف.۸۱

الف.۸۲ گشتاور لختی و حاصلضرب لختی سطح ربع‌دایره را نسبت به محورهای x'-y' تعیین کنید.



شکل م الف.۸۲

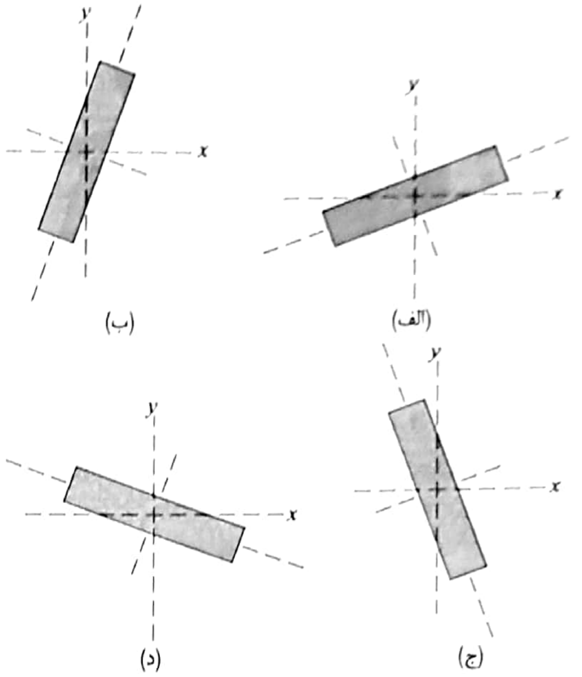
الف.۸۳ I_x و I_y را برای سطح سایه‌خورده تعیین کرده و نشان دهید که محورهای x-y محورهای اصلی لختی می‌باشند.



شکل م الف.۸۳

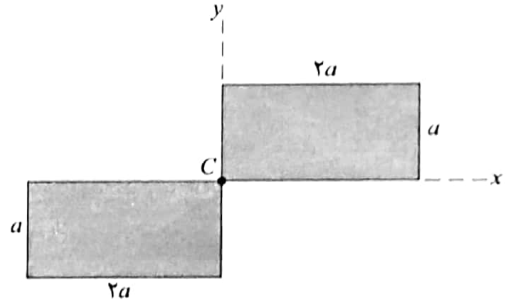
Scanned by CamScanner

الف.۸۴ دایرهٔ لختی مور را برای هریک از چهار سطح مستطیلی با نسبت‌ها و وضعیت‌های نشان‌داده‌شده رسم کنید. روی هر نمودار نقطهٔ A را که دارای مختصات (I_x ، I_{xy}) و زاویهٔ 2α است، مشخص کنید، که در آن α زاویهٔ بین محور x و محور گشتاور لختی ماکزیمم است.



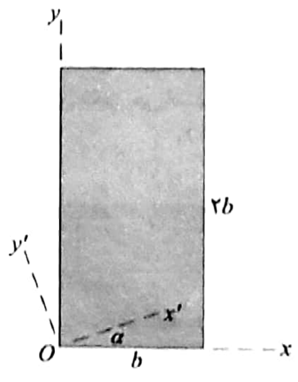
شکل م الف.۸۴

الف.۸۵ ماکزیمم و مینیمم گشتاور لختی دو سطح ترکیبی مستطیل‌شکل نشان‌داده‌شده را نسبت به محور گذرنده از مرکز هندسی C تعیین کنید. اندازهٔ زاویهٔ α را بین محور x و محور گشتاور لختی ماکزیمم پیدا کنید.



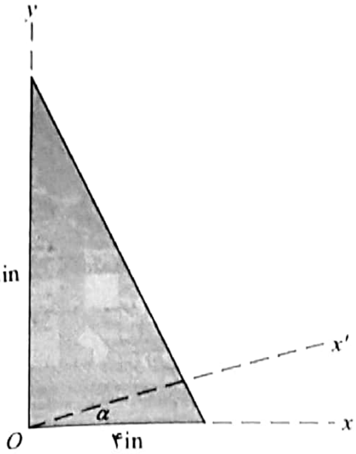
شکل م الف.۸۵

الف.۸۶ زاویهٔ α که محل محورهای اصلی لختی سطح مستطیلی گذرنده از نقطهٔ O را مشخص می‌کند، تعیین کنید. دایرهٔ لختی مور را برای گشتاورهای لختی رسم کرده و مقادیر متناظر I_{max} و I_{min} را تعیین کنید.



شکل م الف.۸۶

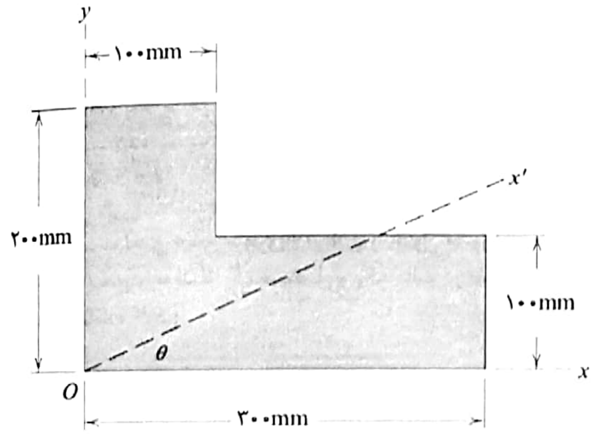
الف.۸۷ گشتاور لختی ماکزیمم را حول محور گذرنده از O و زاویهٔ α در این محور، برای سطح مثلث نشان‌داده‌شده تعیین کنید. (همچنین دایرهٔ لختی مور را رسم کنید.)



شکل م الف.۸۷

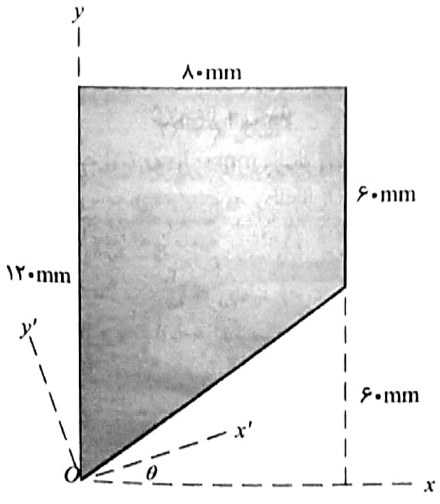
مسائل کامپیوتری

***الف.۸۸** گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محور x' به‌صورت تابعی از θ، از $\theta=0$ تا $\theta=90°$ رسم نموده و مقدار مینیمم $I_{x'}$ و مقدار متناظر θ را تعیین کنید.



شکل م الف.۸۸

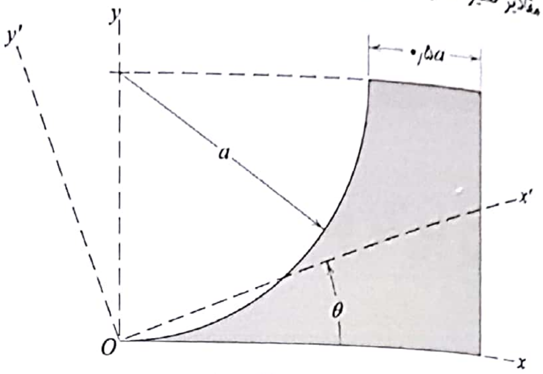
***الف.۸۹** گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محور x' در $0 \leq \theta \leq 90°$ رسم کنید. مقدار مینیمم $I_{x'}$ و مقدار متناظر θ را تعیین کنید.



شکل م الف.۸۹

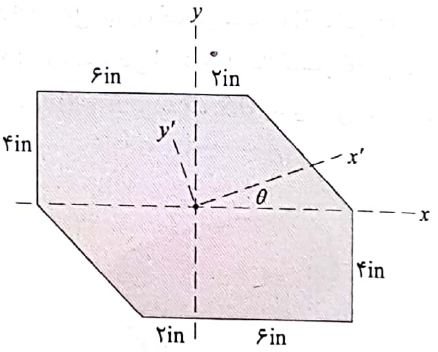
Scanned by CamScanner

الف.۹۰ گشتاورها و حاصلضرب لختی سطح سایه‌خورده را حول محورهای x' و y' به‌صورت تابعی از θ، از $\theta=0$ تا $\theta=\pi$ تعیین کنید. مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر نوع و مقادیر نظیر θ را مشخص کنید.



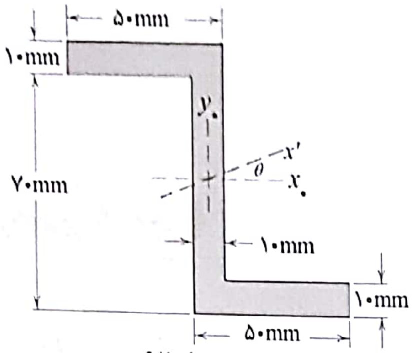
شکل م الف.۹۰

الف.۹۱ شکل نشان‌داده‌شده مقطع عرضی ستون سازه‌ای بتنی است. حاصلضرب لختی $I_{x'y'}$ سطح مقطع را حول محورهای x'-y' برحسب تابعی از θ، از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$، رسم و معین کنید. زاویهٔ مینیمم θ را برای اینکه $I_{x'y'}=0$ باشد، تعیین کنید. این اطلاعات در طراحی ستون و تعیین صفحه‌ای که در آن ستون کمترین مقاومت را در برابر خمش دارد، بسیار مهم است. از نتایج مسئلهٔ الف.۶۹ در حل این مسئله استفاده کنید.



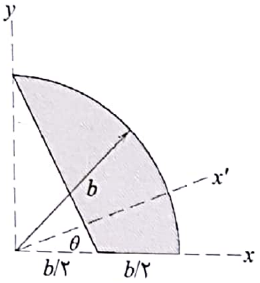
شکل م الف.۹۱

الف.۹۲ گشتاور لختی مقطع Z شکل را حول محور x' به‌صورت تابعی از θ، از $\theta=0$ تا $\theta=90°$ رسم کنید. بر روی نمودار ماکزیمم $I_{x'}$ و مقدار نظیر θ را تعیین کرده، سپس با استفاده از معادلات (الف.۱۰) و (الف.۱۱) صحت این نتایج را تحقیق کنید.



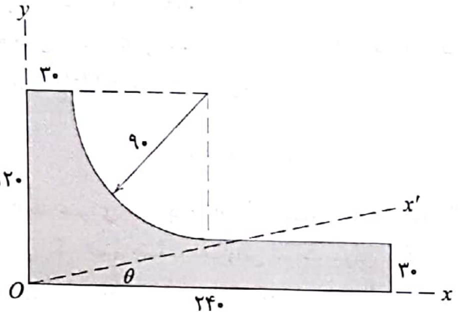
شکل م الف.۹۲

*الف.۹۳ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محور x' به‌صورت تابعی از θ، از $\theta=0$ تا $\theta=180°$ رسم کنید. ماکزیمم و مینیمم مقادیر $I_{x'}$ و مقادیر نظیر θ را تعیین کنید.



شکل م الف.۹۳

*الف.۹۴ گشتاور لختی سطح سایه‌خورده را حول محور x' که از نقطهٔ O عبور می‌کند برحسب θ تعیین کنید و آن را در بازهٔ $\theta=0$ تا $\theta=180°$ رسم نمایید. مقادیر ماکزیمم و مینیمم نظیر زاویهٔ θ را به‌دست آورید.



ابعاد برحسب میلیمتر

شکل م الف.۹۴

Scanned by CamScanner

پیوست ب

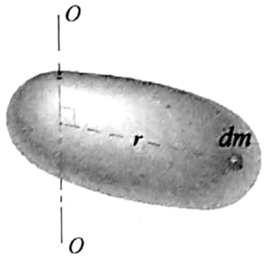
گشتاورهای لختی جرم

برای آشنایی و درک کامل مفهوم و محاسبات گشتاور لختی جرم پیوست ب از کتاب *دینامیک* را ببینید. از آنجا که این کمیت در بررسی دینامیک اجسام صلب حائز اهمیت است و در استاتیک نقش چندانی ندارد، تنها تعریف مختصری از آن را در *استاتیک* می‌آوریم تا دانشجو بتواند تفاوت اساسی بین گشتاورهای لختی سطح و جرم را به‌خوبی از هم تشخیص دهد.

جسم سه‌بعدی به‌جرم m را مطابق شکل ب.۱ در نظر بگیرید. گشتاور لختی جرم I حول O-O چنین تعریف می‌شود

$$I = \int r^{2} dm$$

که در آن r فاصلهٔ عمودی جزء جرم dm از محور O-O و انتگرال بر روی تمام جسم، برای یک جسم صلب مفروض است. برای یک جسم صلب مشخص، گشتاور لختی جرم، معیاری برای توزیع جرم آن نسبت به محور مورد نظر است و برای آن محور خاصیت ثابت جسم است. توجه کنید که ابعاد گشتاور لختی عبارت‌اند از [(جرم)(طول)^{2}]، که در دستگاه SI برابر $\text{kg}\cdot\text{m}^{2}$ و در سیستم امریکایی $\text{lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{sec}^{2}$ است. این ابعاد را با ابعاد گشتاور لختی سطحی که برابر (طول)^{4}، m^{4} در یکای SI و ft^{4} در دستگاه U.S. یکای معمول امریکاست، مقایسه کنید



شکل ب.۱

Scanned by CamScanner

پیوست ج
عناوین برگزیدهٔ ریاضی

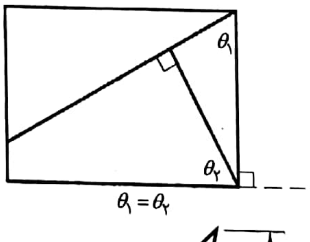
ج.۱ مقدمه

پیوست ج شامل مجموعه‌ای از خلاصه و یادآوری مباحث برگزیدهٔ ریاضیات پایه است که در مکانیک کاربرد فراوانی دارد. روابط مربوطه، بدون اثبات آورده شده‌اند. دانشجویان رشتهٔ مکانیک اغلب، با این روابط سروکار پیدا می‌کنند و اگر این روابط در دسترس آنها نباشد، سردرگم خواهند شد. دیگر عناوین فهرست‌بندی نشده‌اند و هنگام نیاز به‌دفعات بیان خواهند شد.

هنگام مرور و کاربرد ریاضیات، دانشجو باید توجه داشته باشد که مکانیک یک علم کاربردی است که اجسام واقعی و حرکات عملی را توصیف می‌کند. از این‌رو ضمن مطالعهٔ نظریه‌ها و فرمول‌بندی و حل مسائل، باید تفسیر هندسی و فیزیکی ریاضیات استفاده‌شده را به‌خوبی درنظر داشته باشد.

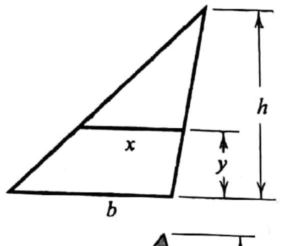
ج.۲ هندسهٔ مسطحه

۱. وقتی اضلاع دو زاویه، دوبه‌دو برهم عمود باشند، آن دو زاویه برابرند.



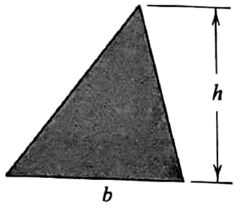
۲. در مثلث‌های متشابه

$$\frac{x}{b}=\frac{h-y}{h}$$



۳. در هر مثلث

$$\text{مساحت}=\frac{1}{2}bh$$



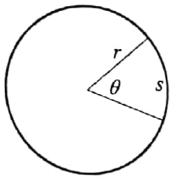
۴. در دایره

$$\text{محیط}=2\pi r$$

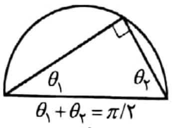
$$\text{مساحت}=\pi r^2$$

$$s\ \text{طول کمان}=r\theta$$

$$\text{مساحت قطاع}=\frac{1}{2}r^2\theta$$



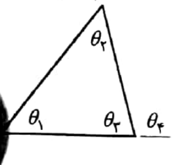
۵. هر مثلث محاط در نیم‌دایره، قائم‌الزاویه است.



۶. در بین زوایای یک مثلث، روابط زیر برقرار است

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=180^\circ$$

$$\theta_4=\theta_1+\theta_2$$

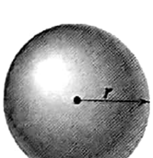


ج.۳ هندسهٔ فضایی

۱. کره

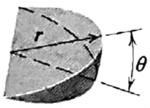
$$\text{حجم}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{مساحت سطح}=4\pi r^2$$



۲. گوهٔ کروی

$$\text{حجم}=\frac{2}{3}r^3\theta$$

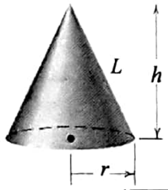


۳. مخروط قائم دوّار

$$\text{حجم}=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

$$\text{سطح جانبی}=\pi rL$$

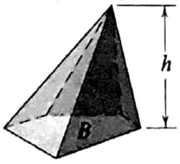
$$L=\sqrt{r^2+h^2}$$



۴. هر نوع هرم یا مخروط

$$\text{حجم}=\frac{1}{3}Bh$$

که در آن $B=$ مساحت قاعده



Scanned by CamScanner

ج.۴ روابط جبری

۱. معادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^{۲}+bx+c=۰$$

برای ریشه‌های حقیقی $b^{۲}\geq ۴ac$ ، $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$

۲. لگاریتم‌ها

$$b^{x}=y\ ,\ x=\log_{b}y$$

لگاریتم‌های طبیعی

$$b=e=۲/۷۱۸۲۸۲$$

$$e^{x}=y\ ,\ x=\log_{e}y=\ln y$$

$$\log(ab)=\log a+\log b$$

$$\log(a/b)=\log a-\log b$$

$$\log(۱/n)=-\log n$$

$$\log a^{n}=n\log a$$

$$\log ۱=۰$$

$$\log_{۱۰}x=۰/۴۳۴۳\ln x$$

۳. دترمینان‌ها

مرتبهٔ دوم

$$\begin{vmatrix}a_{۱} & b_{۱}\\ a_{۲} & b_{۲}\end{vmatrix}=a_{۱}b_{۲}-a_{۲}b_{۱}$$

مرتبهٔ سوم

$$\begin{vmatrix}a_{۱} & b_{۱} & c_{۱}\\ a_{۲} & b_{۲} & c_{۲}\\ a_{۳} & b_{۳} & c_{۳}\end{vmatrix}=+a_{۱}b_{۲}c_{۳}+a_{۲}b_{۳}c_{۱}+a_{۳}b_{۱}c_{۲}-a_{۳}b_{۲}c_{۱}-a_{۲}b_{۱}c_{۳}-a_{۱}b_{۳}c_{۲}$$

۴. معادلهٔ درجهٔ سوم

$$x^{۳}=Ax+B$$

فرض کنید: $p=A/۳\ ,\ q=B/۲$

حالت (۱): سه ریشهٔ حقیقی و متمایز، $q^{۲}-p^{۳}<۰$

$$\cos u=q/(p\sqrt{p}),\ ۰<u<۱۸۰^{\circ}$$

$$x_{۱}=۲\sqrt{p}\cos(u/۳)$$

$$x_{۲}=۲\sqrt{p}\cos(u/۳+۱۲۰^{\circ})$$

$$x_{۳}=۲\sqrt{p}\cos(u/۳+۲۴۰^{\circ})$$

حالت (۲): یک ریشهٔ حقیقی و دو ریشهٔ موهومی، $q^{۲}-p^{۳}>۰$

$$x_{۱}=(q+\sqrt{q^{۲}-p^{۳}})^{\frac{۱}{۳}}+(q-\sqrt{q^{۲}-p^{۳}})^{\frac{۱}{۳}}$$

حالت (۳): سه ریشهٔ حقیقی، دو ریشهٔ برابر، $q^{۲}-p^{۳}=۰$

$$x_{۱}=۲q^{\frac{۱}{۳}}\ ,\ x_{۲}=x_{۳}=-q^{\frac{۱}{۳}}$$

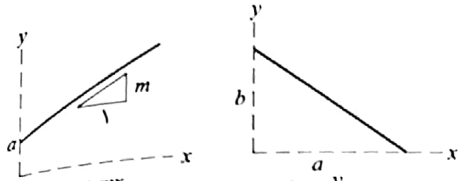
برای معادلهٔ درجهٔ سوم به‌صورت کلی زیر

$$x^{۳}+ax^{۲}+bx+c=۰$$

x را برابر $x_{۰}-\frac{a}{۳}$ قرار می‌دهیم و $x_{۰}^{۳}=Ax_{۰}+B$ را به‌دست می‌آوریم سپس همانند آنچه در بالا بیان شد عمل می‌کنیم تا $x_{۰}$ به‌دست آید و درنتیجه $x=x_{۰}-\frac{a}{۳}$.

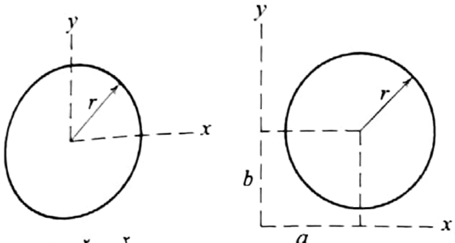
ج.۵ هندسهٔ تحلیلی

۱. خط راست



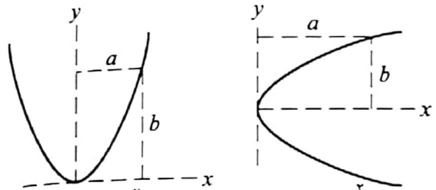
$y=a+mx$ ، $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=۱$

۲. دایره



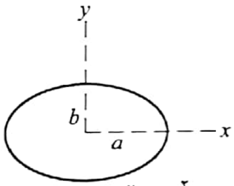
$x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}$ ، $(x-a)^{۲}+(y-b)^{۲}=r^{۲}$

۳. سهمی



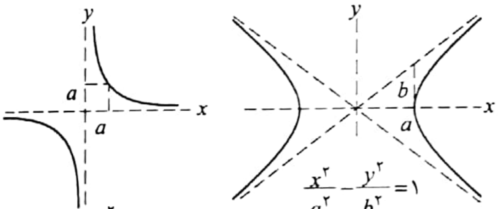
$y=b\dfrac{x^{۲}}{a^{۲}}$ ، $x=a\dfrac{y^{۲}}{b^{۲}}$

۴. بیضی



$\dfrac{x^{۲}}{a^{۲}}+\dfrac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$

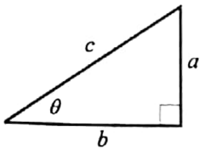
۵. هذلولی



$xy=a^{۲}$ ، $\dfrac{x^{۲}}{a^{۲}}-\dfrac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$

ج.۶ مثلثات

۱. تعاریف

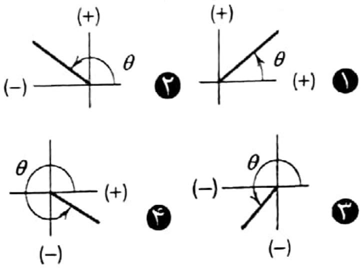


$\sin\theta=a/c$ ، $\csc\theta=c/a$

$\cos\theta=b/c$ ، $\sec\theta=c/b$

$\tan\theta=a/b$ ، $\cot\theta=b/a$

۲. علامت‌ها در چهار ربع



	۱	۲	۳	۴
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\csc\theta$	+	+	−	−
$\sec\theta$	+	−	−	+
$\cot\theta$	+	−	+	−

Scanned by CamScanner

۳. روابط متفرقه

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}$

$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

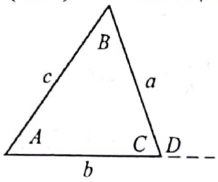
$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$

$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$

۴. قانون سینوس‌ها

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$$



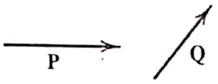
۵. قانون کسینوس‌ها

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

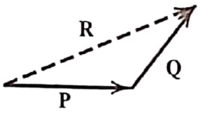
$c^2=a^2+b^2+2ab\cos D$

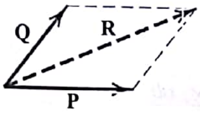
ج.۷ عملیات برداری

۱. علامت‌گذاری. کمیت‌های برداری را با حروف سیاه و کمیت‌های عددی را با حروف کج نشان می‌دهیم. از این‌رو، کمیت برداری **V** دارای مقدار عددی V است. در متون دست‌نویس، کمیت‌های برداری باید همیشه با نمادی چون $\underline{V}$ یا $\vec{V}$ مشخص شوند تا از کمیت‌های عددی متمایز شوند.



۲. جمع





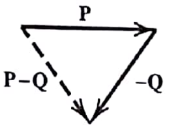
جمع مثلثی **P+Q=R**

جمع متوازی‌الاضلاع **P+Q=R**

قانون جابه‌جایی یا تعویض‌پذیری **P+Q=Q+P**

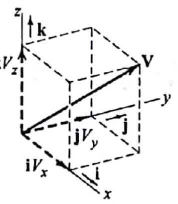
قانون شرکت‌پذیری **P+(Q+R)=(P+Q)+R**

۳. تفاضل



P−Q=P+(−Q)

۴. بردارهای یکه i, j, k



$$\mathbf{V}=V_x\mathbf{i}+V_y\mathbf{j}+V_z\mathbf{k}$$

که در آن $|\mathbf{V}|=V=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}$

۵. کسینوس‌های هادی. l، m و n کسینوس‌های زاویهٔ بین **V** و محورهای x، y و z هستند. از این‌رو

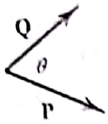
$n=V_z/V$ $\quad m=V_y/V$ $\quad l=V_x/V$ بنا

براین $\mathbf{V}=V(l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k})$

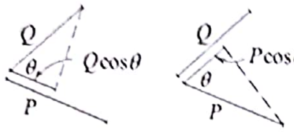
و $l^2+m^2+n^2=1$

۶. ضرب نقطه‌ای یا عددی

$$\mathbf{P\cdot Q}=PQ\cos\theta$$



این ضرب را می‌توان به‌صورت حاصلضرب بزرگی **P** در مؤلفهٔ $Q\cos\theta$ یا به‌صورت حاصلضرب **Q** در مؤلفهٔ $P\cos\theta$ از **P** در جهت **Q** درنظر گرفت.



قانون تعویض‌پذیری $\mathbf{P\cdot Q}=\mathbf{Q\cdot P}$

طبق تعریف ضرب نقطه‌ای

$$\mathbf{i\cdot i}=\mathbf{j\cdot j}=\mathbf{k\cdot k}=1$$
$$\mathbf{i\cdot j}=\mathbf{j\cdot i}=\mathbf{i\cdot k}=\mathbf{k\cdot i}=\mathbf{j\cdot k}=\mathbf{k\cdot j}=0$$
$$\mathbf{P\cdot Q}=(P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k})\cdot(Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k})$$
$$=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z$$
$$\mathbf{P\cdot P}=P_x^2+P_y^2+P_z^2$$

از تعریف ضرب نقطه‌ای نتیجه می‌شود که اگر ضرب نقطه‌ای دو بردار **P** و **Q** صفر شود، یعنی $\mathbf{P\cdot Q}=0$، آنگاه این دو بردار برهم عمودند.

زاویهٔ θ بین دو بردار $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$ را می‌توان از حاصلضرب داخلی آنها، طبق رابطهٔ $\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2=P_1P_2\cos\theta$ به‌دست آورد، که نتیجه می‌دهد

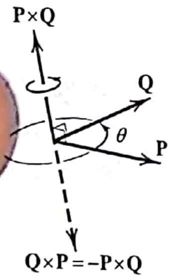
$$\cos\theta=\frac{\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2}{P_1P_2}=\frac{P_{1_x}P_{2_x}+P_{1_y}P_{2_y}+P_{1_z}P_{2_z}}{P_1P_2}=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$$

که در آن l، m، و n کسینوس‌های هادی مربوط به بردارها هستند. همچنین ملاحظه می‌شود که دو بردار، هنگامی برهم عمودند که $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

قانون توزیع‌پذیری $\mathbf{P\cdot(Q+R)}=\mathbf{P\cdot Q}+\mathbf{P\cdot R}$

۷. ضرب برداری یا خارجی. ضرب برداری **P×Q** دو بردار **P** و **Q** برداری است به مقدار

$$|\mathbf{P\times Q}|=PQ\sin\theta$$



و جهت این بردار، مطابق شکل، از قانون دست راست، تعیین می‌شود. با تعویض جای بردارها و استفاده از قانون دست راست، داریم $\mathbf{Q\times P}=-\mathbf{P\times Q}$.

قانون توزیع‌پذیری $\mathbf{P\times(Q+R)}=\mathbf{P\times Q}+\mathbf{P\times R}$

طبق تعریف ضرب برداری، با استفاده از *سیستم مختصات راستگرد*، داریم

$$\mathbf{i\times j}=\mathbf{k}\qquad \mathbf{j\times k}=\mathbf{i}\qquad \mathbf{k\times i}=\mathbf{j}$$
$$\mathbf{j\times i}=-\mathbf{k}\qquad \mathbf{k\times j}=-\mathbf{i}\qquad \mathbf{i\times k}=-\mathbf{j}$$
$$\mathbf{i\times i}=\mathbf{j\times j}=\mathbf{k\times k}=0$$

به‌کمک این اتحادها و قانون توزیع‌پذیری، ضرب برداری را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{P\times Q}=(P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k})\times(Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k})$$
$$=(P_yQ_z-P_zQ_y)\mathbf{i}+(P_zQ_x-P_xQ_z)\mathbf{j}+(P_xQ_y-P_yQ_x)\mathbf{k}$$

حاصلضرب برداری را نیز می‌توان با دترمینان بیان کرد

$$\mathbf{P\times Q}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix}$$

Scanned by CamScanner

۸. چند رابطهٔ دیگر
ضرب عددی سه‌گانه $(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})$. با حفظ ترتیب بردارها می‌توان ضرب نقطه‌ای و ضرب برداری را با هم تعویض کرد. وجود پرانتزها در دو طرف ضرب برداری، غیرضروری است، چون که $\mathbf{P}\times(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R})$ بی‌معنی است زیرا بردار $\mathbf{P}$ را نمی‌توان در مقدار عددی $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}$ ضرب کرد. بنابراین رابطه را می‌توان چنین نوشت

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}\times\mathbf{R}$$

بیان سه‌گانهٔ حاصلضرب عددی برحسب دترمینان به‌صورت زیر است

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}=\begin{vmatrix}P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\\ R_x & R_y & R_z\end{vmatrix}$$

حاصلضرب سه‌گانهٔ برداری $(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\times\mathbf{R}=-\mathbf{R}\times(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=\mathbf{R}\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{P})$. در اینجا یادآور می‌شود که پرانتز را باید به‌کار برد زیرا $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{R}$ به‌دلیل نامشخص‌بودن برداری که قرار است ضرب برداری شود، مبهم است. همچنین می‌توان نشان داد که حاصلضرب برداری سه‌گانه معادل است با

$$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\times\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}\mathbf{Q}-\mathbf{R}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{P}$$

یا

$$\mathbf{P}\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{R})=\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}\mathbf{Q}-\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{R}$$

برای مثال جملهٔ اول در عبارت اول حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}$، کمیتی است عددی که در بردار $\mathbf{Q}$ ضرب می‌شود.

۹. *مشتق بردارها.* از همان قوانین مشتق عددی پیروی می‌کند.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\dot{\mathbf{P}}=\dot{P}_x\,\mathbf{i}+\dot{P}_y\,\mathbf{j}+\dot{P}_z\,\mathbf{k}$$
$$\frac{d(\mathbf{P}u)}{dt}=\mathbf{P}\dot{u}+\dot{\mathbf{P}}u$$
$$\frac{d(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})}{dt}=\mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{Q}}+\dot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{Q}$$
$$\frac{d(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})}{dt}=\mathbf{P}\times\dot{\mathbf{Q}}+\dot{\mathbf{P}}\times\mathbf{Q}$$

۱۰. *انتگرال‌گیری از بردارها.* اگر $\mathbf{V}$ تابعی از x، y و z باشد و جزء حجم را با $d\tau=dxdydz$ نشان دهیم، انتگرال $\mathbf{V}$ روی حجم را به‌صورت مجموع برداری سه انتگرال مؤلفه‌هایش می‌توان نوشت. بنابراین

$$\int \mathbf{V}d\tau=\mathbf{i}\int V_x\,d\tau+\mathbf{j}\int V_y\,d\tau+\mathbf{k}\int V_z\,d\tau$$

ج.۸ سری‌ها

(عبارت‌های داخل کروشه‌های مقابل هر سری، دامنهٔ همگرایی را نشان می‌دهند.)

$$(1\pm x)^n=1\pm nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\dots\qquad [x^2<1]$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots\qquad [x^2<\infty]$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\qquad [x^2<\infty]$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots\qquad [x^2<\infty]$$

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots\qquad [x^2<\infty]$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

که در آن

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,,\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

[بسط فوریه برای $-l<x<l$]

ج.۹ مشتق‌ها

$$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1},\qquad \frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx},\qquad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\lim_{\Delta x\to}\sin\Delta x=\sin dx=\tan dx=dx$$

$$\lim_{\Delta x\to}\cos\Delta x=\cos dx=1$$

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x\,,\qquad \frac{d\cos x}{dx}=-\sin x\,,\qquad \frac{d\tan x}{dx}=\sec^2 x$$

$$\frac{d\sinh x}{dx}=\cosh x\,,\qquad \frac{d\cosh x}{dx}=\sinh x\,,\qquad \frac{d\tanh x}{dx}=\mathrm{sech}^2 x$$

ج.۱۰ انتگرال‌ها

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x$$

$$\int\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{15b^2}(3bx-2a)\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{105b^3}(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2\sqrt{a+bx}}{b}$$

$$\int\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b-x}}dx=-\sqrt{a+x}\sqrt{b-x}+(a+b)\sin^{-1}\sqrt{\frac{a+x}{a+b}}$$

$$\int\frac{x\,dx}{a+bx}=\frac{1}{b^2}[a+bx-a\ln(a+bx)]$$

$$\int\frac{x\,dx}{(a+bx)^n}=\frac{(a+bx)^{1-n}}{b^2}\left(\frac{a+bx}{2-n}-\frac{a}{1-n}\right)$$

$$\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a}\quad\text{یا}\quad\frac{1}{\sqrt{-ab}}\tanh^{-1}\frac{x\sqrt{-ab}}{a}$$

$$\int\frac{x\,dx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\ln(a+bx^2)$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})]$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+\frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{5}(x^2+\frac{2}{3}a^2)\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\sqrt{a+bx+cx^2}+x\sqrt{c}+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)$$

یا

$$\frac{-1}{\sqrt{-c}}\sin^{-1}\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

Scanned by CamScanner

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{\sin^2 x}{2}$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x$$

$$\int \tanh x\,dx = \ln\cosh x$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int x e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$

$$\int e^{ax}\sin px\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin px - p\cos px)}{a^2 + p^2}$$

$$\int e^{ax}\cos px\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos px + p\sin px)}{a^2 + p^2}$$

$$\int e^{ax}\sin^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{4 + a^2}\left(a\sin^2 x - \sin 2x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{4 + a^2}\left(a\cos^2 x + \sin 2x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax}\sin x\cos x\,dx = \frac{e^{ax}}{4 + a^2}\left(\frac{a}{2}\sin 2x - \cos 2x\right)$$

$$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{\cos x}{3}(2 + \sin^2 x)$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\sin x}{3}(2 + \cos^2 x)$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$$

$$\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x$$

$$\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x$$

$$\int x^2\sin x\,dx = 2x\sin x - (x^2 - 2)\cos x$$

$$\int x^2\cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2 - 2)\sin x$$

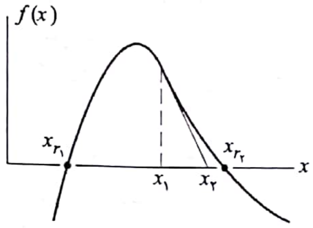
شعاع انحنا

$$\rho_{xy} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

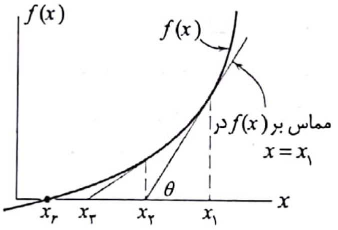
$$\rho_{r\theta} = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

ج.۱۱ روش نیوتن برای حل معادلات دشوار

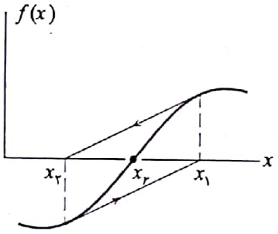
کاربرد اصول بنیادی مکانیک، اغلب به معادله‌های جبری یا غیر جبری منتهی می‌شود که حل آنها به‌طریق مرسوم و معمول امکان‌پذیر نیست. بنابراین در این موارد از روش‌های مختلف برای حل چنین معادلاتی از روش‌های مبتنی بر تکرار از جمله روش نیوتن استفاده می‌کنیم که ابزار نیرومندی برای به‌دست آوردن ریشه‌های (جواب‌های) معادلات می‌باشند.



(ب)



(الف)



(ج)

برای مثال فرض کنید که معادله‌ای به‌شکل $f(x)=0$ را می‌خواهیم با روش نیوتن حل کرده و ریشه‌های آن را به‌دست آوریم. در قسمت (الف) شکل، تابع دلخواهی مانند $f(x)$ برحسب x در همسایگی ریشهٔ مطلوب x_r نشان داده شده است. توجه کنید که x_r صرفاً مقدار x محل تلاقی تابع $f(x)$ با محور x است. فرض کنید که مقدار تخمینی x_1 این ریشه را بدانیم (مثلاً از طریق ترسیم یک منحنی با دست). به‌شرط اینکه x_1 طول متناظر نقطه‌ای نزدیک ماکزیمم یا مینیمم تابع $f(x)$ نباشد، می‌توان با رسم مماس بر $f(x)$ در x_1 به‌گونه‌ای که این مماس محور x را در x_2 قطع کند، تخمین بهتری در x_2 به‌دست آورد. از هندسهٔ شکل می‌توان نوشت

$$\tan\theta = f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

که در رابطهٔ بالا، $f'(x_1)$ مشتق $f(x)$ نسبت به x در $x = x_1$ است. با حل معادلهٔ بالا برحسب x_2 داریم

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

جملهٔ $-f(x_1)/f'(x_1)$ عبارتی است که تخمین اولیهٔ ریشهٔ x_1 را تصحیح می‌کند. پس از محاسبهٔ x_2، این عمل را می‌توان برای به‌دست آوردن x_3 تکرار کرد و الی آخر.

Scanned by CamScanner

بنابراین معادلهٔ بالا را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

که در آن

x_{k+1} = تخمین $(k+1)$اُم ریشهٔ x_r

x_k = تخمین kاُم ریشهٔ مطلوب x_r

$f(x_k)$ = تابع $f(x)$ ارزیابی شده در $x=x_k$

$f'(x_k)$ = مشتق تابع در $x=x_k$

این معادله بارها به‌کار می‌رود تا اینکه $f(x_{k+1})$ به‌اندازهٔ کافی به صفر نزدیک شود که در این حال $x_{k+1}\cong x_k$. دانشجویان می‌توانند تحقیق کنند که این رابطه به‌ازای همهٔ ترکیبات ممکن برای علائم جبری x_k، $f(x_k)$ و $f'(x_k)$ برقرار است.

به نکات هشداردهندهٔ زیر توجه کنید:

۱. واضح است که $f'(x_k)$ نباید صفر و یا نزدیک به صفر باشد. همان‌طورکه پیش از این گفته شد، این نکته به این معنی است که x_k دقیقاً یا تقریباً متناظر با ماکزیمم یا مینیمم $f(x)$ باشد. اگر شیب $f'(x_k)$ صفر باشد، پس مماس بر منحنی محور x را قطع نخواهد کرد. اگر شیب $f'(x_k)$ کوچک باشد، بنابراین تصحیح x_k خیلی بزرگ می‌شود به‌طوری‌که x_{k+1} تخمینی بدتر از x_k می‌شود. از این‌رو مهندسان کارآزموده اغلب مقدار جملهٔ تصحیح‌کننده را محدود می‌کنند، یعنی اگر مقدار مطلق $f(x_k)/f'(x_k)$ بزرگ‌تر از یک مقدار مجاز باشد، از آن مقدار استفاده می‌کنند.

۲. اگر $f(x)=0$ چندین ریشه داشته باشد، باید در همسایگی ریشهٔ دلخواه x_r باشیم تا الگوریتم واقعاً به‌طرف آن ریشه همگرا شود. قسمت (ب) شکل، حالتی را نشان می‌دهد که در آن تخمین اولیه ریشهٔ x_1 موجب همگرا شدن به‌سمت x_{r_2} می‌شود، نه به‌سمت ریشهٔ x_{r_1}.

۳. اگر به‌عنوان مثال، تابع حول ریشه‌ای که نقطهٔ عطف آن تابع است، نامتقارن باشد ممکن است حالت نوسانی از یک سمت ریشه به‌سمت دیگر اتفاق افتد. همان‌طورکه در قسمت (ج) شکل نشان داده شده، استفاده از نیمی از عبارت تصحیح‌کننده، اغلب موجب جلوگیری از بروز این رفتار خواهد شد.

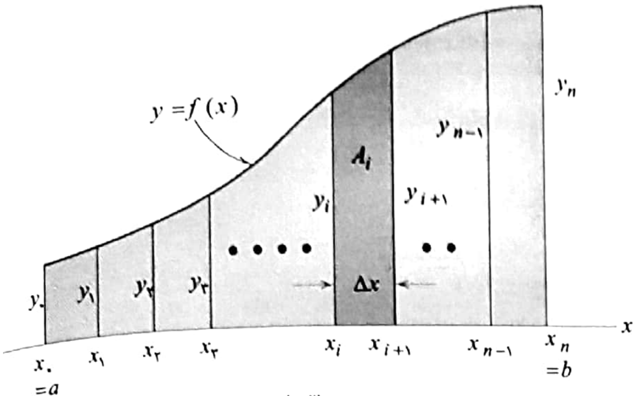
مثال: با یک براورد اولیهٔ $x_1=5$ شروع کنید و تنها ریشهٔ معادلهٔ $e^x-10\cos x-100=0$ را تخمین بزنید.

جدول زیر به‌طور خلاصه کاربرد روش نیوتن را برای معادلهٔ ارائه‌شده در بالا نشان می‌دهد. فرایندهای داخلی وقتی به انتها می‌رسد که قدرمطلق تصحیح $-f(x_k)/f'(x_k)$ از مقدار 10^{-6} کمتر شود.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1}-x_k=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
۱	۵٫۰۰۰۰۰۰	۴۵٫۵۷۶۵۳۷	۱۳۸٫۸۲۳۹۱۶	−۰٫۳۲۸۳۰۵
۲	۴٫۶۷۱۶۹۵	۷٫۲۸۵۶۱۰	۹۶٫۸۸۷۰۶۵	−۰٫۰۷۵۱۹۷
۳	۴٫۵۹۶۴۹۸	۰٫۲۹۲۸۸۶	۸۹٫۲۰۳۶۵۰	−۰٫۰۰۳۲۸۳
۴	۴٫۵۹۳۲۱۵	۰٫۰۰۰۵۲۷	۸۸٫۸۸۲۵۳۶	−۰٫۰۰۰۰۰۶
۵	۴٫۵۹۳۲۰۹	$-2(10^{-8})$	۸۸٫۸۸۱۹۵۶	$2.25(10^{-10})$

ج.۱۲ چند روش انتگرال‌گیری عددی

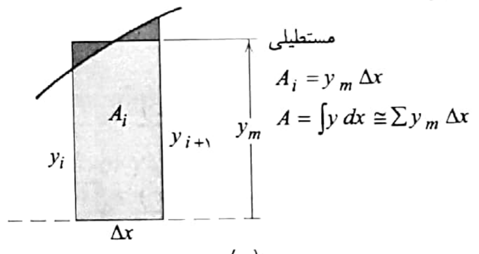
۱. ***تعیین مساحت.*** مسئلهٔ تعیین مساحت سطح سایه‌خوردهٔ زیر منحنی $y=f(x)$ را از $x=a$ تا $x=b$ مطابق قسمت (الف) شکل زیر درنظر بگیرید و فرض کنید انتگرال‌گیری تحلیلی از این تابع ممکن نیست. از اندازه‌گیری‌های تجربی، شکل جدولی تابع یا شکل تحلیلی آن را می‌دانیم. فرض می‌کنیم تابع در بازهٔ $a<x<b$ پیوسته باشد. می‌توان این سطح را به



(الف)

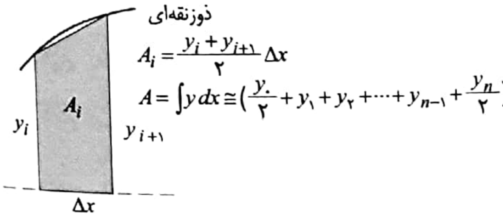
n نوار عمودی، هریک به‌عرض $\Delta x=(b-a)/n$، تقسیم نموده و س
مساحت سطح همهٔ نوارها را جمع کرد تا $A=\int y\,dx$ حاصل شو
شکل نوار انتخاب‌شده، به‌مساحت A_i با سایهٔ تیره‌تر مشخص شده ا
سه روش تقریب مفید عددی ذکر شده است. در هر حالت، هرچه ت
نوارها زیادتر باشد، دقت هندسی تقریب، بیشتر خواهد بود. به‌عنوان ی
قاعدهٔ کلی می‌توانیم با تعداد نسبتاً کمی نوار شروع کرده و تعداد نوارها
جایی افزایش دهیم که تغییرات حاصل در مساحت تقریبی دیگر اثری
دقت نتیجه نداشته باشد.

(الف) *روش مستطیلی.* در این روش، سطح نوارها را به‌صورت مست
درنظرگرفته و مطابق شکل (ب)، ارتفاع y_m نوار انتخاب شده را به‌صورت نظ
به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که مساحت سطوح سایه‌خورده تا حد امکان با یکد
مساوی باشند. از این‌رو مجموع Σy_m ارتفاع‌های مؤثر را تعیین‌کرده و در
ضرب می‌کنیم. برای تابعی که به‌صورت تحلیلی مشخص می‌شود، مقدار y_m
مقدار تابع در وسط عرض یعنی $x_i+\Delta x/2$ است که می‌توان آن را محاسب
در مجموع به‌کار برد.



(ب)

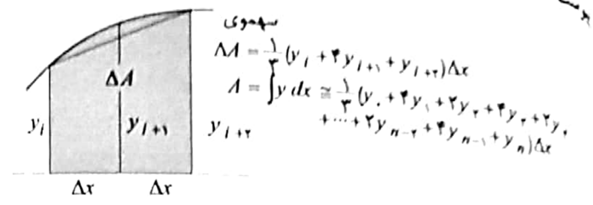
(ب) *روش ذوزنقه‌ای.* نوارها را مطابق نمونهٔ نشان‌داده‌شده در شکل (ج
ذوزنقه‌ای درنظر می‌گیریم. مساحت A_i برابر است با ارتفاع متوسط
$(y_i+y_{i+1})/2$ ضربدر Δx. با جمع کردن مساحت‌ها همان‌طورکه در شکل
دیده می‌شود مساحت تقریبی به‌دست می‌آید. در مورد این مثال با انحنای دا
شده، روشن است که تقریب به‌سمت مقدار کمتر از واقعیت خواهد بود. برای
انحنای معکوس، تقریب به‌سمت مقدار بیشتر از واقعیت خواهد رفت.



(ج)

(ج) *روش سهمی.* با تقریب زدن تابع به‌شکل یک سهمی گذرنده از نقاط
متناظر با سه مقدار متوالی y [شکل (د)]، مساحت بین وتر و منحنی را (که در

Scanned by CamScanner



(د)

روش ذوزنقه‌ای نادیده گرفته شد) می‌توان درنظرگرفت. این مساحت را می‌توان با استفاده از روابط هندسی سهمی محاسبه کرد و به مساحت دو نوار ذوزنقه‌ای برود تا مساحت ΔA این جفت ذوزنقه به‌دست آید. از محاسبهٔ مجموع همهٔ ΔA ها، جدول زیر حاصل می‌شود که به قاعدهٔ سیمپسون[1] معروف است. برای استفاده از قاعدهٔ سیمپسون، تعداد n نوارها باید زوج باشد.

مثال: سطح زیر منحنی $y = x + \sqrt{1+x^2}$ را از $x = 0$ تا $x = 2$ تعیین کنید (در اینجا یک تابع انتگرال‌پذیر انتخاب شده تا بتوان مقدار تقریبی به‌دست آمده را با مقدار دقیق مقایسه کرد. مقدار دقیق برابر است با $A = \int_0^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1) = 3{,}393447$).

تقریب‌های مساحت

تعداد نوارها	مستطیلی	ذوزنقه‌ای	سهموی
۴	۳٫۳۶۱۷۰۴	۳٫۴۵۶۷۳۱	۳٫۳۹۲۲۱۴
۱۰	۳٫۳۸۸۳۹۹	۳٫۴۰۳۵۳۶	۳٫۳۹۳۴۲۰
۵۰	۳٫۳۹۳۲۴۵	۳٫۳۹۳۸۵۰	۳٫۳۹۳۴۴۷
۱۰۰	۳٫۳۹۳۳۹۶	۳٫۳۹۳۵۴۷	۳٫۳۹۳۴۴۷
۱۰۰۰	۳٫۳۹۳۴۴۶	۳٫۳۹۳۴۴۸	۳٫۳۹۳۴۴۷
۲۵۰۰	۳٫۳۹۳۴۴۷	۳٫۳۹۳۴۴۷	۳٫۳۹۳۴۴۷

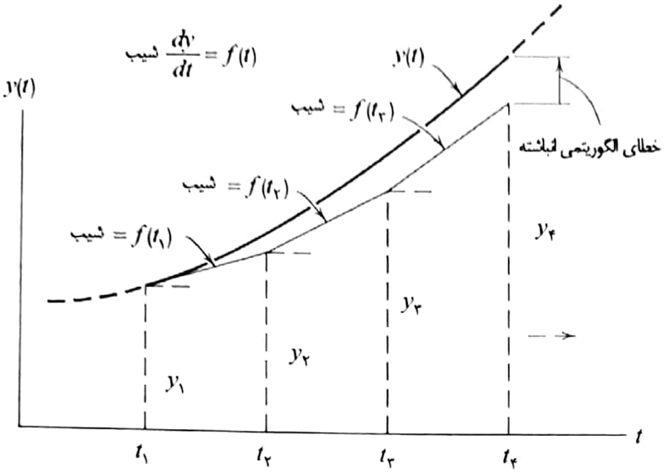
توجه کنید که میزان خطا در بدترین تقریب، کمتر از ۲ درصد، حتی برای فقط چهار نوار است.

۲. ***انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل معمولی درجهٔ اول.*** استفاده از اصول اساسی مکانیک در بسیاری از موارد به معادلات دیفرانسیلی منتهی می‌شود. شکل درجهٔ اول $dy/dt = f(t)$ را درنظر می‌گیریم که در آن تابع $f(t)$ ممکن است به‌سادگی قابل انتگرال‌گیری نباشد یا تنها به‌شکل جدول مشخص شده باشد. می‌توانیم با استفاده از یک روش سادهٔ تصویرکردن شیب، به‌نام انتگرال‌گیری اویلر که در شکل نشان‌داده‌شده، اقدام به انتگرال‌گیری نماییم.

با شروع از t_1 که در آن y_1 معلوم است، شیب را روی یک بازهٔ افقی یا پله $(t_2 - t_1)$ تصویر می‌کنیم و ملاحظه می‌کنیم که $y_2 = y_1 + f(t_1)(t_2 - t_1)$ است. در t_2، می‌توان با شروع از y_2 این فرایند را تکرار کرد، و الی آخر، تا مقدار مطلوب t حاصل شود از این‌رو

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

1. Simpson's rule



اگر y نسبت به t خطی باشد، یعنی اگر $f(t)$ ثابت باشد، روش فوق باید دقیق باشد و دیگر نیازی به روش عددی در این حالت نیست. تغییرات شیب در طول هر فاصله، باعث بروز خطا می‌شود. برای حالت نشان‌داده‌شده در شکل، تخمین y_2 به‌وضوح کمتر از مقدار واقعی تابع $y(t)$ در t_2 است. روش‌های انتگرال‌گیری دقیق‌تر (مانند روش‌های رانگ ـ کوتا[1]) تغییرات شیب بر روی هر فاصله را به حساب می‌آورند و از این‌رو نتایج بهتری را ارائه می‌دهند.

همان‌طورکه در مورد روش‌های تعیین مساحت بیان شد، در اینجا نیز تجربه در انتخاب اندازهٔ فاصله یا پله برای توابع تحلیلی سودمند است. به‌عنوان یک قاعدهٔ سرانگشتی، با پله‌ای با اندازهٔ نسبتاً بزرگ شروع می‌کنیم و پس از آن اندازهٔ پله را دائماً کاهش می‌دهیم تا تغییرات نظیر در نتیجهٔ انتگرال گرفته‌شده بسیار کمتر از دقت مطلوب شود. این نوع خطا را خطای "گرد کردن" می‌نامند، اما خطای حاصل از بزرگ بودن پله، خطای الگوریتمی خوانده می‌شود.

مثال: برای معادلهٔ دیفرانسیل $dy/dt = 5t$ با شرط اولیهٔ $y = 2$ در $t = 0$، مقدار y را در $t = 4$ تعیین کنید.

با استفاده از روش انتگرال‌گیری اویلر نتایج زیر به‌دست می‌آید:

تعداد فواصل	اندازهٔ پله	y در $t=4$	درصد خطا
۱۰	۰٫۴	۳۸	۹٫۵
۱۰۰	۰٫۰۴	۴۱٫۶	۰٫۹۵
۵۰۰	۰٫۰۰۸	۴۱٫۹۲	۰٫۱۹
۱۰۰۰	۰٫۰۰۴	۴۱٫۹۶	۰٫۱۰

این مثال ساده را می‌توان به‌صورت تحلیلی انتگرال‌گیری کرد. نتیجه برابر است با $y = 42$ (دقیقاً).

1. Runge-Kutta

Scanned by CamScanner

پیوست د

جدول‌های مفید

جدول د.۱ خواص فیزیکی

چگالی (kg/m^3) و وزن مخصوص (lb/ft^3)					
	kg/m^3	lb/ft^3		kg/m^3	lb/ft^3
هوا*	۱٫۲۰۶۲	۰٫۰۷۵۳۰	سرب	۱۱۳۷۰	۷۱۰
آلومینیم	۲۶۹۰	۱۶۸	جیوه	۱۳۵۷۰	۸۴۷
بتن (میانگین)	۲۴۰۰	۱۵۰	روغن (میانگین)	۹۰۰	۵۶
مس	۸۹۱۰	۵۵۶	فولاد	۷۸۳۰	۴۸۹
زمین (خیس، میانگین)	۱۷۶۰	۱۱۰	تیتانیم	۳۰۸۰	۱۹۲
(خشک، میانگین)	۱۲۸۰	۸۰	آب (شیرین)	۱۰۰۰	۶۲٫۴
شیشه	۲۵۹۰	۱۶۲	(شور)	۱۰۳۰	۶۴
طلا	۱۹۳۰۰	۱۲۰۵	چوب (کاج نرم)	۴۸۰	۳۰
یخ	۹۰۰	۵۶	(بلوط سخت)	۸۰۰	۵۰
آهن (چدن)	۷۲۱۰	۴۵۰			

* در دمای ۲۰°C (۶۸°F) و فشار جو.

ضریب اصطکاک

ضرایب اصطکاک در جدول زیر آمده است، مقادیر نمونه‌وار در شرایط کارکرد عادی است. ضرایب واقعی برای هر موقعیت معین، به ماهیت دقیق تماس بستگی خواهد داشت. تغییرات به‌میزان ۲۵ تا ۱۰۰ درصد یا بیشتر را در مقایسه با مقادیر این جدول می‌توان انتظار داشت و این به پاکیزگی سطح، صافی سطح، فشار، روانکاری و سرعت بستگی دارد.

مقادیر متداول ضریب اصطکاک

سطح تماس	استاتیکی، μ_s	جنبشی، μ_k
فولاد روی فولاد (خشک)	۰٫۶	۰٫۴
فولاد روی فولاد (روغن‌کاری‌شده)	۰٫۱	۰٫۰۵
تفلون روی فولاد	۰٫۰۴	۰٫۰۴
فولاد روی بابیت (خشک)	۰٫۴	۰٫۳
فولاد روی بابیت (روغن‌کاری‌شده)	۰٫۱	۰٫۰۷
برنج روی فولاد (خشک)	۰٫۵	۰٫۴
بالشتک ترمز روی چدن	۰٫۴	۰٫۳
چرخ لاستیکی روی رویهٔ صاف جاده (خشک)	۰٫۹	۰٫۸
کابل سیمی روی قرقرهٔ چدنی (خشک)	۰٫۲	۰٫۱۵
طناب کنفی روی فلز	۰٫۳	۰٫۲
فلز روی یخ		۰٫۰۲

Scanned by CamScanner

جدول د.۲ ثابت‌های منظومهٔ شمسی

ثابت جهانی گرانش	$G = ۶٫۶۷۳(۱۰^{-۱۱})\mathrm{m}^{۳}/(\mathrm{kg}\cdot \mathrm{s}^{۲})$
	$= ۳٫۴۳۹(۱۰^{-۸})\mathrm{ft}^{۴}/(\mathrm{lbf}\cdot \mathrm{s}^{۴})$
جرم زمین	$m_e = ۵٫۹۷۶(۱۰^{۲۴})\mathrm{kg}$
	$= ۴٫۰۹۵(۱۰^{۲۳})\mathrm{lbf}\cdot \mathrm{s}^{۲}/\mathrm{ft}$
دورهٔ تناوب چرخش زمین (یک روز نجومی)	$= ۲۳\mathrm{h}۵۶\mathrm{min}۴\mathrm{s}$
	$= ۲۳٫۹۳۴۴\mathrm{h}$
سرعت زاویه‌ای زمین	$\omega = ۰٫۷۲۹۲(۱۰^{-۴})\mathrm{rad/s}$
سرعت زاویه‌ای میانگین	$\omega' = ۰٫۱۹۹۱(۱۰^{-۶})\mathrm{rad/s}$
خط فاصل زمین ـ خورشید	
سرعت میانگین زمین حول خورشید	$= ۱۰۷۲۰۰\mathrm{km/h}$
	$= ۶۶۶۱۰\mathrm{mi/h}$

جسم	فاصلهٔ میانگین تا خورشید km(mi)	خروج از مرکز مدار e	دورهٔ تناوب مدار روز خورشیدی	قطر میانگین km(mi)	جرم نسبت به زمین	شتاب گرانشی در سطح $\mathrm{m/s^{۲}}$ $(\mathrm{ft/s^{۲}})$	سرعت فرار km/s (mi/s)
ورشید	-	-	-	۱۳۹۲۰۰۰ (۸۶۵۰۰۰)	۳۳۳۰۰۰	۲۷۴ (۸۹۸)	۶۱۶ (۳۸۳)
ا	۳۸۴۳۹۸* (۲۳۸۸۵۴)*	۰٫۰۵۵	۲۷٫۳۲	۳۴۷۶ (۲۱۶۰)	۰٫۰۱۲۳	۱٫۶۲ (۵٫۳۲)	۲٫۳۷ (۱٫۴۷)
طارد	$۵۷٫۳\times۱۰^{۶}$ $(۳۵٫۶\times۱۰^{۶})$	۰٫۲۰۶	۸۷٫۹۷	۵۰۰۰ (۳۱۰۰)	۰٫۰۵۴	۳٫۴۷ (۱۱٫۴)	۴٫۱۷ (۲٫۵۹)
ره	۱۰۸×۱۰^{۶} $(۶۷٫۲\times۱۰^{۶})$	۰٫۰۰۶۸	۲۲۴٫۷۰	۱۲۴۰۰ (۷۷۰۰)	۰٫۸۱۵	۸٫۴۴ (۲۷٫۷)	۱۰٫۲۴ (۶٫۳۶)
مین	$۱۴۹٫۶\times۱۰^{۶}$ $(۹۲٫۹۶\times۱۰^{۶})$	۰٫۰۱۶۷	۳۶۵٫۲۶	۱۲۷۴۲† (۷۹۱۸)†	۱٫۰۰۰	۹٫۸۲۱‡ (۳۲٫۲۲)‡	۱۱٫۱۸ (۶٫۹۵)
ریخ	$۲۲۷٫۹\times۱۰^{۶}$ $(۱۴۱٫۶\times۱۰^{۶})$	۰٫۰۹۳	۶۸۶٫۹۸	۶۷۸۸ (۴۲۱۸)	۰٫۱۰۷	۳٫۷۳ (۱۲٫۳)	۵٫۰۳ (۳٫۱۳)
شتری§	۷۷۸×۱۰^{۶} (۴۸۳×۱۰^{۶})	۰٫۰۴۸۹	۴۳۳۳	۱۳۹۸۲۲ ۸۶۸۸۴	۳۱۷٫۸	۲۴٫۷۹ (۸۱٫۳)	۵۹٫۵ (۳۶٫۸)

فاصلهٔ میانگین تا زمین (مرکز به مرکز)

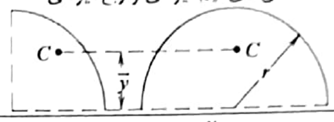
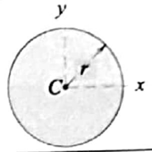
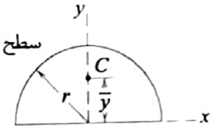
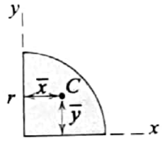
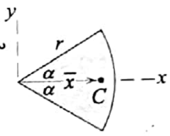
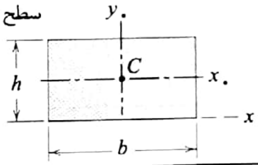
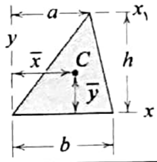
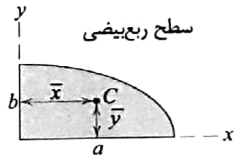
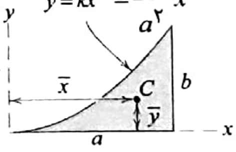
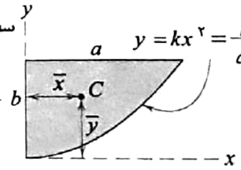
قطر کره با حجم برابر، بر مبنای زمین کروی با قطر ۱۲۷۱۴km (۷۹۰۰mi) در قطب‌ها و قطر ۱۲۷۵۶km (۷۹۲۶mi) در استوا.

برای زمین کروی بدون دوران، معادل با قدرمطلق در سطح دریا و عرض جغرافیایی ۳۷٫۵°.

توجه داشته باشید که مشتری یک جسم جامد نیست.

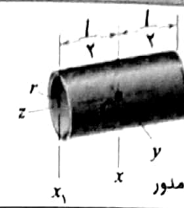
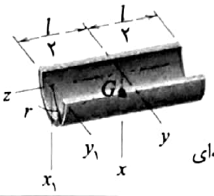
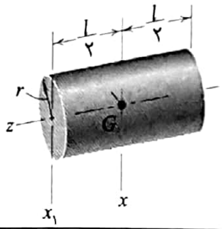
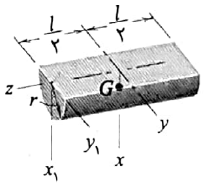
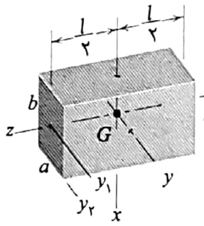
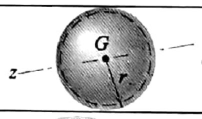
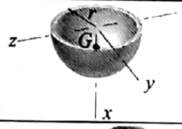
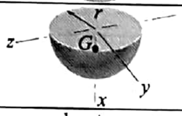
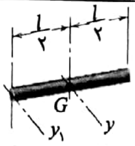
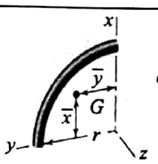
Scanned by CamScanner

جدول د. ۳ خواص شکل‌های مسطح

شکل	مرکز هندسی	گشتاورهای لختی سطح
قطعهٔ کمان	$\bar{r} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	-
کمان‌های نیم‌دایره‌ای و ربع‌دایره‌ای 	$\bar{y} = \frac{۲r}{\pi}$	-
سطح دایره‌ای 	-	$I_x = I_y = \frac{\pi r^۴}{۴}$ $I_z = \frac{\pi r^۴}{۲}$
سطح نیم‌دایره‌ای 	$\bar{y} = \frac{۴r}{۳\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^۴}{۸}$ $\bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{۸} - \frac{۸}{۹\pi}\right) r^۴$ $I_z = \frac{\pi r^۴}{۴}$
سطح ربع‌دایره‌ای 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{۴r}{۳\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^۴}{۱۶}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{۱۶} - \frac{۴}{۹\pi}\right) r^۴$ $I_z = \frac{\pi r^۴}{۸}$
سطح قطاعی از دایره 	$\bar{x} = \frac{۲}{۳}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	$I_x = \frac{r^۴}{۴}(\alpha - \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha)$ $I_y = \frac{r^۴}{۴}(\alpha + \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha)$ $I_z = \frac{۱}{۲} r^۴ \alpha$
سطح مستطیل 	-	$I_x = \frac{bh^۳}{۳}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^۳}{۱۲}$ $\bar{I}_z = \frac{bh}{۱۲}(b^۲ + h^۲)$
سطح مثلث 	$\bar{x} = \frac{a+b}{۳}$ $\bar{y} = \frac{h}{۳}$	$I_x = \frac{bh^۳}{۱۲}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^۳}{۳۶}$ $I_{x_۱} = \frac{bh^۳}{۴}$
سطح ربع‌بیضی 	$\bar{x} = \frac{۴a}{۳\pi}$ $\bar{y} = \frac{۴b}{۳\pi}$	$I_x = \frac{\pi ab^۳}{۱۶}, \ \bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{۱۶} - \frac{۴}{۹\pi}\right) ab^۳$ $I_y = \frac{\pi a^۳ b}{۱۶}, \ \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{۱۶} - \frac{۴}{۹\pi}\right) a^۳ b$ $I_z = \frac{\pi ab}{۱۶}(a^۲ + b^۲)$
سطح زیر سهمی  $y = kx^۲ = \frac{b}{a^۲}x^۲$, $A = \frac{ab}{۳}$	$\bar{x} = \frac{۳a}{۴}$ $\bar{y} = \frac{۳b}{۱۰}$	$I_x = \frac{ab^۳}{۲۱}$ $I_y = \frac{a^۳ b}{۵}$ $I_z = ab\left(\frac{a^۲}{۵} + \frac{b^۲}{۲۱}\right)$
سطح سهموی  $y = kx^۲ = \frac{b}{a^۲}x^۲$, $A = \frac{۲ab}{۳}$	$\bar{x} = \frac{۳a}{۸}$ $\bar{y} = \frac{۳b}{۵}$	$I_x = \frac{۲ab^۳}{۷}$ $I_y = \frac{۲a^۳ b}{۱۵}$ $I_z = ۲ab\left(\frac{a^۲}{۱۵} + \frac{b^۲}{۷}\right)$

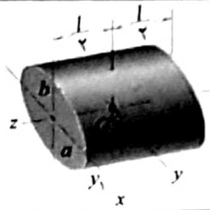
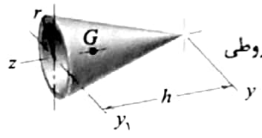
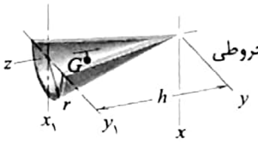
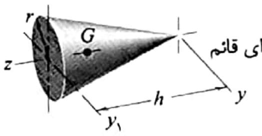
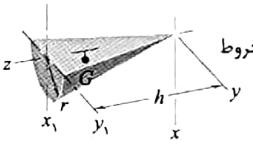
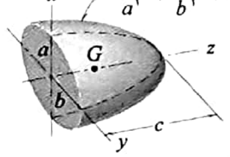
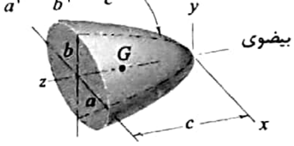
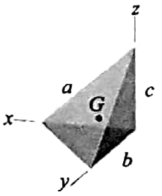
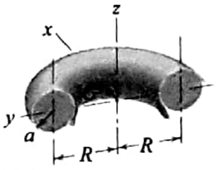
Scanned by CamScanner

جدول د.۴ خواص حجم‌های توپُر همگن (m = جرم نشان‌داده‌شده)

جسم	مرکز جرم	گشتاورهای لختی سطح
 پوستهٔ استوانه‌ای مدور	-	$I_{xx}=\frac{1}{2}mr^2+\frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1}=\frac{1}{2}mr^2+\frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz}=mr^2$
 پوستهٔ نیم‌استوانه‌ای	$\bar{x}=\frac{2r}{\pi}$	$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mr^2+\frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1}=I_{y_1y_1}=\frac{1}{2}mr^2+\frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz}=mr^2$ $\bar{I}_{zz}=\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)mr^2$
 استوانهٔ مدور	-	$I_{xx}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz}=\frac{1}{2}mr^2$
 نیم‌استوانه	$\bar{x}=\frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1}=I_{y_1y_1}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz}=\frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz}=\left(\frac{1}{2}-\frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
 منشور با قاعده‌های مستطیلی	-	$I_{xx}=\frac{1}{12}m(a^2+l^2)$ $I_{yy}=\frac{1}{12}m(b^2+l^2)$ $I_{zz}=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$ $I_{y_1y_1}=\frac{1}{12}mb^2+\frac{1}{3}ml^2$ $I_{y_2y_2}=\frac{1}{3}m(b^2+l^2)$
 پوستهٔ کروی	-	$I_{zz}=\frac{2}{3}mr^2$
 پوستهٔ نیم‌کروی	$\bar{x}=\frac{r}{2}$	$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_{yy}=\bar{I}_{zz}=\frac{5}{12}mr^2$
کره	-	$I_{zz}=\frac{2}{5}mr^2$
 نیم‌کره	$\bar{x}=\frac{3r}{8}$	$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_{yy}=\bar{I}_{zz}=\frac{83}{320}mr^2$
 میلهٔ باریک یکنواخت	-	$I_{yy}=\frac{1}{12}ml^2$ $I_{y_1y_1}=\frac{1}{3}ml^2$
 میلهٔ ربع‌دایره‌ای	$\bar{x}=\bar{y}=\frac{2r}{\pi}$	$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mr^2$ $I_{zz}=mr^2$

Scanned by CamScanner

ادامهٔ جدول د.۴ خواص حجم‌های توپُر همگن (m = جرم نشان‌داده‌شده)

جسم	مرکز جرم	گشتاورهای لختی سطح
استوانهٔ بیضوی 	-	$I_{xx}=\frac{1}{4}ma^2+\frac{1}{12}ml^2$ $I_{yy}=\frac{1}{4}mb^2+\frac{1}{12}ml^2$ $I_{zz}=\frac{1}{4}m(a^2+b^2)$ $I_{y_1y_1}=\frac{1}{4}mb^2+\frac{1}{3}ml^2$
پوستهٔ مخروطی 	$\bar{z}=\frac{2h}{3}$	$I_{yy}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{2}mh^2$ $I_{y_1y_1}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz}=\frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{yy}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{18}mh^2$
پوستهٔ نیم‌مخروطی 	$\bar{x}=\frac{4r}{3\pi}$ $\bar{z}=\frac{2h}{3}$	$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{2}mh^2$ $I_{x_1x_1}=I_{y_1y_1}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz}=\frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz}=\left(\frac{1}{2}-\frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
مخروط دایره‌ای قائم 	$\bar{z}=\frac{3h}{4}$	$I_{yy}=\frac{3}{20}mr^2+\frac{3}{5}mh^2$ $I_{y_1y_1}=\frac{3}{20}mr^2+\frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz}=\frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{yy}=\frac{3}{20}mr^2+\frac{3}{80}mh^2$
نیم‌مخروط 	$\bar{x}=\frac{r}{\pi}$ $\bar{z}=\frac{3h}{4}$	$I_{xx}=I_{yy}=\frac{3}{20}mr^2+\frac{3}{5}mh^2$ $I_{x_1x_1}=I_{y_1y_1}=\frac{3}{20}mr^2+\frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz}=\frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{zz}=\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{\pi^2}\right)mr^2$
نیم‌بیضوی  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\bar{z}=\frac{3c}{8}$	$I_{xx}=\frac{1}{5}m(b^2+c^2)$ $\quad \bar{I}_{xx}=\frac{1}{5}m(b^2+\frac{19}{64}c^2)$ $I_{yy}=\frac{1}{5}m(a^2+c^2)$ $\quad \bar{I}_{yy}=\frac{1}{5}m(a^2+\frac{19}{64}c^2)$ $I_{zz}=\frac{1}{5}m(a^2+b^2)$
سهمی‌وار بیضوی  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$	$\bar{z}=\frac{2c}{3}$	$I_{xx}=\frac{1}{6}mb^2+\frac{1}{2}mc^2$ $\quad \bar{I}_{xx}=\frac{1}{6}m(b^2+\frac{1}{3}c^2)$ $I_{yy}=\frac{1}{6}ma^2+\frac{1}{2}mc^2$ $\quad \bar{I}_{yy}=\frac{1}{6}m(a^2+\frac{1}{3}c^2)$ $I_{zz}=\frac{1}{6}m(a^2+b^2)$
چهار وجهی قائم 	$\bar{x}=\frac{a}{4}$ $\bar{y}=\frac{b}{4}$ $\bar{z}=\frac{c}{4}$	$I_{xx}=\frac{1}{10}m(b^2+c^2)$ $\quad \bar{I}_{xx}=\frac{3}{80}m(b^2+c^2)$ $I_{yy}=\frac{1}{10}m(a^2+c^2)$ $\quad \bar{I}_{yy}=\frac{3}{80}m(a^2+c^2)$ $I_{zz}=\frac{1}{10}m(a^2+b^2)$ $\quad \bar{I}_{zz}=\frac{3}{80}m(a^2+b^2)$
نیم‌چنبره 	$\bar{x}=\frac{a^2+4R^2}{2\pi R}$	$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mR^2+\frac{5}{8}ma^2$ $I_{zz}=mR^2+\frac{3}{4}ma^2$

Scanned by CamScanner

ضرایب تبدیل یکاهای متداول ایالات متحده به یکاهای SI

برای تبدیل از	به	ضرب شود در
شتاب		
فوت بر مجذور ثانیه (ft/sec^2)	متر بر مجذور ثانیه (m/s^2)	$۳٫۰۴۸ \times ۱۰^{-۱۰}$*
اینچ بر مجذور ثانیه (in/sec^2)	متر بر مجذور ثانیه (m/s^2)	$۲٫۵۴ \times ۱۰^{-۲۰}$
مساحت		
فوت مربع (ft^2)	متر مربع (m^2)	$۹٫۲۹۰۳ \times ۱۰^{-۲}$
اینچ مربع (in^2)	متر مربع (m^2)	$۶٫۴۵۱۶ \times ۱۰^{-۴}$*
چگالی		
پوند جرم بر اینچ مکعب (lbm/in^3)	کیلوگرم بر متر مکعب (kg/m^3)	$۲٫۷۶۸ \times ۱۰^{۴}$
پوند جرم بر فوت مکعب (lbm/ft^3)	کیلوگرم بر متر مکعب (kg/m^3)	$۱٫۶۰۱۸ \times ۱۰$
نیرو		
کیپ (۱۰۰۰lb)	نیوتن (N)	$۴٫۴۴۸۲ \times ۱۰^{۳}$
پوند نیرو (lb)	نیوتن (N)	۴٫۴۴۸۲
طول		
فوت (ft)	متر (m)	$۳٫۰۴۸ \times ۱۰^{-۱۰}$*
اینچ (in)	متر (m)	$۲٫۵۴ \times ۱۰^{-۲۰}$*
مایل (mi)، امریکایی	متر (m)	$۱٫۶۰۹۳ \times ۱۰^{۳}$*
مایل (mi)، (دریایی)	متر (m)	$۱٫۸۵۲ \times ۱۰^{۳}$*
جرم		
پوند جرم (lbm)	کیلوگرم (kg)	$۴٫۵۳۵۹ \times ۱۰^{-۱}$*
اسلاگ ($lb \cdot sec^2/ft$)	کیلوگرم (kg)	$۱٫۴۵۹۴ \times ۱۰$
تن (۲۰۰۰lbm)	کیلوگرم (kg)	$۹٫۰۷۱۸ \times ۱۰^{۲}$
گشتاور ـ نیرو		
پوند ـ فوت ($lb \cdot ft$)	نیوتن ـ متر ($N \cdot m$)	۱٫۳۵۵۸
پوند ـ اینچ ($lb \cdot in$)	نیوتن ـ متر ($N \cdot m$)	۰٫۱۱۲۹۸
گشتاور لختی، سطح		
اینچ به توان چهار (in^4)	متر به توان چهار (m^4)	$۴۱٫۶۲۳ \times ۱۰^{-۸}$
گشتاور لختی، جرم		
پوند ـ فوت ـ مربع ثانیه ($lb \cdot ft \cdot sec^2$)	کیلوگرم ـ متر مربع ($kg \cdot m^2$)	۱٫۳۵۵۸
اندازه حرکت خطی		
پوند ـ ثانیه ($lb.sec^2$)	کیلوگرم ـ متر بر ثانیه ($kg \cdot m/s$)	۴٫۴۴۸۲
اندازه حرکت، زاویه‌ای		
پوند ـ فوت ـ ثانیه ($lb.ft \cdot sec$)	نیوتن ـ متر ـ ثانیه ($kg \cdot m^2/s$)	۱٫۳۵۵۸
توان		
فوت ـ پوند بر دقیقه ($ft \cdot lb/min$)	وات (W)	$۲٫۲۵۹۷ \times ۱۰^{-۲}$
اسب بخار ($۵۵۰ ft \cdot lb/sec$)	وات (W)	$۷٫۴۵۷۰ \times ۱۰^{۲}$
فشار، تنش		
جو (استاندارد) ($۱۴٫۷ lb/in^2$)	نیوتن بر متر مربع (N/m^2 یا Pa)	$۱٫۰۱۳۳ \times ۱۰^{۵}$
پوند بر فوت مربع (lb/ft^2)	نیوتن بر متر مربع (N/m^2 یا Pa)	$۴٫۷۸۸۰ \times ۱۰$
پوند بر اینچ مربع (lb/in^2 یا psi)	نیوتن بر متر مربع (N/m^2 یا Pa)	$۶٫۸۹۴۸ \times ۱۰^{۳}$
ثابت فنر		
پوند بر اینچ (lb/in)	نیوتن بر متر مربع (N/m)	$۱٫۷۵۱۳ \times ۱۰^{۲}$
سرعت		
فوت بر ثانیه (ft/sec)	متر بر ثانیه (m/s)	$۳٫۰۴۸ \times ۱۰^{-۱}$*
گره (mi/hr دریایی)	متر بر ثانیه (m/s)	$۵٫۱۴۴۴ \times ۱۰^{-۱}$
مایل بر ساعت (mi/hr)	متر بر ثانیه (m/s)	$۴٫۴۷۰۴ \times ۱۰^{-۱}$*
مایل بر ساعت (mi/hr)	کیلومتر بر ساعت (km/h)	۱٫۶۰۹۳
حجم		
فوت مکعب (ft^3)	متر مکعب (m^3)	$۲٫۸۳۱۷ \times ۱۰^{-۲}$
اینچ مکعب (in^3)	متر مکعب (m^3)	$۱٫۶۳۸۷ \times ۱۰^{-۵}$
کار، انرژی		
واحد گرمایی بریتانیایی (BTU)	ژول (J)	$۱٫۰۵۵۱ \times ۱۰^{۳}$
فوت ـ پوند نیرو ($ft \cdot lb$)	ژول (J)	۱٫۳۵۵۸
کیلو وات ـ ساعت ($kW \cdot h$)	ژول (J)	$۳٫۶۰ \times ۱۰^{۶}$*

* مقدار دقیق

Scanned by CamScanner

یکاهای SI به‌کار رفته در مکانیک

کمیت	یکا	نماد SI
یکاهای اصلی		
طول	متر	m
جرم	کیلوگرم	kg
زمان	ثانیه	s
یکاهای فرعی		
شتاب، خطی	متر بر مربع ثانیه	$m/s^{۲}$
شتاب، زاویه‌ای	رادیان بر مربع ثانیه	$rad/s^{۲}$
سطح	متر مربع	$m^{۲}$
چگالی	کیلوگرم بر متر مکعب	$kg/m^{۳}$
نیرو	نیوتن	$N(=kg\cdot m/s^{۲})$
بسامد	هرتز	$Hz(=۱/s)$
ضربه، خطی	نیوتن ـ ثانیه	$N\cdot s$
ضربه، زاویه‌ای	نیوتن ـ متر ـ ثانیه	$N\cdot m\cdot s$
گشتاور نیرو	نیوتن ـ متر	$N\cdot m$
گشتاور لختی، سطح	متر به توان چهار	$m^{۴}$
گشتاور لختی، جرم	کیلوگرم ـ متر مربع	$kg\cdot m^{۲}$
اندازه حرکت، خطی	کیلوگرم ـ متر بر ثانیه	$kg\cdot m/s(=N\cdot s)$
اندازه حرکت، زاویه‌ای	کیلوگرم ـ متر مربع بر ثانیه	$kg\cdot m^{۲}/s\ (=N\cdot m\cdot s)$
توان	وات	$W(=J/s=N\cdot m\cdot s)$
فشار، تنش	پاسکال	$Pa(=N/m^{۲})$
حاصلضرب لختی، سطح	متر به توان چهار	$m^{۴}$
حاصلضرب لختی، جرم	کیلوگرم ـ متر مربع	$kg\cdot m^{۲}$
ثابت فنر	نیوتن بر متر	N/m
سرعت، خطی	متر بر ثانیه	m/s
سرعت، زاویه‌ای	رادیان بر ثانیه	rad/s
حجم	متر مکعب	$m^{۳}$
کار، انرژی	ژول	$J(=N\cdot m)$
واحدهای مکمل و سایر واحدهای قابل قبول		
فاصله (دریانوردی)	مایل (دریایی)	(=۱٫۸۵۲km)
جرم	تن (متریک)	t =(=۱۰۰۰kg)
زاویه	درجه (دسیمال)	°
زاویه	رادیان	ـ
تندی (مقدار سرعت)	گره	(=۱٫۸۵۲km)
زمان	روز	d
زمان	ساعت	h
زمان	دقیقه	min

پیشوندهای یکاهای SI

نماد	پیشوند	ضریب
T	ترا	$۱۰^{۱۲}$=۱ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰
G	گیگا	$۱۰^{۹}$=۱ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰
M	مگا	$۱۰^{۶}$=۱ ۰۰۰ ۰۰۰
k	کیلو	$۱۰^{۳}$=۱۰۰۰
h	هکتو	$۱۰^{۲}$=۱۰۰
da	دکا	۱۰=۱۰
d	دسی	$۱۰^{-۱}$=۰٫۱
c	سانتی	$۱۰^{-۲}$=۰٫۰۱
m	میلی	$۱۰^{-۳}$=۰٫۰۰۱
µ	میکرو	$۱۰^{-۶}$=۰٫۰۰۰ ۰۰۱
n	نانو	$۱۰^{-۹}$=۰٫۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۱
p	پیکو	$۱۰^{-۱۲}$=۰٫۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۱

قواعد برگزیده در نوشتن کمیت‌های متریک

۱. (الف) با استفاده از پیشوندها، مقادیر عددی را معمولاً بین ۰٫۱ و ۱۰۰۰ حفظ کنید.

(ب) اغلب باید از پیشوندهای هکتو، دکا، دسی و سانتی پرهیز کرد، مگر در مساحت‌ها و حجم‌های معینی که آوردن عدد به‌شکل دیگر، حالت نامناسب پیدا می‌کند.

(ج) از پشوندها تنها در صورت کسر واحدهای ترکیبی استفاده کنید. واحد اصلی کیلوگرم یک استثنا است.

(مثال: kN/m را به‌صورت N/mm و J/kg را به‌صورت mJ/g ننویسید)

(د) از پشوندهای دوگانه پرهیز کنید. (مثال: GN را به‌صورت kMN ننویسید)

۲. مشخص کرن یکاها

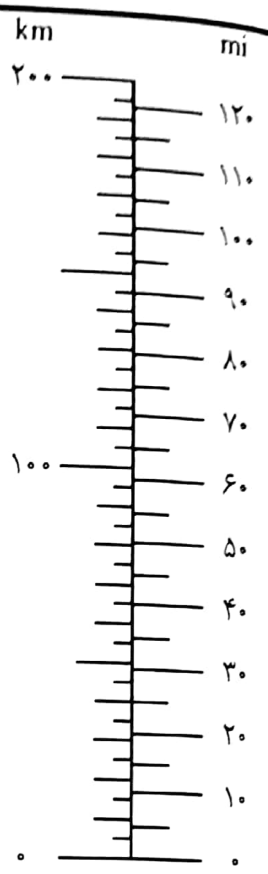
(الف) برای ضرب کردن یکاها از علامت ضرب داخلی استفاده کنید. (مثال: $N\cdot m$ را به‌صورت Nm ننویسید.)

(ب) از خطوط کسری مضاعف پرهیز کنید. (مثال: $N/m^{۲}$ را به‌صورت N/m/m ننویسید.

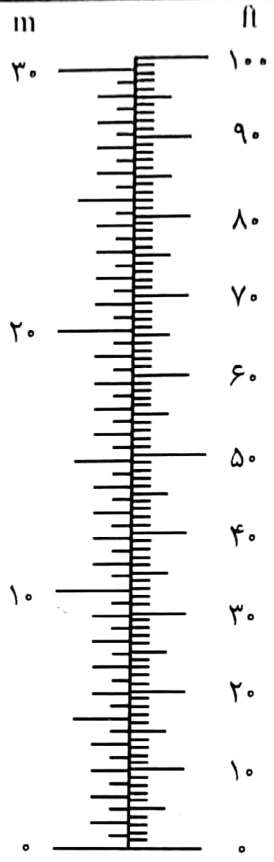
(ج) توان به کل واحد مربوط می‌شود. [مثال: $mm^{۲}$ به‌مفهوم $(mm)^{۲}$ است.]

Scanned by CamScanner

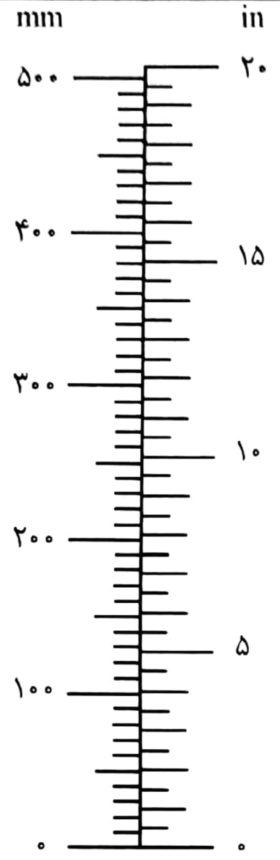
نمودارهای تبدیل یکاهای SI و یکاهای متداول ایالات متحده به یکدیگر



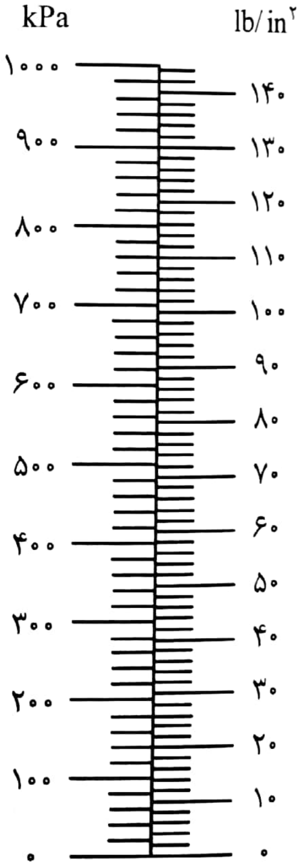
طول



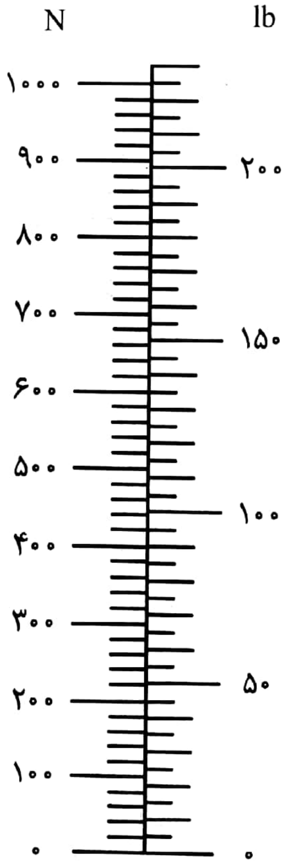
طول



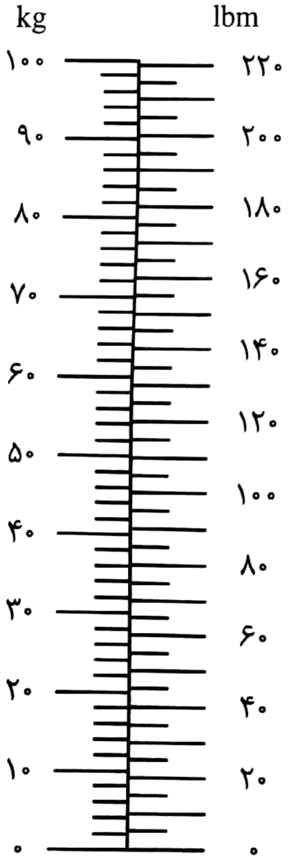
طول



فشار یا تنش



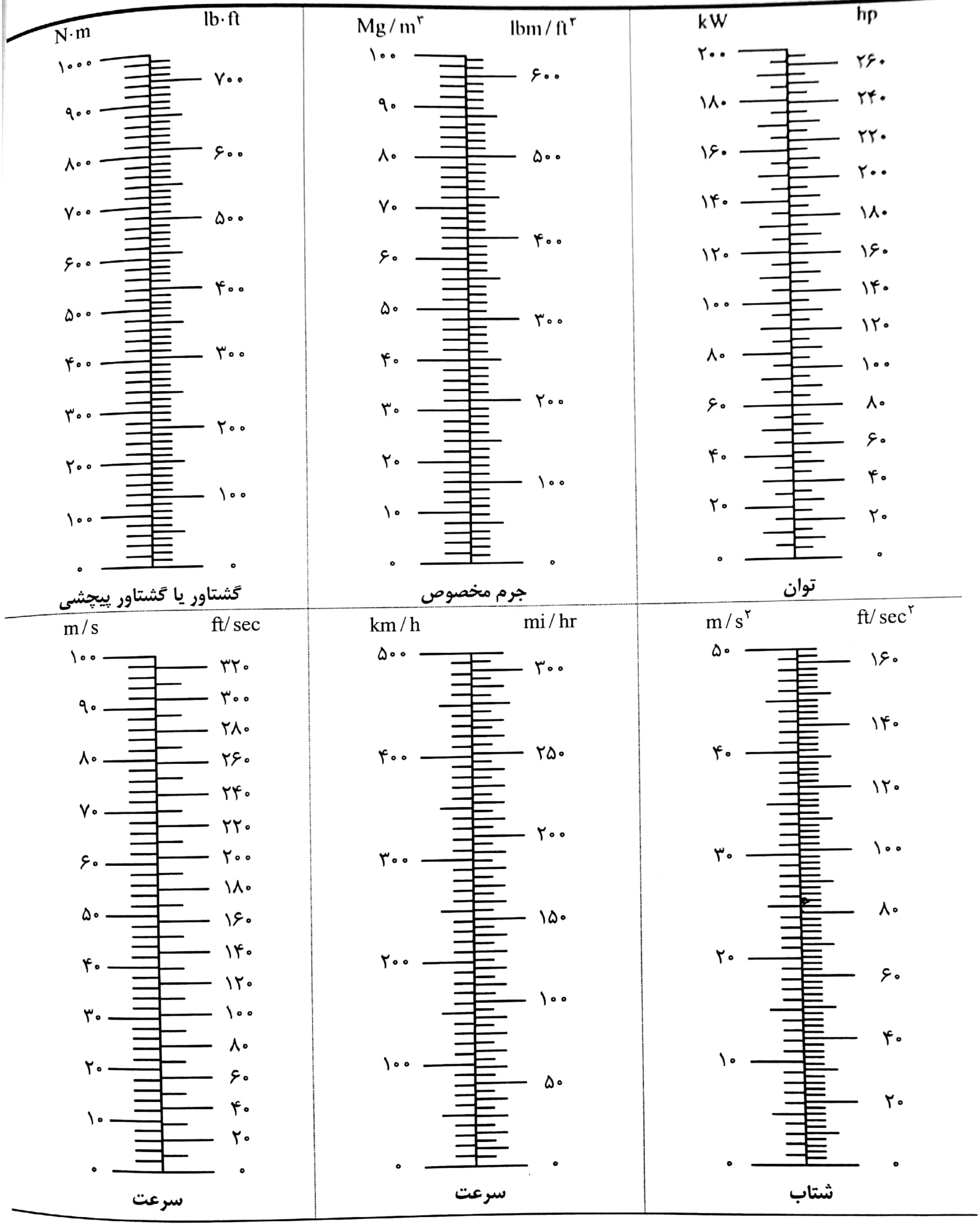
نیرو



جرم

Scanned by CamScanner

نمودارهای تبدیل یکاهای SI و یکاهای متداول ایالات متحده به یکدیگر



Scanned by CamScanner